PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 10 MAI 2023

DURÉE : 4H

Instructions

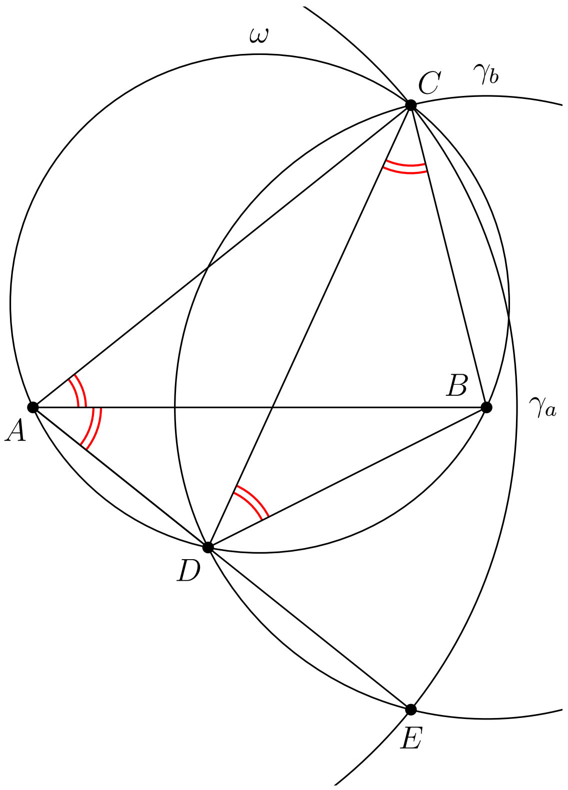
- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

Problèmes Junior

Exercice 1. Soit ABC un triangle tel que $\widehat{CAB} < \widehat{ABC} < \widehat{BCA} < 90°$. Soit ω le cercle circonscrit à ABC, γ_a le cercle de centre A et de rayon $[AC]$, et γ_b le cercle de centre B et de rayon $[BC]$. Enfin, soit D le point d'intersection, autre que C, entre ω et γ_b, et soit E le point d'intersection, autre que C, entre γ_a et γ_b.
Démontrer que les points A, D et E sont alignés.

Solution de l'exercice 1



Par construction, (CE) est l'axe radical des cercles γ_a et γ_b, donc C et E sont symétriques l'un de l'autre par rapport à (AB). En outre, on sait que $BC = BD = BE$. On dispose donc de multiples égalités d'angles et de longueurs, et la manière la plus simple d'obtenir l'alignement recherché est sans doute de procéder à une chasse aux angles.
On observe ainsi que

$$\widehat{BAE} = \widehat{CAB} = \widehat{CDB} = \widehat{BCD} = 180° - \widehat{DAB},$$

ce qui signifie bien que D, A et E sont alignés.

Commentaire des correcteurs Bien que réussi par d'assez nombreux élèves, ce problème a fait pas mal de dégâts, et ce pour plusieurs raisons. Tout d'abord, beaucoup d'élèves ont mis en œuvre des raisonnements circulaires, par exemple en supposant implicitement les points A, D et E alignés pour en déduire une égalité d'angles et l'alignement des points A, D et E. Ce souci persiste malgré les mises en garde des précédents tests. Les solutions pour éviter ce problème sont : tracer une figure (un peu) fausse pour ne pas se faire avoir, bien définir ses différents angles, justifier chaque égalité écrite...
Le second problème concerne aussi des élèves ayant résolu le problème : on déplore une rédaction inefficace, dans laquelle les élèves introduisent beaucoup de points et s'étendent

parfois sur plusieurs pages pour montrer des égalités qui découlent soit de la symétrie de C et E soit du théorème de l'angle inscrit. On conseille de bien lire le corrigé pour comprendre comment procéder de façon directe. Reconnaître un pôle Sud ici pouvait également permettre de gagner du temps et de la clarté dans la rédaction.

Enfin, beaucoup d'élèves ont essayé de montrer que $\widehat{ADE} = 180°$. Très peu ont tenté de montrer plutôt que $\widehat{BAE} = \widehat{BAD}$ pour assurer l'alignement, ce qui était le plus simple ici. Essayez toutes les possibilités, et pas seulement la méthode naïve.

Exercice 2. Anna et Baptiste joue au jeu suivant. Au début du jeu sont placées devant eux 2022 cases blanches, numérotées de 1 à 2022. Puis, chacun son tour, en commençant par Anna, ils choisissent une case blanche et la colorient de la couleur de leur choix : soit en rouge, soit en bleu. La partie s'arrête au bout de 2022 tours de jeu, c'est-à-dire au moment où la dernière case blanche est coloriée.

Le score d'Anna est alors égal au nombre d'entiers $a \leqslant 2019$ tels que les deux cases de numéros a et $a+3$ sont de la même couleur. Anna souhaite avoir le score le plus élevé possible; Baptiste souhaite que le score d'Anna soit le plus faible possible. Quel est le score maximal qu'Anna peut s'assurer d'obtenir quels que soient les coups que Baptiste choisira de jouer?

Solution de l'exercice 2 Pour plus de simplicité, on dira que deux entiers a et b sont *amis* si $a = b \pm 3$. On dira que a est *joli* si $a = b-3$ et si a et b sont coloriés de la même couleur, et que a est *laid* si $a = b-3$ et si a et b s'ils sont coloriés de couleurs différentes : Anna souhaite donc maximiser le nombre d'entiers jolis à la fin de la partie. Si a ou b n'est pas encore colorié, a n'est ni joli, ni laid.

En outre, pour chacun des entiers $k = 0$, 1 et 2, nous noterons $\mathcal{E}_k$ l'ensemble des entiers n tels que $1 \leqslant n \leqslant 2022$ et $n \equiv k \pmod 3$. On dit qu'un ensemble $\mathcal{E}_k$ est *entamé* dès lors qu'au moins une case dont le numéro est dans $\mathcal{E}_k$ a été coloriée.

Nous allons tout d'abord démontrer qu'Anna peut s'assurer de gagner au moins 1008 points. Pour ce faire, la stratégie qu'adopte Anna est la suivante.

1. S'il existe un entier a qui n'est pas encore colorié, et dont un ami, disons b, est colorié, alors Anna choisit un tel entier a et le colorie de la même couleur que b; si plusieurs entiers a et/ou b étaient disponibles, n'importe lesquels de ces entiers a et b feront l'affaire.
2. Si, au contraire, aucun tel entier a n'existe, Anna colorie au hasard une case blanche.

Dans le cas 1, l'entier $\min\{a, b\}$ devient joli, ce qui augmente le score d'Anna d'au moins 1. Dans le cas 2, si un ensemble $\mathcal{E}_k$ était déjà entamé au moment où Anna s'apprête à jouer, c'est que tous ses éléments étaient déjà coloriés; par conséquent, avec son coup, Anna entame un nouvel ensemble $\mathcal{E}_k$.

En particulier, le cas 2 survient au plus 3 fois dans la partie, et comme Anna joue 1011 coups, le cas 1 survient au moins 1008 fois dans la partie. Comme prévu, Anna s'assure donc un score final d'au moins 1008 points.

Réciproquement, nous allons maintenant démontrer que Baptiste peut empêcher Anna de gagner strictement plus de 1008 points, et ce quels que soient les coups qu'elle décidera de jouer. Pour ce faire, la stratégie qu'adopte Baptiste est la suivante.

1. S'il existe un entier a qui n'est pas encore colorié, et dont un ami, disons b, est colorié, alors Baptiste choisit un tel entier a et le colorie de la couleur opposée à celle b; si plusieurs entiers a et/ou b étaient disponibles, n'importe lesquels de ces entiers a et b feront l'affaire.
2. Si, au contraire, aucun tel entier a n'existe, Baptiste colorie au hasard une case blanche.

Dans le cas 1, l'entier $\min\{a, b\}$ devient laid. Dans le cas 2, tout ensemble $\mathcal{E}_k$ déjà entamé au moment où Baptiste s'apprête à jouer était déjà colorié; si n ensembles étaient entamés à ce moment-là, cela signifie que $2022n/3 = 674n$ coups avaient déjà été joués, et donc que c'était en fait à Anna de jouer.

Par conséquent, le cas 2 ne survient jamais, et comme Baptiste joue 1011 coups, il y a au moins 1011 entiers laids à la fin de la partie. Par ailleurs, les trois entiers 2020, 2021 et 2022 ne seront ni jolis, ni laids. Parmi nos 2022 entiers, il y en a donc au moins $1011 + 3$ qui ne seront jamais jolis, et le score d'Anna ne pourra ainsi jamais dépasser $2022 - (1011 + 3) = 1008$.

Commentaire des correcteurs Ce problème a été résolu de manière inégale, les élèves se départageant en deux catégories principales : d'une part ceux, assez nombreux, qui ont réussi le problème ; d'autre part ceux, tout aussi nombreux, qui, bien qu'ayant une intuition raisonnable de ce qui pouvait se passer, n'ont pas réussi à définir correctement des stratégies pour Anna et Baptiste.

Les élèves de cette deuxième catégorie ont simplement raconté comment, coup après coup, Anna et Baptiste étaient selon eux censés jouer s'ils voulaient jouer de façon optimale. Cependant, cela ne pouvait en aucun cas constituer une preuve : de manière générale, quand on donne une stratégie pour un joueur, il faut donc indiquer quels coups ce joueur doit jouer y compris si son adversaire joue de manière apparemment anarchique. Accessoirement, s'y prendre ainsi permet en général d'avoir des preuve beaucoup plus simples.

En outre, la description que ces élèves donnaient était à peu près systématiquement fausse, car Baptiste n'est pas obligé de contrer directement Anna pour l'empêcher d'avoir plus de 1008 points. Par exemple, si Anna colorie l'entier 1 en rouge, une stratégie pertinente pour Baptiste peut consister à colorier l'entier 7 en bleu.

Il est donc dommage que de nombreux élèves finissent par n'obtenir que très peu de points alors qu'ils pensaient avoir résolu le problème. Pour ces élèves, il sera très important de retenir la manière adéquate de définir une stratégie pour un joueur, manière décrite ci-dessus.

Exercice 3. Trouver tous les entiers $n \geqslant 1$ pour lesquels il existe un multiple de 222 dont la somme des carrés des chiffres est égale à n.

Solution de l'exercice 3 Pour tout entier k, on note $\mathsf{S}_2(k)$ la somme des carrés des chiffres de k. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des entiers n recherchés, c'est-à-dire

$$\mathcal{E} = \{\mathsf{S}_2(222k) \colon k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}\}.$$

On remarque tout d'abord que $\mathcal{E}$ est stable par somme. En effet, si n et m sont deux éléments de $\mathcal{E}$, et si k et ℓ sont deux multiples de 222 tels que $\mathsf{S}_2(k) = n$ et $\mathsf{S}_2(\ell) = m$, soit $p \geqslant 0$ un entier tel que $10^p > k$. L'entier $k + 10^p\ell$ est un multiple de 222, et s'écrit en juxtaposant les représentations décimales de ℓ et de k, étant entendu que l'on aura fait tenir cette dernière sur p chiffres. Ainsi,

$$\mathsf{S}_2(k + 10^p\ell) = \mathsf{S}_2(\ell) + \mathsf{S}_2(k) = m + n$$

appartient bien à $\mathcal{E}$.

On entreprend désormais de trouver de petits éléments de $\mathcal{E}$. Par exemple, $\mathcal{E}$ contient les entiers $\mathsf{S}_2(222) = 12$, $\mathsf{S}_2(444) = 48$, $\mathsf{S}_2(666) = 108$, $\mathsf{S}_2(888) = 196$ et $\mathsf{S}_2(1110) = 3$. En particulier, puisque $\mathcal{E}$ contient 3 et est stable par somme, il contient aussi tous les multiples de 3.

On cherche ensuite à construire de petits éléments de $\mathcal{E}$ autres que des multiples de 3 ; cela nécessite de faire autre chose que de juxtaposer des représentations décimales de multiples de 222. Par exemple, $\mathcal{E}$ contient également les entiers $\mathsf{S}_2(111000 + 1110) = \mathsf{S}_2(112110) = 8$ et $\mathsf{S}_2(11100 + 1110) = \mathsf{S}_2(12210) = 10$. Il contient donc également tous les entiers $n \geqslant 8$ tels que $n \equiv 8 \pmod 3$, et tous les entiers $n \geqslant 10$ tels que $n \equiv 10 \pmod 3$.

On vient donc de démontrer que $\mathcal{E}$ contient les entiers 3, 6, puis tous les entiers $n \geqslant 8$. Il reste à vérifier s'il existe un entier k qui est un multiple de 222 et pour lequel l'entier $n = \mathsf{S}_2(k)$ est un élément de l'ensemble $\mathcal{F} = \{1, 2, 4, 5, 7\}$. Soit $a_1, a_2, \ldots, a_\ell$ les chiffres non nuls de k : on sait d'une part que $n = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_\ell^2$, et d'autre part que $a_1 + a_2 + \cdots + a_\ell \equiv k \equiv 0 \pmod 3$. Par conséquent :

- ▷ Si tous les chiffres a_i valent 1, on sait que $n \equiv \ell \equiv 0 \pmod 3$, ce qui contredit le fait que $n \in \mathcal{F}$.
- ▷ Si exactement un chiffre a_i vaut 2 et tous les autres valent 1, on sait que $n \geqslant 4$ et que $n \equiv \ell + 3 \equiv k + 2 \equiv 2 \pmod 3$, de sorte que $n = 5$.
- ▷ Si au moins deux chiffres a_i valent 2, ou si au moins un chiffre a_i est supérieur ou égal à 3, on sait que $n \geqslant 8$, ce qui contredit là encore le fait que $n \in \mathcal{F}$.

Le seul cas à traiter est donc celui où les deux seuls chiffres non nuls de k sont $a_1 = 1$ et $a_2 = 2$; dans ces conditions, on aura $n = 5$. On recherche donc un éventuel multiple de 222 de la forme $k = 10^u + 2 \times 10^v$, où u et v sont des entiers distincts. Comme $222 = 2 \times 3 \times 37$, il s'agit de faire en sorte que $u \geqslant 1$ et que $10^u \equiv -2 \times 10^v \pmod{37}$. Or, puisque 37 divise 222 donc divise 1110, il divise aussi 111 et 999. Cela signifie que $10^3 \equiv 1 \pmod{37}$, donc que les puissances de 10 modulo 37 sont 1, 10 et 100. En particulier, $10^u \in \{1, 10, 26\} \pmod{37}$, tandis que $-2 \times 10^v \in \{17, 22, 35\} \pmod{37}$. Il est donc impossible de faire en sorte que $10^u \equiv -2 \times 10^v \equiv 0 \pmod{37}$, ce qui nous assure que $5 \notin \mathcal{E}$.

En conclusion, les entiers n recherchés sont $n = 3$, $n = 6$, et tous les entiers $n \geqslant 8$.

Commentaire des correcteurs Le problème a été peu réussi, mais beaucoup d'élèves ont réussi à donner des éléments intéressants pour avancer. Voici quelques remarques importantes :

- ▷ Certains élèves ont montré que l'ensemble des n vérifiant l'énoncé était infini. C'est un bon début, mais cela ne suffit pas à trouver tous les n qui vérifient l'énoncé. Plusieurs élèves ont affirmé que, comme cet ensemble était infini, il était impossible de décrire les n vérifiant l'énoncé ; c'est faux : on peut décrire des ensembles infinis de nombre entiers. Par exemple, la solution aurait pu être les nombres multiples de 3, ou les nombres premiers.

- Certains élève ont affirmé sans preuve que, comme il y avait une infinité de multiples de 222, il y avait une infinité de n vérifiant l'énoncé. Ce n'est pas du tout clair : par exemple, il y a une infinité de multiples de 222 dont la somme des carrés des chiffres vaut 3. Il n'est donc pas évident du tout que la somme des carrés des chiffres des multiples de 222 puisse devenir de plus en plus grande.
- Certains élèves n'ont pas du tout cherché quels n ne vérifient pas l'énoncé. Essayer de voir pourquoi 1 et 2 ne vérifient pas l'énoncé était une bonne idée de départ.
- Certains ont vu qu'on pouvait obtenir tous les multiples de nombres vérifiant l'énoncé. Il est dommage de ne pas avoir compris que ça marchait aussi pour la somme de deux nombres vérifiant l'énoncé : cette idée était plus générale et donc permettait plus facilement de conclure.

Exercice 4. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Bosphore a écrit n fois le nombre 2 au tableau. Il effectue ensuite, $n-1$ fois d'affilée, l'opération suivante : il choisit deux nombres écrits au tableau, qu'il appelle a et b, puis les efface et écrit le nombre $\sqrt{(ab+1)/2}$ à la place. Enfin, il appelle x le nombre écrit au tableau après ces $n-1$ opérations, et y le nombre $\sqrt{(n+3)/n}$.

a) Démontrer que $x \geqslant y$.

b) Démontrer qu'il existe une infinité d'entiers $n \geqslant 1$ pour lesquels on a nécessairement $x > y$.

c) Démontrer qu'il existe une infinité d'entiers $n \geqslant 1$ pour lesquels Bosphore peut faire en sorte que $x = y$.

Solution de l'exercice 4 Dans la suite, notons x_n le plus petit réel x auquel peut aboutir Bosphore en partant de n entiers égaux à 2, et posons $y_n = \sqrt{(n+3)/n}$. Il s'agit de démontrer que $x_n \geqslant y_n$, avec égalité une infinité de fois et inégalité stricte une infinité de fois. Une étude des petits cas suggère la propriété $\mathcal{P}(n)$ suivante : « l'inégalité $x_n \geqslant y_n$ est bien vraie, et $x_n = y_n$ si et seulement n est une puissance de 2 ».

Réciproquement, soit u et v les deux derniers nombres qu'il efface, juste avant d'écrire x au tableau. Si Bosphore a pour objectif d'aboutir à l'inégalité $x \leqslant y$, il a intérêt à ce que u et v soient aussi petits que possible. Par conséquent, s'il y a k nombres qui, à force de réécritures, ont été transformés en le nombre u, et ℓ nombres qui ont été transformés en le nombre v, Bosphore fera en sorte que $u = x_k$ et $v = x_\ell$. Cela signifie en fait que x_n est le plus petit des nombres

$$\sqrt{\frac{x_1 x_{n-1}+1}{2}}, \sqrt{\frac{x_2 x_{n-2}+1}{2}}, \ldots, \sqrt{\frac{x_{n-1} x_1+1}{2}}.$$

On entreprend donc de démontrer $\mathcal{P}(n)$ par récurrence sur $n \geqslant 1$. Tout d'abord, $x_1 = 2 = y_1$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie. Puis, si $\mathcal{P}(1), \ldots, \mathcal{P}(n-1)$ sont vraies, et pour tous entiers k et ℓ tels que $1 \leqslant k \leqslant n-1$ et $1 \leqslant \ell \leqslant n-1$, on sait que

$$\sqrt{\frac{x_k x_\ell + 1}{2}} \geqslant y_{k+\ell} \Leftrightarrow x_k x_\ell \geqslant 2y_{k+\ell}^2 - 1.$$

Puisque $x_k \geqslant y_k$ et $x_\ell \geqslant y_\ell$, il suffit donc de démontrer que $y_k y_\ell \geqslant 2y_{k+\ell}^2 - 1$.
Si l'on pose $\Delta = y_k^2 y_\ell^2 - (2y_{k+\ell}^2 - 1)^2$, on vérifie alors que

$$\begin{aligned} k\ell(k+\ell)^2\Delta &= (k+3)(\ell+3)(k+\ell)^2 - k\ell(k+\ell+6)^2 \\ &= 3(k+\ell+3)(k+\ell)^2 - 12k\ell(k+\ell+3) \\ &= 3(k+\ell+3)(k^2+2k\ell+\ell^2-4k\ell) \\ &= 3(k+\ell+3)(k-\ell)^2. \end{aligned}$$

Ceci nous assure que $\Delta \geqslant 0$, donc que $x_k x_\ell \geqslant y_k y_\ell \geqslant 2y_{k+\ell}^2 - 1$. En outre, les cas d'égalité surviennent exactement lorsque $x_k = y_k$, $x_\ell = y_\ell$ et $\Delta = 0$, c'est-à-dire lorsque $k = \ell$ est une puissance de 2. En particulier, l'inégalité

$$\sqrt{\frac{x_k x_\ell + 1}{2}} \geqslant y_{k+\ell}$$

est nécessairement vérifiée, et il s'agit d'une égalité si et seulement si $k = \ell$ est une puissance de 2.

En conclusion :

a) Quelle que soit la valeur de n, il existe deux entiers k et $\ell = n - k$ pour lesquels $x_n = \sqrt{(x_k x_\ell + 1)/2} \geqslant \sqrt{(y_k y_\ell + 1)/2} \geqslant y_{k+\ell} = y_n$.

b) Si n n'est pas une puissance de 2, k et ℓ ne sont pas égaux à une même puissance de 2, donc l'une des trois inégalités $x_k \geqslant y_k$, $x_\ell \geqslant y_\ell$ et $\sqrt{(y_k y_\ell + 1)/2} \geqslant y_n$ est stricte, et $x_n > y_n$.

c) Si n est une puissance de 2, l'inégalité $x_n \leqslant \sqrt{(x_{n/2}^2 + 1)/2} = \sqrt{(y_{n/2}^2 + 1)/2} = y_n$ indique que $x_n = y_n$.

<u>*Commentaire des correcteurs*</u> Le problème a été peu abordé. Quelques élèves se sont directement forgés une intuition du résultat pour la question c) en constatant que l'on avait égalité lorsque n est puissance de 2. Toutefois, seul un élève a vraiment réussi à comprendre les enjeux du problème et le résoudre.

Ici, il était naturel de faire une récurrence et de regarder comment avait été obtenus les deux derniers nombres. Certains élèves ont supposé qu'à chaque fois on prenait le résultat du test précédent, et qu'on faisait l'opération avec un des 2 écrits au départ : ce n'est pas du tout la seule possibilité.

Problèmes Senior

Exercice 5. Une suite *olympique* est une suite $s_1, s_2, \ldots, s_{2023}$ dont chacun des 2023 termes est égal à 1 ou à -1. Une suite *peu croissante* est une suite d'entiers $t_1, t_2, \ldots, t_n$ telle que $1 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leqslant 2023$, et dont chacune des $n-1$ différences $t_{i+1} - t_i$ vaut 1 ou 2.

Trouver le plus grand entier C tel que, pour toute suite olympique $s_1, s_2, \ldots, s_{2023}$, il existe un entier $n \geqslant 1$ et une suite peu croissante $t_1, t_2, \ldots, t_n$ de longueur n tels que

$$|s_{t_1} + s_{t_2} + \cdots + s_{t_n}| \geqslant C.$$

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> Une étude des petits cas nous pousse à nous intéresser à la suite (s_i) dont les termes valent $+1, +1, -1, -1, +1, +1, -1, -1, \ldots$, et qui semble être un « pire » cas. On la subdivise en 1011 *blocs* de longueur 2, notés $B_1, B_2, \ldots, B_{1011}$, et un bloc B_{1012} de longueur 1 : la suite vaut $(-1)^{i+1}$ sur chaque bloc B_i.

On considère maintenant une somme de la forme $s_{t_1} + s_{t_2} + \cdots + s_{t_n}$. Ses termes s_{t_i} ont été choisis parmi des blocs consécutifs $B_u, B_{u+1}, \ldots, B_{u+v-1}$. Au plus $(v+1)/2$ de ces 1 blocs contiennent des termes $+1$; les autres contiennent des termes -1. Parmi les nombres $s_{t_1}, s_{t_2}, \ldots, s_{t_n}$, il y en a donc au plus $v+1$ qui valent $+1$ et au moins $(v-1)/2$ qui valent -1. Puisque $v \leqslant 1012$, on en déduit que $s_{t_1} + s_{t_2} + \cdots + s_{t_n} \leqslant (v+1) - (v-1)/2 = (v+3)/2 < 508$. On montre de même que $s_{t_1} + s_{t_2} + \cdots + s_{t_n} > -508$, de sorte que $C \leqslant 507$.

Réciproquement, soit (s_i) une suite olympique quelconque. Quitte à remplacer chaque terme par son opposé, on suppose que (s_i) compte au moins 1012 termes égaux à $+1$. Comme précédemment, on subdivise cette suite en blocs maximaux sur lesquels (s_i) est constante ; ces blocs sont notés $B_1, B_2, \ldots, B_k$, et leurs longueurs sont notés $b_1, b_2, \ldots, b_k$. Quitte à supposer que B_1 est vide, on suppose que $s_j = (-1)^i$ lorsque j appartient à un bloc B_i. Ainsi, $b_2 + b_4 + b_6 + \cdots \geqslant 1012$ et $1011 \geqslant b_1 + b_3 + b_5 + \cdots$

On choisit ensuite (t_i) comme la suite peu croissante qui prend toutes les valeurs j appartenant à un bloc $B_2, B_4, B_6, \ldots$ ou bien situées en position paire d'un bloc $B_1, B_3, B_5, \ldots$ De la sorte, parmi les nombres $s_{t_1}, s_{t_2}, \ldots$, il y en a $b_2 + b_4 + b_6 + \cdots$ qui valent $+1$; chacun des $\lfloor b_1/2 \rfloor + \lfloor b_3/2 \rfloor + \lfloor b_5/2 \rfloor + \cdots$ autres termes vaut -1. On en conclut que

$$\begin{aligned} s_{t_1} + s_{t_2} + \cdots &= (b_2 + b_4 + b_6 + \cdots) - (\lfloor b_1/2 \rfloor + \lfloor b_3/2 \rfloor + \lfloor b_5/2 \rfloor + \cdots) \\ &\geqslant (b_2 + b_4 + b_6 + \cdots) - (b_1 + b_3 + b_5 + \cdots)/2 \\ &\geqslant 1012 - 1011/2 > 506, \end{aligned}$$

de sorte que $s_{t_1} + s_{t_2} + \cdots \geqslant 507$.

En conclusion, l'entier C recherché vaut $C = 507$.

<u>*Commentaire des correcteurs*</u> Ce problème a été très bien réussi dans l'ensemble. Cependant, de nombreux élèves sont allés trop vite en besogne, négligeant de démontrer rigoureusement pourquoi, dans le cas d'une suite $1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, \ldots$, il était impossible d'avoir de somme supérieure à 507 (en valeur absolue). De manière générale, toute utilisation d'un vocable tel que « on voit bien que » suggère immédiatement au correcteur que, au contraire de ce que l'élève affirme, « il ne voit pas du tout comment démontrer que ».

Par ailleurs, de nombreux élèves sont allés trop vite en besogne dans leur gestion des cas de bords, proposant ainsi des réponses égales à 506 ou à 508 plutôt que 507. Il est dommage de perdre ainsi un point alors que l'on a essentiellement fini le problème.

Exercice 6. Soit $a \geqslant 2$ et $d \geqslant 2$ deux entiers premiers entre eux. On pose $x_1 = 1$; puis, pour tout entier $k \geqslant 1$, on pose $x_{k+1} = x_k/a$ si a divise x_k, et $x_{k+1} = x_k + d$ sinon.

Trouver, en fonction de a et de d, l'entier ℓ maximal pour lequel a^ℓ divise l'un des termes $x_1, x_2, x_3, \ldots$

<u>Solution de l'exercice 6</u> Pour tout entier $n \geqslant 1$, soit $f(n)$ le plus petit entier tel que $af(n) \geqslant n$ et $af(n) \equiv n \pmod d$, et soit $\delta(n) = (af(n) - n)/d$. Par construction, si l'on dispose d'un terme $x_k = n$ de la suite, les termes suivants de la suite seront $x_{k+1} = n + d, x_{k+2} = n + 2d, \ldots, x_{k+\delta(n)} = n + \delta(n)d = af(n)$, puis $x_{k+\delta(n)+1} = f(n)$.

En outre, aucun des termes $x_{k+1}, \ldots, x_{k+\delta(n)-1}$ n'est divisible par a, mais $x_{k+\delta(n)} = af(n)$ l'est. Par conséquent, si l'on pose $y_0 = 1$ puis $y_{k+1} = f(y_k)$ pour tout $k \geqslant 0$, il s'agit de trouver l'entier ℓ maximal pour lequel $a^{\ell-1}$ divise l'un des termes $y_1, y_2, y_3, \ldots$

Or, par construction, on sait que $\delta(n) \leqslant a - 1$. Par conséquent, si $n \leqslant d$, on sait également que $f(n) \leqslant (n + (a-1)d)/a \leqslant d$. Une récurrence immédiate démontre donc que $1 \leqslant y_k \leqslant d$ pour tout entier $k \geqslant 0$.

Enfin, on remarque que $f(n) \equiv n/a \pmod d$, ce qui signifie, pour tout entier $k \geqslant 0$, que y_k est l'unique entier compris entre 1 et d et tel que $y_k \equiv a^{-k} \pmod d$. En particulier, si l'on note ω l'ordre multiplicatif de a modulo d, et si l'on pose $\kappa = \lfloor \log_a(d) \rfloor$, on sait que $y_{\omega-\kappa} = a^\kappa$. Réciproquement, puisque $a^{\kappa+1} > d$, nul terme y_k n'est divisible par $a^{\kappa+1}$.

On en conclut que $\ell = \kappa + 1$, c'est-à-dire que ℓ est l'unique entier pour lequel $d < a^\ell < ad$.

<u>Commentaire des correcteurs</u> L'exercice est plutôt bien réussi. Pour résoudre un tel exercice, la première chose à faire est de multiplier les tests pour des valeurs de a et d, pour intuiter la bonne valeur. Ici, on pouvait observer que la suite était bornée : trouver une borne explicite, que ce soit $a \times d$ ou $a^{\ell+1}$, et le prouver par récurrence, en montrant par exemple que l'inégalité était vraie à chaque fois qu'on divise par a. Ensuite, dès qu'on a une telle borne, il faut l'exploiter : quelle inégalité permet-elle de prouver sur le plus grand k tel que a^k divise un terme de la suite ?

Une fois cela fait, beaucoup ont essayé de montrer que la suite était périodique. En effet, celle-ci prend un nombre fini de valeurs, donc elle prend au moins deux fois la même valeur. Attention néanmoins, cela n'implique pas la périodicité : la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, où $f(x) = 2x(2-x)$ vérifie $u_0 = 0$ puis $u_1 = 2, u_2 = 2, u_3 = 1, \ldots$ Elle est *ultimement périodique* de période 2 mais n'est pas périodique, car un seul de ses termes vaut 0. À partir du fait que x_{n+1} est défini uniquement en fonction de x_n et du fait que la suite (x_n) ne prend qu'un nombre fini de valeurs, on peut uniquement déduire qu'elle est ultimement périodique. Pour montrer qu'elle était périodique, il fallait prouver que si $x_k = x_j$ avec $k, j \geq 1$, alors $x_{k-1} = x_{j-1}$. Une fois la périodicité marquée, il suffisait de regarder un terme différent de x_n valant 1, et de remonter les étapes pour trouver une puissance valant $a^{\ell+1}$.

Exercice 7. **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**