PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 10 MAI 2023

DURÉE : 4H

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées.
  Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

Énoncés Junior

Exercice 1. Soit ABC un triangle tel que $\widehat{CAB} < \widehat{ABC} < \widehat{BCA} < 90°$. Soit ω le cercle circonscrit à ABC, γ_a le cercle de centre A et de rayon $[AC]$, et γ_b le cercle de centre B et de rayon $[BC]$. Enfin, soit D le point d'intersection, autre que C, entre ω et γ_b, et soit E le point d'intersection, autre que C, entre γ_a et γ_b.

Démontrer que les points A, D et E sont alignés.

Exercice 2. Anna et Baptiste joue au jeu suivant. Au début du jeu sont placées devant eux 2022 cases blanches, numérotées de 1 à 2022. Puis, chacun son tour, en commençant par Anna, ils choisissent une case blanche et la colorient de la couleur de leur choix : soit en rouge, soit en bleu. La partie s'arrête au bout de 2022 tours de jeu, c'est-à-dire au moment où la dernière case blanche est coloriée.

Le score d'Anna est alors égal au nombre d'entiers $a \leqslant 2019$ tels que les deux cases de numéros a et $a+3$ sont de la même couleur. Anna souhaite avoir le score le plus élevé possible ; Baptiste souhaite que le score d'Anna soit le plus faible possible. Quel est le score maximal qu'Anna peut s'assurer d'obtenir quels que soient les coups que Baptiste choisira de jouer ?

Exercice 3. Trouver tous les entiers $n \geqslant 1$ pour lesquels il existe un multiple de 222 dont la somme des carrés des chiffres est égale à n.

Exercice 4. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Bosphore a écrit n fois le nombre 2 au tableau. Il effectue ensuite, $n-1$ fois d'affilée, l'opération suivante : il choisit deux nombres écrits au tableau, qu'il appelle a et b, puis les efface et écrit le nombre $\sqrt{(ab+1)/2}$ à la place. Enfin, il appelle x le nombre écrit au tableau après ces $n-1$ opérations, et y le nombre $\sqrt{(n+3)/n}$.

a) Démontrer que $x \geqslant y$.

b) Démontrer qu'il existe une infinité d'entiers $n \geqslant 1$ pour lesquels on a nécessairement $x > y$.

c) Démontrer qu'il existe une infinité d'entiers $n \geqslant 1$ pour lesquels Bosphore peut faire en sorte que $x = y$.

Énoncés Senior

Exercice 5. Une suite *olympique* est une suite $s_1, s_2, \ldots, s_{2023}$ dont chacun des 2023 termes est égal à 1 ou à -1. Une suite *peu croissante* est une suite d'entiers $t_1, t_2, \ldots, t_n$ telle que $1 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leqslant 2023$, et dont chacune des $n-1$ différences $t_{i+1} - t_i$ vaut 1 ou 2.

Trouver le plus grand entier C tel que, pour toute suite olympique $s_1, s_2, \ldots, s_{2023}$, il existe un entier $n \geqslant 1$ et une suite peu croissante $t_1, t_2, \ldots, t_n$ de longueur n tels que

$$|s_{t_1} + s_{t_2} + \cdots + s_{t_n}| \geqslant C.$$

Exercice 6. Soit $a \geqslant 2$ et $d \geqslant 2$ deux entiers premiers entre eux. On pose $x_1 = 1$; puis, pour tout entier $k \geqslant 1$, on pose $x_{k+1} = x_k/a$ si a divise x_k, et $x_{k+1} = x_k + d$ sinon.

Trouver, en fonction de a et de d, l'entier ℓ maximal pour lequel a^ℓ divise l'un des termes $x_1, x_2, x_3, \ldots$

Exercice 7. **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**