PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 5 AVRIL 2023

DURÉE : 4H

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées.
  Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

Énoncés Junior

Exercice 1. Soit $n \geqslant 2$ un entier. Anna a écrit au tableau n entiers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ deux à deux distincts. Elle remarque alors que, quelle que soit la manière de sélectionner $n-1$ de ces entiers, leur somme est divisible par n.

Démontrer que la somme de l'ensemble des n entiers est divisible par n.

Solution de l'exercice 1 Soit s la somme de tous les entiers. Sélectionner $n-1$ entiers revient à choisir l'entier, disons a_i, que l'on n'a pas sélectionné. La somme de nos $n-1$ entiers est alors égale à $s - a_i$. Ainsi, Anna a simplement remarqué que $a_i \equiv s \pmod{n}$.

Ceci étant valable pour tout i, on en déduit que $a_1 \equiv a_2 \equiv \ldots \equiv a_n \equiv s \pmod{n}$. On en conclut que $s \equiv a_1 + a_2 + \cdots + a_n \equiv ns \equiv 0 \pmod{n}$.

Commentaire des correcteurs Le problème a été très réussi dans l'ensemble, mais un quart des élèves a écrit, à tort, que « si a ne divise ni b ni c, alors a ne divise pas bc. » Ce genre de résultats n'est valide que si a est premier avec b ou c, et tout élève qui l'énonçait dans un cadre général (donc faux) a vu sa note fortement chuter. Il est dommage de réussir à avoir des idées pertinentes sur un exercice qui requiert de l'imagination, pour ensuite se fourvoyer de la sorte.

Exercice 2. Soit a, b et c trois réels strictement positifs. Démontrer que

$$4(a^3+b^3+c^3+3) \geqslant 3(a+1)(b+1)(c+1).$$

Solution de l'exercice 2 Dans cette inégalité, les termes en a, b et c sont additionnés les uns aux autres (et de degré 3) dans le membre de gauche, tandis qu'ils sont multipliés les uns aux autres (et chacun de degré 1) dans le membre de droite. Une première idée est donc d'utiliser l'inégalité arithmético-géométrique pour se retrouver, de part et d'autre de l'inégalité, avec deux produits de termes de degré 1, ou bien deux sommes de termes de degré 3 faisant chacun intervenir une seule des variables a, b ou c.

Ainsi, on constate que

$$(a+1)(b+1)(c+1) = \sqrt[3]{(a+1)^3(b+1)^3(c+1)^3} \leqslant \frac{(a+1)^3+(b+1)^3+(c+1)^3}{3}.$$

En outre, cette inégalité a le bon goût d'être une égalité lorsque $a=b=c=1$, qui est également un cas d'égalité pour l'inégalité de l'énoncé. On espère donc très fort que l'inégalité

$$4(a^3+b^3+c^3+3) \geqslant (a+1)^3+(b+1)^3+(c+1)^3$$

est valide, et on va tenter de la démontrer.

On continue donc nos pérégrinations et, puisque l'on a fait tous ces efforts pour séparer les termes en les variables a, b et c, on constate qu'il suffit désormais de démontrer que

$$4(a^3+1) \geqslant (a+1)^3.$$

Il s'agit là d'une inégalité en une seule variable, dont $a=1$ est un cas d'égalité, et qui aura le bon goût d'être démontrée (ou invalidée pour certaines valeurs de a) sans trop d'efforts.

En effet, si on développe chaque terme et qu'on les insère tous dans le membre de gauche, l'inégalité se réécrit comme

$$3a^3-3a^2-3a+3 \geqslant 0.$$

Puisque l'on sait qu'il y a égalité lorsque $a=0$, et au vu de la symétrie manifeste entre les termes de petit degré et ceux de grand degré, on factorise le membre de gauche comme

$$3a^3-3a^2-3a+3 = 3(a-1)(a^2-1) = 3(a-1)^2(a+1),$$

ce qui est manifestement positif ou nul, et nous permet de conclure que l'inégalité de l'énoncé est effectivement valide.

Commentaire des correcteurs Le problème a été abordé de manière assez inégale. Une moitié des élèves a pensé à l'inégalité arithmético-géométrique, mais plusieurs élèves n'ont pas réussi à conclure à partir de là ; il est dommage que ces élèves ne se soient pas rendus compte que, comme a, b et c n'apparaissent dans aucun terme de la somme, il suffisait de prouver l'inégalité sans b ni c, surtout que certains ont l'air de penser avoir conclu en factorisant partiellement.

Exercice 3. Alice a disposé 200 boîtes dans son salon. Chaque boîte contient un papier sur lequel elle a écrit un entier naturel non nul ; les 200 entiers ne sont pas nécessairement distincts. Chaque minute, et tant que c'est possible, Alice effectue une action de la forme suivante : elle choisit trois boîtes, contenant des entiers a, b et c tels que $a + b = c$, et choisit également un entier $k \geqslant 2$ arbitraire ; elle remplace alors l'entier c par l'entier $k \times c$. Si elle ne peut plus effectuer de telle action, elle s'arrête définitivement.

Démontrer que, quels que soient la situation initiale et les choix d'Alice, elle sera forcée de s'arrêter à un moment.

Solution de l'exercice 3 Ci-dessous, on dira qu'un entier c *change* si Alice remplace c par un entier $k \times c$. Elle peint en bleu les entiers qui ne changent qu'un nombre fini de fois, et en rouge ceux qui changent un nombre infini de fois. Par construction, le nombre initialement minimal ne pourra jamais changer, donc il est bleu. On suppose alors abusivement qu'il existe un nombre rouge.

À partir d'un certain temps, Alice cesse complètement de changer les nombres bleus. Soit v la valeur du plus grand d'entre eux à ce moment-là. Quand un nombre rouge change, sa valeur augmente d'au moins un. Il y a donc un moment à partir duquel chaque nombre rouge vaut au moins $2v + 1$, par exemple quand chaque nombre rouge a changé au moins $2v$ fois.

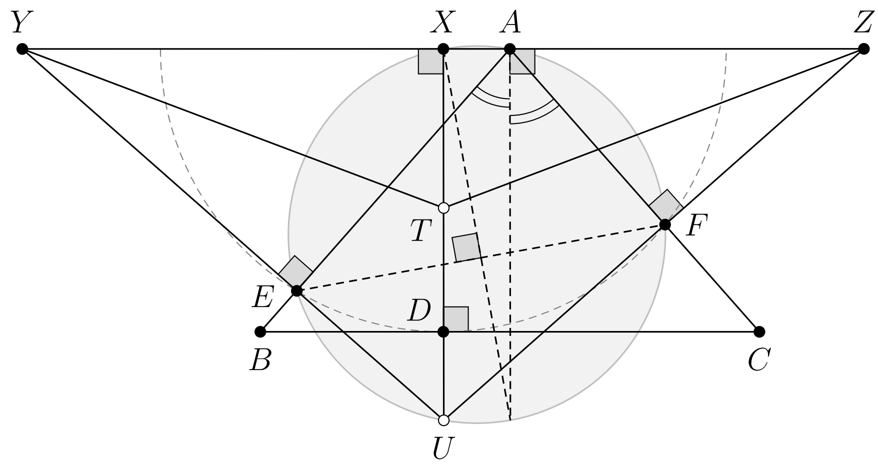
À ce moment-là, le plus petit nombre rouge est inférieur ou égal à tous les autres nombres rouges, et il est strictement supérieur à la somme de deux nombres bleus quelconques. Il ne pourra donc plus jamais changer de valeur, et il aurait dû être bleu. Ce constat invalide notre supposition, ce qui signifie que tout nombre est bleu et conclut le problème.

Commentaire des correcteurs Le problème comportait une erreur d'énoncé. Il était donc difficile de faire des observations pertinentes dessus.

Exercice 4. Soit ABC un triangle isocèle en A dont tous les angles sont aigus, et soit D un point situé sur le segment $[BC]$. Soit ℓ la droite parallèle à (BC) passant par A, puis X le point de ℓ pour lequel (XD) est perpendiculaire à (BC), et Γ le cercle de centre X passant par D. Le cercle Γ coupe le segment $[AB]$ en un point E, et on note Y le point de ℓ tel que (AB) soit perpendiculaire à (EY) ; de même, Γ coupe le segment $[AC]$ en un point F, et on note Z le point de ℓ tel que (AC) soit perpendiculaire à (FZ).

Démonter que les bissectrices des angles $\widehat{EYA}$ et $\widehat{FZA}$ se coupent en un point de la droite (XD).

Solution de l'exercice 4



Notons T le point d'intersection des bissectrices de $\widehat{EYA}$ et $\widehat{FZA}$, U le point d'intersection des droites (EY) et (FZ), et $\mathcal{C}$ le cercle de rayon $[AU]$. Puisque les angles $\widehat{UEA}$ et $\widehat{AFU}$ sont droits, E et F appartiennent à $\mathcal{C}$.

Par ailleurs, puisque ABC est isocèle en A, la bissectrice des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{EAF}$ est aussi la hauteur de ABC issue de A. Elle est donc perpendiculaire aux droites (BC) et $\ell = (AX)$. Comme $DX = EX = FX$, le point X est donc le point d'intersection de la bissectrice extérieure de $\widehat{EAF}$ avec la médiatrice de $[EF]$, c'est-à-dire le pôle Nord de AEF issu de A. Cela signifie en particulier que X appartient au cercle circonscrit à AEF, c'est-à-dire à $\mathcal{C}$.

Dans ces conditions, l'angle $\widehat{UXA}$ est droit, donc les triangles UXY et UXZ sont rectangles en U. Or, puisque les triangles AFZ et AEY sont rectangles en E et F et que ABC est isocèle en A, on sait que

$$\widehat{XZU} = \widehat{AZF} = 90° - \widehat{FAZ} = 90° - \widehat{ACB} = 90° - \widehat{CBA} = 90° - \widehat{YAE} = \widehat{EYA} = \widehat{YUX}.$$

Ainsi, les deux triangles rectangles UXY et UXZ sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la droite (UX). Les deux bissectrices (TY) et (TZ) se retrouvent elles aussi symétriques l'une de l'autre par rapport à (UX), donc T appartient à (UX).

Enfin, par construction, la droite (DX) est perpendiculaire aux droites (BC) et ℓ, donc elle est confondue avec (UX). On en conclut donc, comme demandé dans l'énoncé, qu'elle contient le point T.

Remarque : Lors de la recherche d'une solution, on pourra bien sûr trouver plus naturel de procéder à rebours de la solution présentée ci-dessus, par exemple en procédant comme suit :

1. On remarque que les deux triangles TXY et TXZ semblent symétriques, et qu'on aura gagné s'ils le sont.

2. On démontre que $\widehat{XZT} = \widehat{TYX}$, de sorte qu'il suffit de démontrer que $XY = XZ$.
3. On remarque que le problème serait analogue si on remplaçait nos bissectrices par les deux droites (YE) et (ZF), ce qui nous pousse à introduire le point U et à chercher à démontrer que (XU) est perpendiculaire à ℓ.
4. On repère alors deux angles droits joignant A à U, et un troisième dont on espère justement qu'il est droit.
5. L'existence de ces angles droits se caractérisant par l'appartenance à un cercle de rayon $[AU]$, il s'agit de démontrer que E, X, A et F sont cocycliques.
6. Pour démontrer qu'ils le sont effectivement, on reconnaît en X le pôle Nord de AEF issu de A, et on démontre qu'il l'est effectivement.

Commentaire des correcteurs Le problème, difficile, n'a été résolu entièrement que par un élève. Beaucoup d'élèves sont parvenus à réduire le problème au fait de montrer que $XY = XZ$, ou à une propriété équivalente. Une telle réduction du problème est toujours bonne à écrire.

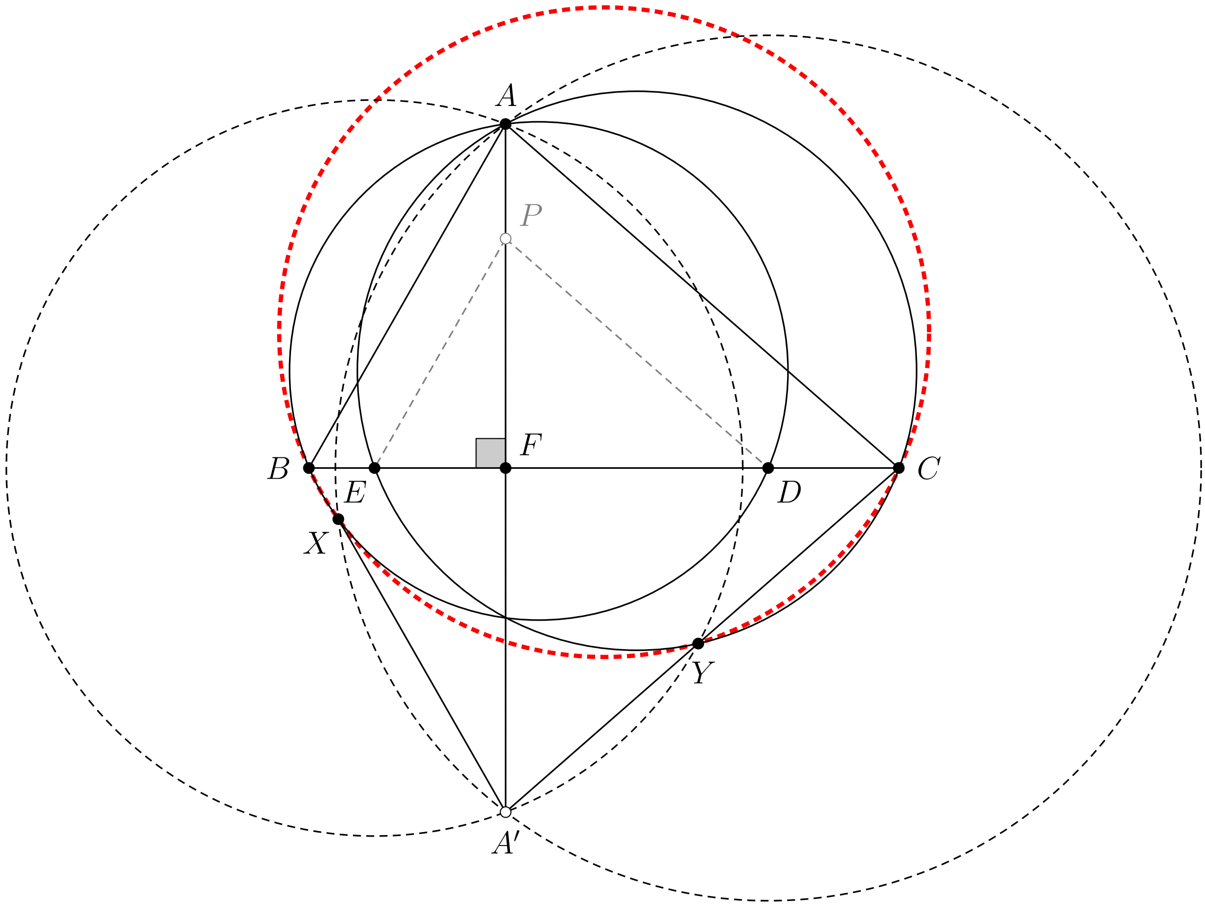
En revanche, trop d'élèves font des erreurs de raisonnements qu'il faut absolument gommer : méconnaissance du critère de similitude de deux triangles, raisonnements circulaires ou mauvaise lecture de le figure (voire de l'énoncé). Ces élèves croient alors conclure le problème en quelques lignes alors qu'ils n'ont pas utilisé certaines hypothèses cruciales de l'énoncé, ce qui devrait les amener à relire et vérifier leur preuve.

Énoncés Senior

Exercice 5. Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus. Soit F le pied de la hauteur de ABC issue de A, et soit P un point situé sur le segment $[AF]$. On note D le point de (BC) tel que (PD) soit parallèle à (AC), puis X le point où se recoupent le cercle circonscrit à ABD et le cercle de centre D passant par A. De même, on note E le point de (BC) tel que (PE) soit parallèle à (AB), puis Y le point où se recoupent le cercle circonscrit à ACE et le cercle de centre E passant par A.

Démontrer que les points B, C, X et Y sont cocycliques.

Solution de l'exercice 5



Dans un tel problème, le plus simple est d'essayer d'éliminer au mieux les points qui pourraient s'avérer peu utiles pour la suite. Ici, c'est par exemple le cas du point P, qui ne sert qu'à construire les points D et E en tant qu'images de B et C par une même homothétie de centre F. Ainsi, $FE \times FC = FB \times FD$, et F a donc même puissance par rapport aux cercles circonscrits à ABD et à ACE. Ces deux cercles ont donc (AF) pour axe radical.

On s'intéresse donc aux axes radicaux de ces deux cercles avec l'éventuel cercle circonscrit à $BXCY$, c'est-à-dire aux droites (BX) et (CY), et au centre radical de ces trois cercles. Or, sur la figure, celui-ci semble appartenir aux cercles de centres D et E passant par A. Cela signifierait qu'il est confondu avec le symétrique de A par rapport à la droite $(DE) = (BC)$; on note A' ce symétrique.

Une manière simple de réutiliser l'égalité $DA = DX$ consiste à dire que les arcs de cercle $\overset{\frown}{DA}$ et $\overset{\frown}{XD}$ ont même mesure. Ainsi,

$$(BX, BC) = (BX, BD) = (BD, BA) = (BC, BA) = (BA', BC).$$

On démontre de même que $(CY, CB) = (CA', CB)$, de sorte que les trois droites (AF), (BX) et (CY) sont bien concourantes en A'.

En particulier, A' est le centre radical des cercles circonscrits à $ABDX$, à $ACEY$ et à BCY, donc $(A'B) = (BX)$ est l'axe radical des cercles circonscrits à $ABDX$ et à BCY. Puisque X appartient à l'un de ces cercles, il appartient aussi à l'autre, ce qui conclut.

Commentaire des correcteurs De nombreux élèves ont résolu ce problème. Se contenter de traduire les hypothèses de cocyclicité ou de parallélisme par des égalités d'angles ne suffisait pas ici pour avancer significativement. Néanmoins, plusieurs parties du problème étaient abordables, et ont été souvent abordées en pratique : montrer que F est sur un axe radical par chasse aux rapports, introduire le point d'intersection de (BX) et (CY) et traduire le résultat à démontrer en appartenance d'un certain point à un axe radical...

Signalons enfin que, même devant un problème avec une preuve aux arguments aussi élémentaires, des élèves ont tenté (sans vraiment beaucoup de succès) des solutions très techniques : des inversions, de la géométrie dynamique... Il est frustrant de voir les élèves déployer un tel arsenal sans aboutir à une relation intéressante, surtout quand c'est la seule tentative dont ils laissent une trace écrite. On implore les élèves d'essayer des choses simples pour les premiers exercices.

Exercice 6. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Morgane dispose initialement de n piles dont chacune contient une pièce. Elle s'autorise ensuite des opérations de la forme suivante : elle choisit deux piles, prélève autant de pièces de la première pile que de la deuxième, et forme une nouvelle pile avec les pièces qu'elle a prélevées.

Déterminer, en fonction de n, le plus petit nombre de piles non vides que Morgane pourra obtenir à partir de telles opérations.

Solution de l'exercice 6 Si n est une puissance de 2, Morgane peut se débrouiller pour n'obtenir qu'une seule pile, en procédant comme suit : elle fusionne les n piles de taille 1 en $n/2$ piles de taille 2, puis fusionne ces $n/2$ piles en $n/4$ piles de taille 4, et ainsi de suite.

Réciproquement, lorsque Morgane extrait k pièces de deux piles contenant originellement a et b pièces pour former trois piles (éventuellement vides) de $a-k$, $b-k$ et $2k$ pièces, on constate que $\mathrm{PGCD}(a-k, b-k, 2k)$ divise $2a$ et $2b$, donc divise $2\mathrm{PGCD}(a, b)$. Par conséquent, une récurrence immédiate montre que, si Morgane dispose de k piles de tailles $t_1, t_2, \ldots, t_k$, le nombre $\mathrm{PGCD}(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ est une puissance de 2. En particulier, si Morgane parvient à n'avoir plus qu'une seule pile, qui contiendra n pièces, c'est donc que n est une puissance de 2.

Enfin, voici comment, pour toute valeur de n, Morgane peut procéder pour n'obtenir que deux piles. Elle écrit n comme somme de puissances de 2 croissantes, c'est-à-dire de nombres $2^{a_1} < 2^{a_2} < \cdots < 2^{a_k}$ tels que $n = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \cdots + 2^{a_k}$. Pour chaque $i \leqslant k$, et en procédant comme dans le cas où n est une puissance de 2, Morgane regroupe ensuite 2^{a_i} de ses pièces en une seule pile, obtenant ainsi k piles.

Morgane distingue alors sa pile de taille 2^{a_1}, qu'elle appelle *cible*, et sa pile de taille 2^{a_k}, qu'elle appelle *réserve*. Les $k-2$ autres piles sont vues comme des piles *normales*. Puis Morgane s'attelle à doubler la taille de sa pile cible tout en s'assurant qu'elle ne sera jamais plus grande qu'une pile normale, en procédant comme suit :

- ▷ si la pile cible est de même taille qu'une pile normale, Morgane fusionne ces deux piles en une nouvelle pile cible ; une pile normale disparaît au cours de cette opération ;
- ▷ sinon, la pile cible est de taille 2^a strictement plus petite que chaque pile normale, et Morgane prélève alors 2^a pièces de la réserve pour les intégrer à la pile cible, qui est désormais de taille 2^{a+1}.

Après ℓ telles étapes, la pile cible est désormais de taille $2^{a_1+\ell}$, et elle a absorbé les piles de tailles $2^{a_i} < 2^{a_1+\ell}$, ainsi qu'au plus $2^{a_{k-1}}$ pièces issues de la réserve, qui n'est donc toujours pas vide. Ainsi, après $a_{k-1} + 1 - a_1$ étapes, la pile cible est désormais de taille $2^{a_{k-1}+1}$, et elle a absorbé toutes les piles normales, ce qui fait que l'on n'a plus que deux piles.

En conclusion, le nombre minimal de piles auquel pourra aboutir Morgane vaut 1 si n est une puissance de 2, et il vaut 2 sinon.

Commentaire des correcteurs L'exercice était de difficulté progressive. Comme beaucoup d'exercices de combinatoire, il valorisait les élèves ayant testé les petits cas. En effet, en testant les petits cas, par exemple 2 et 4, on voit que si n est une puissance de 2, alors on peut former une seule pile. En continuant les petits cas tels que 3, 5 et 6, on voit que si n est une somme de k puissances de 2, alors on peut faire k piles. Mais k n'est pas forcément le minimum : pour 7, on peut obtenir une pile de 4, une de 2, une de 1 ; puis on peut obtenir une pile de 3, et deux de 2, donc une pile de 4 et une de 3. Ainsi, on peut faire mieux que le nombre de 1 de n en binaire.

En testant les nombres de 8 à 16 on voit qu'on peut obtenir 2 piles pour les nombres n'étant pas des puissances de 2, mais pas mieux, et que la bonne stratégie est de faire une grosse pile de taille une puissance de 2, puis de la vider un petit peu pour former 2 piles. Après il n'y a plus qu'à formaliser cet argument pour montrer qu'on pouvait obtenir deux piles.

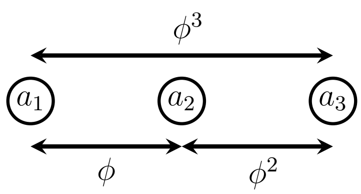
Il restait alors la partie la plus difficile de l'exercice : pourquoi, si n n'est pas une puissance de 2, on ne peut pas obtenir une pile. Malheureusement, certains ont mal lu l'énoncé, et ont cru qu'il fallait retirer autant de pièces du premier tas qu'il y en avait dans le second : ce n'est pas dit dans l'énoncé. Certains ont essayé de procéder par récurrence, pour montrer que plusieurs étapes avant la fin, il y a une pile de taille $n/2^k$ (ou même 2^k telles piles). Cela n'est pas vrai pour $k = 3$: en effet, on peut imaginer avoir une pile de $5n/8$ et une pile de $3n/8$, prendre $n/8$ pièces de chaque pour avoir une pile de $n/2$ et deux de $n/4$, et en deux fusions obtenir une seule pile.

L'argument était plus subtil : le plus simple était d'écrire $n = 2^k \times y$ avec y impair, et de montrer par récurrence que k étapes avant la fin, chaque pile avait une taille divisible par y. Ou alternativement, de montrer que les piles avaient une taille de la forme $kn/2^j$ avec k impair, donc ne pouvaient jamais être de taille 1.

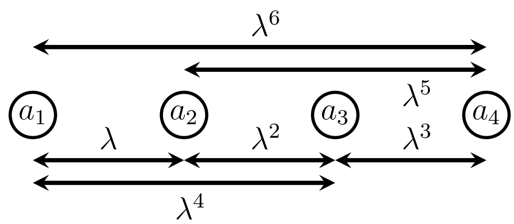
Exercice 7. Trouver tous les entiers $n \geqslant 2$ pour lesquels il existe un nombre réel $r > 0$ et n nombres réels $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ tels que les $n(n-1)/2$ différences $a_j - a_i$ obtenues lorsque $1 \leqslant i < j \leqslant n$ sont égales, à l'ordre près, aux nombres $r^1, r^2, \ldots, r^{n(n-1)/2}$.

Solution de l'exercice 7 Dans un tel problème, il est indispensable de commencer par étudier les petits cas.

- ▷ Lorsque $n = 2$, il suffit de choisir $a_1 = 0$ et $a_2 = r = 1$. Par conséquent, $n = 2$ convient.
- ▷ Lorsque $n = 3$, il suffit de choisir $a_1 = 0$, $a_2 = r = \phi$ et $a_3 = \phi^3$, où $\phi = (1+\sqrt{5})/2$ est le nombre d'or et vérifie l'égalité $\phi^2 = 1 + \phi$. En effet, on a alors $a_2 - a_1 = \phi$, $a_3 - a_2 = \phi(\phi^2 - 1) = \phi^2$ et $a_3 - a_1 = \phi^3$, comme illustré ci-dessous à gauche. Par conséquent, $n = 3$ convient.
- ▷ Lorsque $n = 4$, il suffit de choisir $a_1 = 0$, $a_2 = \lambda$, $a_3 = \lambda^4$, $a_4 = \lambda^6$ et $r = \lambda$, où λ est une racine positive du polynôme $P(X) = X^3 - X - 1$, pour lequel $P(1) < 0 < P(2)$. En effet, on a alors $a_2 - a_1 = \lambda$, $a_3 - a_2 = \lambda(\lambda^3 - 1) = \lambda^2$, $a_4 - a_3 = \lambda^3(\lambda^3 - \lambda) = \lambda^3$, $a_3 - a_1 = \lambda^4$, $a_4 - a_2 = (a_4 - a_3) = (a_3 - a_2) = \lambda^3 + \lambda^2 = \lambda((a_3 - a_2) + (a_2 - a_1)) = \lambda(a_3 - a_1) = \lambda^5$, et enfin $a_3 - a_1 = \lambda^6$, comme illustré ci-dessous à droite. Par conséquent, $n = 4$ convient.



Cas $n = 3$

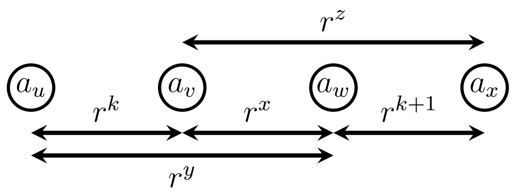


Cas $n = 4$

En pratique, on pouvait trouver les constructions ci-dessus par étude exhaustive des valeurs possibles pour les différences $a_j - a_i$. Cependant, lorsque $n \geqslant 5$, on n'a guère envie de continuer sur cette lancée avec $n(n-1)/2 \geqslant 10$ différences à traiter. On suppose donc que l'on dispose d'une solution $n \geqslant 5$, ainsi que de réels $r > 0$ et $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ adéquats.

Posons $t = n(n-1)/2$. Quitte à remplacer r par $1/r$ et chaque nombre a_i par a_i/r^{t+1}, on suppose que $r \geqslant 1$. En outre, puisque $a_3 - a_1 > a_2 - a_1$, on sait même que $r > 1$. Désormais, à chaque entier $k \leqslant t$, on associe l'intervalle $\mathcal{I}(k) = \{i, i+1, \ldots, j-1\}$ pour lequel $a_j - a_i = r^k$. Lorsque l'on scinde un intervalle $\mathcal{I}(k)$ en deux sous-intervalles $\mathcal{I}(\ell)$ et $\mathcal{I}(\ell')$, on constate immédiatement que $r^k = r^\ell + r^{\ell'}$.

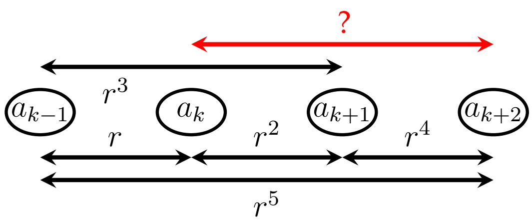
Supposons maintenant qu'il existe un entier k pour lequel l'ensemble $\mathcal{I}(k) \cup \mathcal{I}(k+1)$ n'est pas un intervalle. Quitte à remplacer chaque nombre a_i par $-a_i$, il existe quatre entiers $u < v < w < x$ tels que $r^k = a_v - a_u$ et $r^{k+1} = a_x - a_w$. Soit alors x, y et z les entiers tels que $r^x = a_w - a_v$, $r^y = a_w - a_u$ et $r^z = a_x - a_v$. Comme $r^y = r^k + r^x < r^{k+1} + r^x = r^z$, on sait que $z \geqslant y + 1$, de sorte que $r^{k+1} + r^x = r^z \geqslant r^{y+1} = r^{k+1} + r^{x+1}$, ce qui est absurde. Ainsi, l'ensemble $\mathcal{I}(k) \cup \mathcal{I}(k+1)$ est toujours un intervalle.



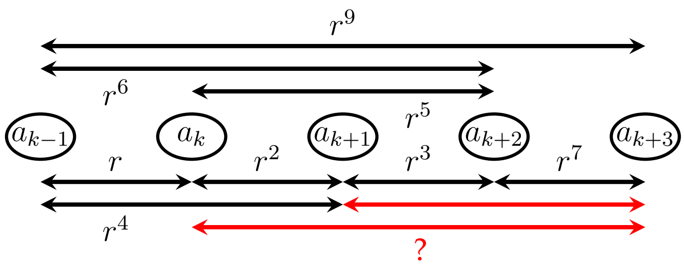
Par ailleurs, la bijection réciproque $\mathcal{I}^{-1}$ de $\mathcal{I}$ est croissante : lorsque $\mathcal{I}(k) \subseteq \mathcal{I}(\ell)$, on sait que $k \leqslant \ell$. Par conséquent, et quitte à remplacer chaque terme a_i par $-a_i$, les intervalles $\mathcal{I}(1)$ et $\mathcal{I}(2)$ sont sont des singletons voisins, de la forme $\{k\}$ et $\{k+1\}$.

Soit ℓ le plus grand entier pour lequel $\mathcal{I}(\ell+1) = \{k+\ell\}$. L'intervalle $\mathcal{I}(\ell+2)$ ne peut contenir, parmi éventuels ses sous-intervalles stricts, que les singletons $\{k\}, \{k+1\}, \ldots, \{k+\ell\}$. En outre, $\mathcal{I}(\ell+2)$ ne coïncide avec aucun des singletons $\{k\}, \{k+1\}, \ldots, \{k+\ell+1\}$. Or, $\mathcal{I}(\ell+2) \cup \{k+\ell\}$ est un intervalle, donc $\mathcal{I}(\ell+2)$ contient l'un des trois entiers $k+\ell-1$, $k+\ell$ et $k+\ell+1$. Par conséquent, il existe un entier a, égal à $\ell-2$ ou à $\ell-1$, tel que $\mathcal{I}(\ell+2) = \{k+a, k+a+1\}$. On note alors ℓ' l'entier $\mathcal{I}^{-1}(\{k, k+1\})$. Puisque $r^1 + r^2 = r^{\ell'} \geqslant r^{\ell} = r^{a+1} + r^{a+2}$, on sait que $a = 0$. Ainsi, $\mathcal{I}(\ell+2) = \{k, k+1\}$ et ℓ est égal à 1 ou à 2.

- ▷ Si $\ell = 1$, alors $r + r^2 = r^3$. Cette situation est pour l'instant analogue au cas $n = 2$.
  En outre, l'intervalle $\mathcal{I}(4)$ est un singleton $\{k-1\}$ ou $\{k+2\}$, et sa réunion disjointe avec $\mathcal{I}(3)$ forme un intervalle $\mathcal{I}(m)$ égal à $\{k-1, k, k+1\}$ ou à $\{k, k+1, k+2\}$, pour lequel $r^m = r^3 + r^4 = r^2(r + r^2) = r^5$. Mais alors $\mathcal{I}(5)$ compte 6 sous-intervalles, ce qui est impossible.
- ▷ Si $\ell = 2$, alors $r + r^2 = r^4$. On en déduit immédiatement que $r^2 + r^3 = r^5$ et $r^3 + r^4 = r^6$, donc que $\mathcal{I}(5) = \{k+1, k+2\}$ et $\mathcal{I}(6) = \{k, k+1, k+2\}$. Cette situation est pour l'instant analogue au cas $n = 3$.
  Ainsi, l'intervalle $\mathcal{I}(7)$ est un singleton $\{k-1\}$ ou $\{k+3\}$, et sa réunion disjointe avec $\mathcal{I}(6)$ forme un intervalle $\mathcal{I}(m)$ égal à $\{k-1, k, k+1, k+2\}$ ou à $\{k, k+1, k+2, k+3\}$, pour lequel $r^m = r^6 + r^7 = r^5(r + r^2) = r^9$. Par conséquent, $\mathcal{I}(9)$ compte 10 sous-intervalles, ce qui est impossible.



Cas $\ell = 1$ et $\mathcal{I}(4) = \{k+2\}$



Cas $\ell = 2$ et $\mathcal{I}(7) = \{k+3\}$

En conclusion, nul entier $n \geqslant 5$ ne convient, et les solutions sont donc $n = 2$, $n = 3$ et $n = 4$.

Solution alternative n°1 On montre comme dans la solution précédente que les entiers $n = 2$, $n = 3$ et $n = 4$ conviennent, et que l'on peut supposer que $r > 1$. On pose également $m = n(n-1)/2$.

On considère maintenant une solution $n \geqslant 4$, et des réels a_i et r adaptés. On note $\mathsf{p}(i, j)$ l'entier pour lequel $a_j - a_i = r^{\mathsf{p}(i,j)}$. Sous ces hypothèses, puisque $a_n - a_1$ est la plus grande des différences $a_j - a_i$, elle vaut r^m, et $\mathsf{p}(1, n) = m$. En outre, chaque différence $a_i - a_j$ autre que $a_n - a_1$ est majorée par $a_n - a_2$ ou par $a_{n-1} - a_1$. Quitte à remplacer chaque entier a_i par $-a_i$ et à réordonner nos nombres, on suppose que $a_{n-1} - a_1 \geqslant a_n - a_2$, ce qui nous assure que $\mathsf{p}(1, n-1) = m - 1$.

On remarque alors que $r^m = a_n - a_1 = (a_n - a_j) + (a_j - a_1) = r^{\mathsf{p}(j,n)} + r^{\mathsf{p}(1,j)}$ pour chacun des entiers $j = 2, 3, \ldots, n-1$. Au vu de cette égalité, on dit que deux entiers c et d forment un couple *pivot* si $1 \leqslant c < d$ et $r^{-c} + r^{-d} = 1$. Remarquons, dans ce cas-là, que $2r^{-c} > r^{-c} + r^{-d} = 1$, de sorte que $c < \log_r(2)$. On peut alors noter $(c_1, d_1), \ldots, (c_k, d_k)$ les couples pivots, et les trier de sorte que $c_1 < c_2 < \cdots < c_k$, ce qui nous conduit aux inégalités $1 \leqslant c_1 < c_2 < \cdots < c_k < d_k < \cdots < d_2 < d_1$. En outre, par construction, les entiers $m - \mathsf{p}(1, j)$ et $m - \mathsf{p}(j, n)$ forment un couple pivot (à l'ordre près) lorsque $2 \leqslant j \leqslant n-1$: il y a donc au moins $n-2$ couples pivots, ce qui nous assure que $d_k \geqslant k+1 \geqslant n-1$.

Soit maintenant $\mathsf{p}(I,J)$ le plus petit des entiers $\mathsf{p}(i,j)$ pour lesquels $j \geqslant i+2$. Puisque $\mathsf{p}(I,J) \geqslant \mathsf{p}(I,J-1)$, on sait que $J = I+2$. En outre, parmi les $n(n-1)/2$ entiers $\mathsf{p}(i,j)$, il y en a $n-1$ pour lesquels $j = i+1$; ainsi, $\mathsf{p}(I,J) \leqslant n$. En particulier, puisque

$$r^{\mathsf{p}(I,J)} = a_J - a_I = (a_J - a_{I+1}) + (a_{I+1} - a_I) = r^{\mathsf{p}(I+1,J)} + r^{\mathsf{p}(I,I+1)},$$

les entiers $\mathsf{p}(I,J) - \mathsf{p}(I+1,J)$ et $\mathsf{p}(I,J) - \mathsf{p}(I,I+1)$ forment, à l'ordre près, un couple pivot. Le plus grand des deux vaut donc au moins $n-1$, et puisqu'il est minoré par $n-1$, il coïncide avec $n-1$. En d'autres termes, on est assuré que $k = n-2$, que $d_k = n-1$; que chaque entier c_i vaut i ; et que les entiers $\mathsf{p}(i,i+1)$ prennent les valeurs $1,2,\ldots,n-1$ dans un certain ordre. Cela signifie notamment que $\mathsf{p}(1,2) \leqslant n-1$.

En outre, chacun des entiers $m-n+1, m-n+2, \ldots, m-n$ est désormais égal à l'un des entiers $m-d_k, m-c_k, m-c_{k-1}, \ldots, m-c_1$, donc coïncide avec l'un des entiers $\mathsf{p}(1,j)$ ou $\mathsf{p}(j,n)$ obtenus lorsque $2 \leqslant j \leqslant n-1$. Par conséquent, $\mathsf{p}(2,n-1) \leqslant m-n$. Or, l'égalité

$$r^{\mathsf{p}(1,2)} + r^{\mathsf{p}(2,n-1)} = (a_2 - a_1) + (a_{n-1} - a_2) = a_{n-1} - a_1 = r^{m-1}$$

nous indique que les entiers $(m-1) - \mathsf{p}(1,2)$ et $(m-1) - \mathsf{p}(2,n-1)$ forment, à l'ordre près, un couple pivot, disons (c_ℓ, d_ℓ). L'inégalité $(m-1) - \mathsf{p}(2,n-1) \geqslant n-1 > c_\ell$ nous assure donc que $(m-1) - \mathsf{p}(1,2) = c_\ell \leqslant n-1$.

Puisque $\mathsf{p}(1,2) \leqslant n-1$, on en conclut que

$$n(n-1) = 2m \leqslant 2\mathsf{p}(1,2) + 2n \leqslant 4n-2 < 4n,$$

donc que $n-1 < 4$, c'est-à-dire $n \leqslant 4$.

Remarque : Le lecteur *bien trop savant* aura pu se rappeler le **résultat suivant** :

> Soit a et b deux entiers tels que $1 \leqslant a < b$, et soit δ leur PGCD. Posons $k = 1$ si $a \equiv 2b \pmod{6\delta}$, et $k = 0$ sinon.
> Le polynôme $P_{a,b}(X) = X^b - X^a - 1$ peut s'écrire comme un produit de la forme
> $$P_{a,b}(X) = (X^{2\delta} - X^\delta + 1)^k Q_{a,b}(X), \tag{1}$$
> où $Q_{a,b}(X)$ est un polynôme irréductible de $\mathbb{Z}[X]$.

On peut alors préciser ce résultat en invoquant le **lemme suivant** :

Deux couples (a,b) et (a',b') satisfont l'égalité $Q_{a,b}(X) = Q_{a',b'}(X)$ si et seulement s'ils sont égaux l'un à l'autre ou bien s'ils ont même PGCD δ et sont égaux à $(\delta, 3\delta)$ et $(4\delta, 5\delta)$.

Démonstration : Soit $\delta = \mathrm{PGCD}(a,b)$, $\delta' = \mathrm{PGCD}(a',b')$, puis k et k' définis comme ci-dessus.

- ▷ Si $k = k' = 0$, alors $P_{a,b}(X) = P_{a',b'}(X)$, donc $(a,b) = (a',b')$.
- ▷ Si $k = 1$ et $k' = 0$, alors $Q_{a,b}(X) = P_{a',b'}(X)$. En outre, puisque $P_{a,b}(X)$ est un polynôme en X^δ, $Q_{a,b}(X)$ en est un aussi, donc δ divise a' et b'. Quitte à divise a, b, a' et b' par δ, on suppose donc que $\delta = 1$. On a alors

  $$X^b - X^a - 1 = (X^2 - X + 1)(X^{b'} - X^{a'} - 1),$$

  ce qui montre déjà que $b = b' + 2$. Puisque $b \geqslant 2$ et $b' \geqslant 2$, la relation (1) indique notamment que

  $$-X^a - 1 \equiv X^b - X^a - 1 \equiv (X^2 - X + 1)(X^{b'} - X^{a'} - 1) \equiv -X^{a'} + X - 1 \pmod{X^2},$$

  de sorte que $a \geqslant 2$ et $a' = 1$. Mais alors (1) se réécrit comme

  $$X^b - X^a - 1 = (X^2 - X + 1)(X^{b'} - X - 1) = X^{b'+2} - X^{b'+1} + X^{b'} - X^3 - 1,$$

  et l'on est forcé d'avoir $b' = 3$ puis $b = 5$ et $a = 4$.

- ▷ Si $k = 0$ et $k' = 1$, la situation est symétrique et se traite de la même façon.
- ▷ Si $k = k' = 1$, et si δ' ne divise pas δ, et on pose $\delta'' = \mathrm{PPCM}(\delta, \delta')$. Comme mentionné précédemment, le polynôme $Q_{a,b}(X) = Q_{a',b'}(X)$ est un polynôme en X^δ et en $X^{\delta'}$, donc en $X^{\delta''}$. Ainsi, $Q_{a,b}(X) \equiv -1 \pmod{X^{\delta''}}$, et

  $$X^b - X^a - 1 = -X^{2\delta} + X^\delta - 1 \pmod{X^{\delta''}},$$

  ce qui est absurde, puisque les termes de deuxième plus petit degré de ces polynômes sont de coefficients différents.

  On en conclut que δ' divise δ, et même que $\delta = \delta'$. On a donc encore $P_{a,b}(X) = P_{a',b'}(X)$ et $(a, b) = (a', b')$.

En conclusion, on a bien $(a, b) = (a', b')$ ou $\{(a, b), (a', b')\} = \{(\delta, 3\delta), (4, \delta, 5\delta)\}$.

Réciproquement, si $(a, b) = (a', b')$, on a évidemment $Q_{a,b}(X) = Q_{a',b'}(X)$. Et, si $(a, b) = (\delta, 3\delta)$ et $(a', b') = (4\delta, 5\delta)$, on a également

$$P_{a',b'}(X) = X^{5\delta} - X^{4\delta} - 1 = (X^{2\delta} - X^\delta + 1)(X^{3\delta} - X^\delta - 1) = (X^{2\delta} - X^\delta + 1)P_{a,b}(X),$$

de sorte que $Q_{a,b}(X) = P_{a,b}(X) = Q_{a',b'}(X)$. $\square$

La conclusion de l'exercice est désormais proche. En effet, comme on l'a vu dans la solution précédente, on sait que l'on a au moins $n - 2$ couples pivots. Or, un couple (c, d) est pivot si et seulement si r est une racine de $P_{d-c,d}(X)$. Si l'on pose $\delta = \mathrm{PGCD}(c, d)$, et puisque $r^{2\delta} - r^\delta + 1 \geqslant r^\delta > 0$, notre réel r est même racine de $Q_{d-c,d}(X)$. Mais alors $Q_{d-c,d}(X)$ est le polynôme minimal de r, et ne dépend pas du couple pivot (c, d) de départ. On a donc au plus deux couples pivots au total, de sorte que $n \leqslant 4$.

<u>*Commentaire des correcteurs*</u> L'exercice était très difficile. Il était important de regarder ce qui se passait pour les petites valeurs de n, sans négliger l'étude des cas $n = 3$ et $n = 4$, mais également, par exemple, $n = 5$, afin de se convaincre que les solutions seraient seulement $n = 2$, 3 et 4. Par ailleurs, de nombreux élèves ont eu la bonne idée de regarder des phénomènes extrémaux, tels que l'apparition d'un triplet d'un couple pivot de la forme $(k, k + 1)$, ou encore le fait qu'il existait au moins $n - 2$ couples pivots.