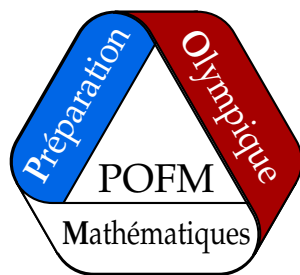


# PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES



TEST DU 10 MAI 2023

DURÉE : 4H

## Instructions

- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- ▷ On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.  
Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.  
Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits. Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

**Chaque exercice est noté sur 7 points.**

## Énoncés Junior

**Exercice 1.** Soit  $ABC$  un triangle tel que  $\widehat{CAB} < \widehat{ABC} < \widehat{BCA} < 90^\circ$ . Soit  $\omega$  le cercle circonscrit à  $ABC$ ,  $\gamma_a$  le cercle de centre  $A$  et de rayon  $[AC]$ , et  $\gamma_b$  le cercle de centre  $B$  et de rayon  $[BC]$ . Enfin, soit  $D$  le point d'intersection, autre que  $C$ , entre  $\omega$  et  $\gamma_b$ , et soit  $E$  le point d'intersection, autre que  $C$ , entre  $\gamma_a$  et  $\gamma_b$ .

Démontrer que les points  $A$ ,  $D$  et  $E$  sont alignés.

**Exercice 2.** Anna et Baptiste joue au jeu suivant. Au début du jeu sont placées devant eux 2022 cases blanches, numérotées de 1 à 2022. Puis, chacun son tour, en commençant par Anna, ils choisissent une case blanche et la colorient de la couleur de leur choix : soit en rouge, soit en bleu. La partie s'arrête au bout de 2022 tours de jeu, c'est-à-dire au moment où la dernière case blanche est coloriée.

Le score d'Anna est alors égal au nombre d'entiers  $a \leq 2019$  tels que les deux cases de numéros  $a$  et  $a + 3$  sont de la même couleur. Anna souhaite avoir le score le plus élevé possible; Baptiste souhaite que le score d'Anna soit le plus faible possible. Quel est le score maximal qu'Anna peut s'assurer d'obtenir quels que soient les coups que Baptiste choisira de jouer?

**Exercice 3.** Trouver tous les entiers  $n \geq 1$  pour lesquels il existe un multiple de 222 dont la somme des carrés des chiffres est égale à  $n$ .

**Exercice 4.** Soit  $n \geq 1$  un entier. Bosphore a écrit  $n$  fois le nombre 2 au tableau. Il effectue ensuite,  $n - 1$  fois d'affilée, l'opération suivante : il choisit deux nombres écrits au tableau, qu'il appelle  $a$  et  $b$ , puis les efface et écrit le nombre  $\sqrt{(ab + 1)/2}$  à la place. Enfin, il appelle  $x$  le nombre écrit au tableau après ces  $n - 1$  opérations, et  $y$  le nombre  $\sqrt{(n + 3)/n}$ .

- Démontrer que  $x \geq y$ .
- Démontrer qu'il existe une infinité d'entiers  $n \geq 1$  pour lesquels on a nécessairement  $x > y$ .
- Démontrer qu'il existe une infinité d'entiers  $n \geq 1$  pour lesquels Bosphore peut faire en sorte que  $x = y$ .

## Énoncés Senior

**Exercice 5.** Une suite *olympique* est une suite  $s_1, s_2, \dots, s_{2023}$  dont chacun des 2023 termes est égal à 1 ou à  $-1$ . Une suite *peu croissante* est une suite d'entiers  $t_1, t_2, \dots, t_n$  telle que  $1 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq 2023$ , et dont chacune des  $n - 1$  différences  $t_{i+1} - t_i$  vaut 1 ou 2.

Trouver le plus grand entier  $C$  tel que, pour toute suite olympique  $s_1, s_2, \dots, s_{2023}$ , il existe un entier  $n \geq 1$  et une suite peu croissante  $t_1, t_2, \dots, t_n$  de longueur  $n$  tels que

$$|s_{t_1} + s_{t_2} + \dots + s_{t_n}| \geq C.$$

**Exercice 6.** Soit  $a \geq 2$  et  $d \geq 2$  deux entiers premiers entre eux. On pose  $x_1 = 1$ ; puis, pour tout entier  $k \geq 1$ , on pose  $x_{k+1} = x_k/a$  si  $a$  divise  $x_k$ , et  $x_{k+1} = x_k + d$  sinon.

Trouver, en fonction de  $a$  et de  $d$ , l'entier  $\ell$  maximal pour lequel  $a^\ell$  divise l'un des termes  $x_1, x_2, x_3, \dots$ .

**Exercice 7.** **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**