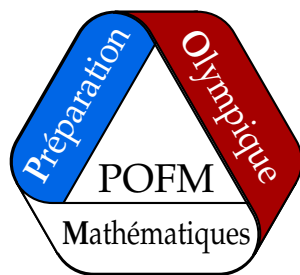


PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES



TEST DU 5 AVRIL 2023

DURÉE : 4H

Instructions

- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- ▷ On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits. Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Chaque exercice est noté sur 7 points.

Énoncés Junior

Exercice 1. Soit $n \geq 2$ un entier. Anna a écrit au tableau n entiers a_1, a_2, \dots, a_n deux à deux distincts. Elle remarque alors que, quelle que soit la manière de sélectionner $n - 1$ de ces entiers, leur somme est divisible par n .

Démontrer que la somme de l'ensemble des n entiers est divisible par n .

Exercice 2. Soit a, b et c trois réels strictement positifs. Démontrer que

$$4(a^3 + b^3 + c^3 + 3) \geq 3(a + 1)(b + 1)(c + 1).$$

Exercice 3. Alice a disposé 200 boîtes dans son salon. Chaque boîte contient un papier sur lequel elle a écrit un entier naturel non nul ; les 200 entiers ne sont pas nécessairement distincts. Chaque minute, et tant que c'est possible, Alice effectue une action de la forme suivante : elle choisit trois boîtes, contenant des entiers a, b et c tels que $a + b = c$, et choisit également un entier $k \geq 2$ arbitraire ; elle remplace alors l'entier c par l'entier $k \times c$. Si elle ne peut plus effectuer de telle action, elle s'arrête définitivement.

Démontrer que, quels que soient la situation initiale et les choix d'Alice, elle sera forcée de s'arrêter à un moment.

Exercice 4. Soit ABC un triangle isocèle en A dont tous les angles sont aigus, et soit D un point situé sur le segment $[BC]$. Soit ℓ la droite parallèle à (BC) passant par A , puis X le point de ℓ pour lequel (XD) est perpendiculaire à (BC) , et Γ le cercle de centre X passant par D . Le cercle Γ coupe le segment $[AB]$ en un point E , et on note Y le point de ℓ tel que (AB) soit perpendiculaire à (EY) ; de même, Γ coupe le segment $[AC]$ en un point F , et on note Z le point de ℓ tel que (AC) soit perpendiculaire à (FZ) .

Démontrer que les bissectrices des angles \widehat{EYA} et \widehat{FZA} se coupent en un point de la droite (XD) .

Énoncés Senior

Exercice 5. Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus. Soit F le pied de la hauteur de ABC issue de A , et soit P un point situé sur le segment $[AF]$. On note D le point de (BC) tel que (PD) soit parallèle à (AC) , puis X le point où se recoupent le cercle circonscrit à ABD et le cercle de centre D passant par A . De même, on note E le point de (BC) tel que (PE) soit parallèle à (AB) , puis Y le point où se recoupent le cercle circonscrit à ACE et le cercle de centre E passant par A .

Démontrer que les points B, C, X et Y sont cocycliques.

Exercice 6. Soit $n \geq 1$ un entier. Morgane dispose initialement de n piles dont chacune contient une pièce. Elle s'autorise ensuite des opérations de la forme suivante : elle choisit deux piles, prélève autant de pièces de la première pile que de la deuxième, et forme une nouvelle pile avec les pièces qu'elle a prélevées.

Déterminer, en fonction de n , le plus petit nombre de piles non vides que Morgane pourra obtenir à partir de telles opérations.

Exercice 7. Trouver tous les entiers $n \geq 2$ pour lesquels il existe un nombre réel $r > 0$ et n nombres réels $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ tels que les $n(n - 1)/2$ différences $a_j - a_i$ obtenues lorsque $1 \leq i < j \leq n$ sont égales, à l'ordre près, aux nombres $r^1, r^2, \dots, r^{n(n-1)/2}$.