PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 5 AVRIL 2023

DURÉE : 4H

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

Énoncés Junior

Exercice 1. Soit $n \geqslant 2$ un entier. Anna a écrit au tableau n entiers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ deux à deux distincts. Elle remarque alors que, quelle que soit la manière de sélectionner $n-1$ de ces entiers, leur somme est divisible par n.

Démontrer que la somme de l'ensemble des n entiers est divisible par n.

Exercice 2. Soit a, b et c trois réels strictement positifs. Démontrer que

$$4(a^3 + b^3 + c^3 + 3) \geqslant 3(a+1)(b+1)(c+1).$$

Exercice 3. Alice a disposé 200 boîtes dans son salon. Chaque boîte contient un papier sur lequel elle a écrit un entier naturel non nul ; les 200 entiers ne sont pas nécessairement distincts. Chaque minute, et tant que c'est possible, Alice effectue une action de la forme suivante : elle choisit trois boîtes, contenant des entiers a, b et c tels que $a + b = c$, et choisit également un entier $k \geqslant 2$ arbitraire ; elle remplace alors l'entier c par l'entier $k \times c$. Si elle ne peut plus effectuer de telle action, elle s'arrête définitivement.

Démontrer que, quels que soient la situation initiale et les choix d'Alice, elle sera forcée de s'arrêter à un moment.

Exercice 4. Soit ABC un triangle isocèle en A dont tous les angles sont aigus, et soit D un point situé sur le segment $[BC]$. Soit ℓ la droite parallèle à (BC) passant par A, puis X le point de ℓ pour lequel (XD) est perpendiculaire à (BC), et Γ le cercle de centre X passant par D. Le cercle Γ coupe le segment $[AB]$ en un point E, et on note Y le point de ℓ tel que (AB) soit perpendiculaire à (EY) ; de même, Γ coupe le segment $[AC]$ en un point F, et on note Z le point de ℓ tel que (AC) soit perpendiculaire à (FZ).

Démonter que les bissectrices des angles $\widehat{EYA}$ et $\widehat{FZA}$ se coupent en un point de la droite (XD).

Énoncés Senior

Exercice 5. Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus. Soit F le pied de la hauteur de ABC issue de A, et soit P un point situé sur le segment $[AF]$. On note D le point de (BC) tel que (PD) soit parallèle à (AC), puis X le point où se recoupent le cercle circonscrit à ABD et le cercle de centre D passant par A. De même, on note E le point de (BC) tel que (PE) soit parallèle à (AB), puis Y le point où se recoupent le cercle circonscrit à ACE et le cercle de centre E passant par A.

Démontrer que les points B, C, X et Y sont cocycliques.

Exercice 6. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Morgane dispose initialement de n piles dont chacune contient une pièce. Elle s'autorise ensuite des opérations de la forme suivante : elle choisit deux piles, prélève autant de pièces de la première pile que de la deuxième, et forme une nouvelle pile avec les pièces qu'elle a prélevées.

Déterminer, en fonction de n, le plus petit nombre de piles non vides que Morgane pourra obtenir à partir de telles opérations.

Exercice 7. Trouver tous les entiers $n \geqslant 2$ pour lesquels il existe un nombre réel $r > 0$ et n nombres réels $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ tels que les $n(n-1)/2$ différences $a_j - a_i$ obtenues lorsque $1 \leqslant i < j \leqslant n$ sont égales, à l'ordre près, aux nombres $r^1, r^2, \ldots, r^{n(n-1)/2}$.