PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 22 ET DU 23 FÉVRIER 2023

DURÉE : 4H

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- Le **groupe Junior** est constitué des élèves nés en 2008 ou après.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 1 à 4.
- Le **groupe Senior** est constitué des élèves nés en 2007 ou avant.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 5 à 7.
- Le **groupe EGMO** est constitué des élèves nées en 2007 ou avant et éligibles à l'EGMO.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 8 à 10.
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées.
  Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

Énoncés Junior

Exercice 1. Trouver tous les quadruplets de réels (a, b, c, d) tels que

$$a = bc + cd,\ b = cd + da,\ c = da + ab \text{ et } d = ab + bc.$$

Exercice 2. Trouver tous les couples d'entiers naturels non nuls (k, n) pour lesquels

$$1! + 2! + \cdots + k! = 1 + 2 + \cdots + n.$$

Exercice 3. Soit ABC un triangle et Γ son cercle circonscrit. Soit A_1 le milieu de l'arc $\widehat{BC}$ ne contenant pas A ; B_1 le milieu de l'arc $\widehat{CA}$ ne contenant pas B ; C_1 le milieu de l'arc $\widehat{AB}$ ne contenant pas C. Enfin, soit A_2 le point pour lequel $AB_1A_2C_1$ est un parallélogramme ; B_2 le point pour lequel $BC_1B_2A_1$ est un parallélogramme ; C_2 le point pour lequel $CA_1C_2B_1$ est un parallélogramme.

Démontrer que les cercles circonscrits à ABC et à $A_2B_2C_2$ sont concentriques.

Exercice 4. Un jardinier et un pivert jouent au jeu suivant, dans leur jardin dont la forme est celle d'une grille 2022×2022 formée de 2022^2 cases. Deux cases sont considérées comme voisines si elles ont un sommet ou une arête en commun. Initialement, chaque case abrite un arbre de taille 0. Puis, à chaque tour de jeu,

- le jardinier choisit une case ; les arbres de cette case et des cases adjacentes (soit de quatre à neuf cases en tout) voient tous leur taille augmenter de 1 ;
- le pivert choisit alors quatre cases ; les arbres de ces cases voient tous leur taille diminuer de 1 (ou rester égale à 0 si le pivert a choisi une case avec un arbre de taille 0).

On dit qu'un arbre est *resplendissant* si sa taille vaut au moins 10^6. Trouver le plus grand entier A pour lequel le jardinier pourra s'assurer, en un nombre fini de tours de jeu, et quels que soient les choix du pivert, d'avoir fait pousser au moins A arbres resplendissants.

Énoncés Senior

Exercice 5. Soit $a_1, a_2, \ldots$ des nombres réels strictement positifs tels que

$$a_{n+1}^2 + a_n a_{n+2} \leqslant a_n + a_{n+2}$$

pour tout entier $n \geqslant 1$. Démontrer que $a_{2023} \leqslant 1$.

Exercice 6. Soit A, B, C, D quatre points situés dans cet ordre sur un cercle ω. Soit P et Q deux points situés sur la droite (AB), de sorte que les points Q, A, B, P soient alignés dans cet ordre, que le cercle circonscrit à ADQ soit tangent à la droite (AC), et que le cercle circonscrit à BCP soit tangent à la droite (BD). Soit M et N les milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[AD]$.

Démontrer que la tangente en A au cercle circonscrit à ANQ, la tangente en B au cercle circonscrit à BMP et la droite (CD) sont concourantes.

Exercice 7. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Morgane écrit au tableau, en base 10, les nombres $2023, 2023 \times 2, \ldots, 2023 \times n$. Pour tout chiffre c compris entre 1 et 9, elle note alors $\mathsf{d}_c(n)$ le nombre d'apparitions du chiffre c sur le tableau. Par exemple, si $n = 3$, elle écrit les nombres 2023, 4046 et 6069, donc $\mathsf{d}_1(3) = \mathsf{d}_5(3) = \mathsf{d}_7(3) = \mathsf{d}_8(3) = 0$, $\mathsf{d}_3(3) = \mathsf{d}_9(3) = 1$, $\mathsf{d}_2(3) = \mathsf{d}_4(3) = 2$ et $\mathsf{d}_6(3) = 3$; ces neuf nombres prennent donc exactement quatre valeurs.

Démontrer qu'il existe une infinité d'entiers $n \geqslant 1$ pour lesquels les neuf nombres $\mathsf{d}_1(n), \mathsf{d}_2(n), \ldots, \mathsf{d}_9(n)$ prennent exactement deux valeurs.

Énoncés EGMO

Exercice 8. Un jardinier et un pivert jouent au jeu suivant, dans leur jardin dont la forme est celle d'une grille 2022×2022 formée de 2022^2 cases. Deux cases sont considérées comme voisines si elles ont un sommet ou une arête en commun. Initialement, chaque case abrite un arbre de taille 0. Puis, à chaque tour de jeu,

- le jardinier choisit une case ; les arbres de cette case et des cases adjacentes (soit de quatre à neuf cases en tout) voient tous leur taille augmenter de 1 ;
- le pivert choisit alors quatre cases ; les arbres de ces cases voient tous leur taille diminuer de 1 (ou rester égale à 0 si le pivert a choisi une case avec un arbre de taille 0).

On dit qu'un arbre est *resplendissant* si sa taille vaut au moins 10^6. Trouver le plus grand entier A pour lequel le jardinier pourra s'assurer, en un nombre fini de tours de jeu, et quels que soient les choix du pivert, d'avoir fait pousser au moins A arbres resplendissants.

Exercice 9. Soit ABC un triangle, et soit E le milieu de $[BC]$. Soit m la médiatrice de $[AC]$, et soit D un point de m tel que le cercle circonscrit à ABD soit tangent à m. Enfin, soit K le point d'intersection, autre que A, entre le cercle circonscrit à ABD et la droite (AC), et soit F le milieu de $[CK]$. Démontrer que les droites (DE) et (EF) sont perpendiculaires.

Exercice 10. Soit $k \geqslant 2$ un entier. Trouver le plus petit entier $n \geqslant k+1$ pour lequel il existe un ensemble E de n réels, deux à deux distincts, dont chaque élément peut s'écrire comme la somme de k autres éléments de E, qui sont eux-mêmes deux à deux distincts.