PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 22 ET DU 23 FÉVRIER 2023

DURÉE : 4H

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- Le **groupe Junior** est constitué des élèves nés en 2008 ou après.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 1 à 4.
- Le **groupe Senior** est constitué des élèves nés en 2007 ou avant.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 5 à 7.
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées.
  Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

Problèmes Junior

Exercice 1. Trouver tous les quadruplets de réels (a, b, c, d) tels que

$$a = bc + cd, b = cd + da, c = da + ab \text{ et } d = ab + bc.$$

Solution de l'exercice 1 Soit (a, b, c, d) une solution éventuelle. Une première étape consiste à factoriser les membres de droite de nos égalités :

$$a = c \times (b + d), b = d \times (a + c), c = a \times (b + d) \text{ et } d = b \times (a + c).$$

Maintenant, si $a = 0$, l'énoncé indique que $c = 0 \times (b + d) = 0$, puis que $b = d \times 0 = 0$ et que $d = b \times 0 = 0$. En outre, puisque les quatre nombres jouent des rôles cycliques, toute autre solution éventuelle est formée de quatre réels non nuls.

Dans ces nouvelles conditions, puisque $ac = ac \times (b + d)^2 \neq 0$, on sait que $b + d = \pm 1$. De même, $a + c = \pm 1$. Comme $a + c = (a + c) \times (b + d)$, on en déduit que $b + d = 1$ et, de même, que $a + c = 1$. Dès lors, les équations de l'énoncé se réécrivent comme $a = c$ et $b = d$, de sorte que $a = b = c = d = 1/2$.

En conclusion, les deux seules solutions éventuelles sont $(0, 0, 0, 0)$ et $(1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$, et on vérifie sans effort qu'il s'agit manifestement de solutions au problème.

Commentaire des correcteurs L'exercice a été abordé par la grande majorité des élèves, mais n'a pourtant pas été très bien réussi, puisque plus de la moitié des copies contient une erreur grave parmi les deux suivantes :

- De très nombreux élèves divisent des égalités par une quantité (comme a ou $b+d$ le plus souvent) sans vérifier si celle-ci est non nulle, ce qui explique l'absence de la solution $(0, 0, 0, 0)$ dans trop de copies. Diviser par 0 est une des erreurs les plus fréquentes dans toutes les copies d'algèbre et d'arithmétique, et est pourtant facilement évitable : il faut y remédier !
- Plusieurs élèves tentent de faire des inégalités, mais se retrouvent très vite à multiplier par $b + d$ sans vérifier le signe de cette quantité. Multiplier par un nombre négatif change le sens de l'inégalité, donc la preuve entière tombe à l'eau à partir de là. Il était possible de raisonner avec des inégalités, mais cela s'avérait très laborieux, et une seule copie l'a fait parfaitement.

Enfin, de trop nombreux élèves oublient de vérifier leurs solutions. Ici, la vérification est facile à faire, mais il faut au moins mentionner qu'elle a été faite. Une phrase comme « et on vérifie réciproquement que ces solutions conviennent » est le minimum nécessaire pour montrer que cette étape n'a pas été négligée.

Exercice 2. Trouver tous les couples d'entiers naturels non nuls (k, n) pour lesquels

$$1! + 2! + \cdots + k! = 1 + 2 + \cdots + n.$$

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> Dans toute la solution, on notera A_k l'expression $1! + 2! + \cdots + k!$ et B_n l'expression $1 + 2 + \cdots + n$. Comme dans tout exercice de ce genre, on commence par rechercher d'éventuelles solutions pour de petites valeurs de k et de n. À cette fin, il est pratique de reconnaître en B_n la somme des termes d'une suite arithmétique, de sorte que $B_n = n(n+1)/2$. En particulier, si (k, n) est une solution, on sait que

$$n^2 \leqslant 2B_n = 2A_k < (n+1)^2,$$

donc que $n = \lfloor \sqrt{2A_k} \rfloor$.

On calcule alors les premières valeurs de A_k : par exemple, lorsque k varie de 1 à 5, A_k vaut successivement 1, 3, 9, 33 et 153, puis l'entier $n = \lfloor \sqrt{2A_k} \rfloor$ vaut alors successivement 1, 2, 4, 8 et 17, de sorte que B_n vaut 1, 3, 10, 36 et 153. Cette première étude, bien que fastidieuse vers la fin, nous a permis d'identifier trois couples solutions : $(k, n) = (1, 1)$, $(2, 2)$ et $(5, 17)$.

Par ailleurs, on se voit mal calculer à la main $\lfloor 2\sqrt{A_\ell} \rfloor$ lorsque $\ell \geqslant 6$, et il faut donc trouver une approche plus générale lorsque ℓ est grand. Par exemple, quand $\ell \leqslant k$, l'entier $\ell!$ divise l'entier $k! = A_k - A_{k-1}$, de sorte que $A_k \equiv A_{\ell-1} \pmod{\ell!}$. On entreprend donc d'étudier la suite (A_k) modulo $\ell!$ ou ℓ pour de petites valeurs de ℓ, par exemple lorsque ℓ est un nombre premier.

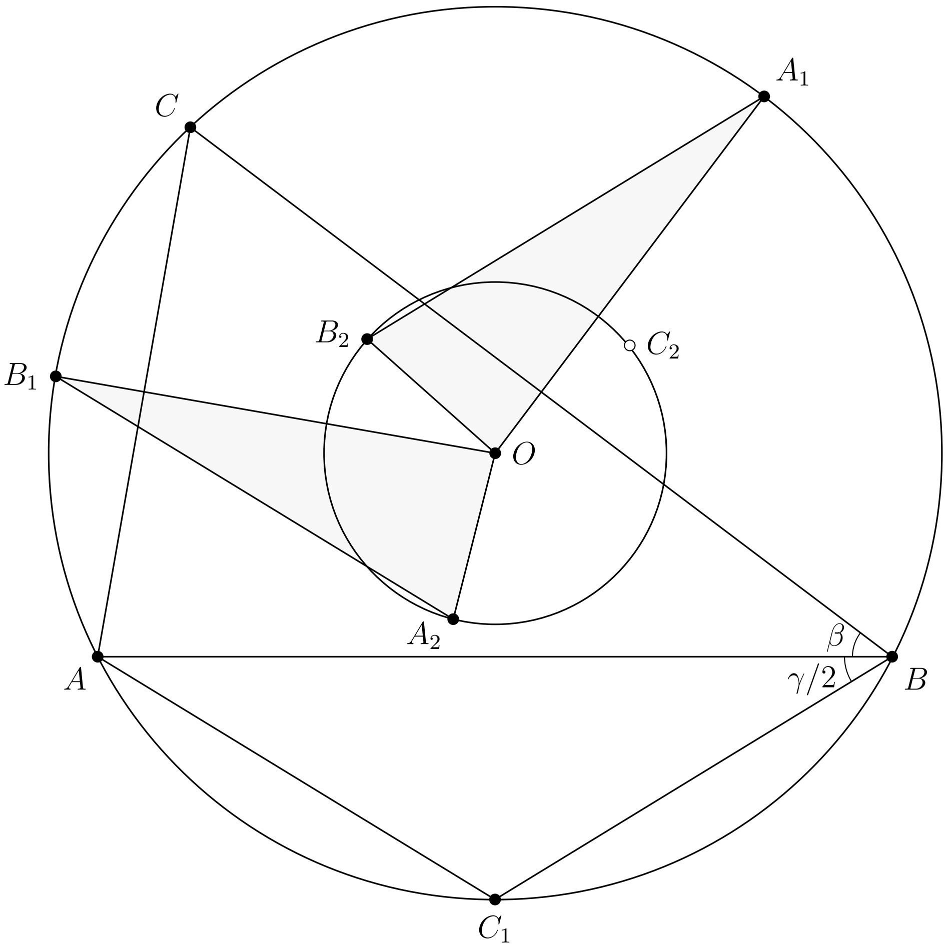
Après une étude infructueuse des cas $\ell = 2$, 3 et 5, on constate ainsi que $k! \equiv 1, 2, 6, 3, 1, 6 \pmod{7}$ lorsque k varie de 1 à 6, et donc que $A_k \equiv A_6 \equiv 1 + 2 + 6 + 3 + 1 + 6 \equiv 5 \pmod{7}$ lorsque $k \geqslant 6$. D'autre part, $B_n \equiv 1, 3, 6, 3, 1, 0, 0 \pmod{7}$ lorsque n varie de 1 à 7. Puisque 2 est inversible modulo 7, on sait que $B_n \pmod{7}$ ne dépend que de $n \pmod{7}$. Cela signifie en particulier que $B_n \not\equiv 5 \equiv A_k \pmod{7}$ dès lors que $k \geqslant 6$ et $n \geqslant 1$, démontrant par la même que (k, n) n'est pas une solution.

En conclusion, les solutions sont les couples $(k, n) = (1, 1)$, $(2, 2)$ et $(5, 17)$.

<u>*Commentaire des correcteurs*</u> Le problème était plutôt difficile, et a été bien abordé. Néanmoins, certains candidats n'ont pas cherché des solutions, ou ont loupé la solution $(5, 17)$: il ne faut pas hésiter à passer du temps sur ces débuts de preuve, qui permettent aussi de se forger une intuition. Ici, une fois la solution $(5, 17)$ trouvée, on pouvait constater que tout modulo divisant $5!$ ne permettrait pas d'avancer dans le sens de la solution. Il fallait donc chercher un modulo ne divisant pas $5!$; ici 7 était le modulo le plus facile, mais 13 et 25 fonctionnaient aussi.

Exercice 3. Soit ABC un triangle et Γ son cercle circonscrit. Soit A_1 le milieu de l'arc $\widehat{BC}$ ne contenant pas A; B_1 le milieu de l'arc $\widehat{CA}$ ne contenant pas B; C_1 le milieu de l'arc $\widehat{AB}$ ne contenant pas C. Enfin, soit A_2 le point pour lequel $AB_1A_2C_1$ est un parallélogramme; B_2 le point pour lequel $BC_1B_2A_1$ est un parallélogramme; C_2 le point pour lequel $CA_1C_2B_1$ est un parallélogramme.
Démontrer que les cercles circonscrits à ABC et à $A_2B_2C_2$ sont concentriques.

Solution de l'exercice 3



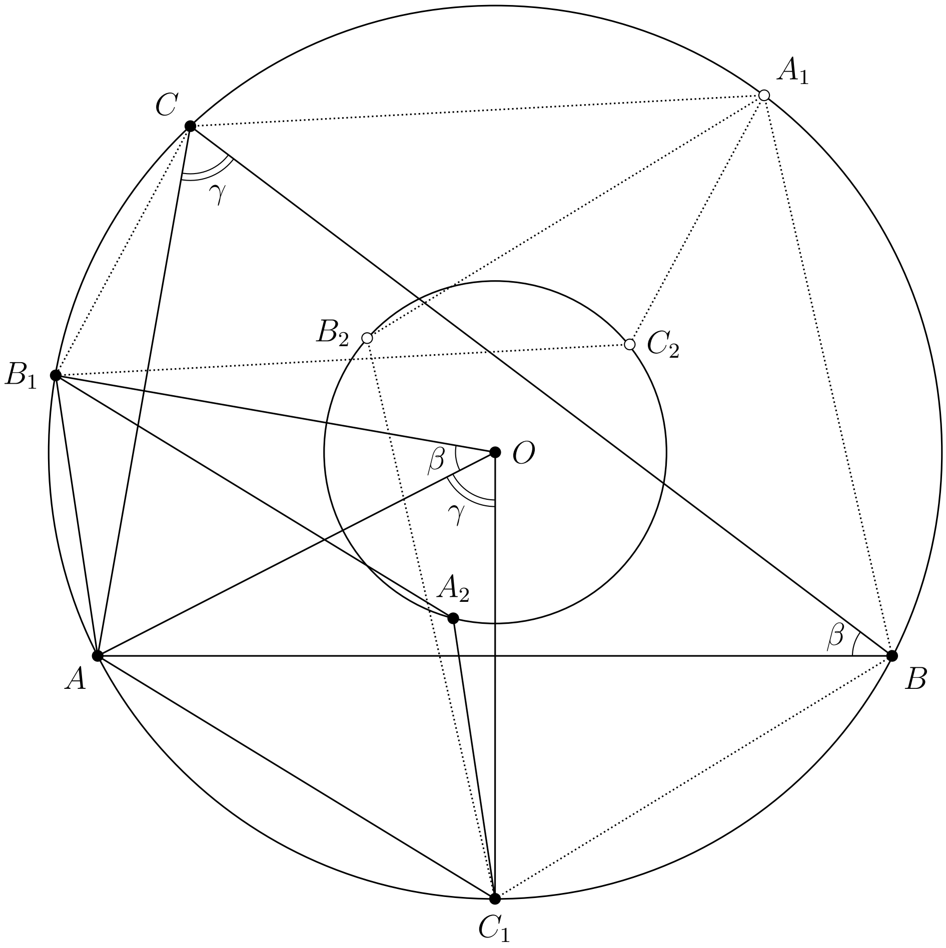
On cherche tout d'abord à démontrer que $OA_2 = OB_2$. Puisque $A_1B_2 = BC_1 = AC_1 = B_1A_2$ et que $A_1O = B_1O$, l'égalité $OA_2 = OB_2$ équivaut au fait que les triangles OA_1B_2 et OB_1A_2 soient isométriques l'un de l'autre, c'est-à-dire au fait que $\widehat{OA_1B} = \widehat{OB_1A_2}$.

On note alors $\alpha = \widehat{CAB}$, $\beta = \widehat{ABC}$ et $\gamma = \widehat{BCA}$ les angles du triangle. Ici, vu nos relations de parallélisme et de cocyclicité, il sera plus agréable de travailler en angles de droites. Ainsi, comme (CC_1) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BCA}$, on constate que

$$\begin{aligned}(A_1O, A_1B_2) &= (A_1O, BC) + (BC, A_1B_2) \\ &= 90^\circ + (BC, BC_1) \\ &= 90^\circ + (BC, BA) + (BA, BC_1) \\ &= 90^\circ + \alpha + \gamma/2 = (\alpha - \beta)/2.\end{aligned}$$

Cela signifie que $\widehat{OA_1B_2} = |\alpha - \beta|/2$. Puisque A, B et C jouent des rôles symétriques, on en déduit que $\widehat{OB_1A_2} = |\beta - \alpha|/2 = \widehat{OA_1B}$, donc que $OA_2 = OB_2$. Toujours par symétrie des rôles, on en conclut même que $OB_2 = OC_2$.

Solution alternative n°1



Nous allons calculer directement OA_2 en fonction des angles α, β, γ et du rayon $R = OA$. Pour ce faire, on remarque d'abord que $\widehat{AOB_1} = \beta$, $\widehat{C_1OA} = \gamma$ et $\widehat{C_1OB_1} = \beta + \gamma = 180° - \alpha$. En outre, la condition sur A_2 signifie que $A_2 = (B_1 + C_1) - A$, de sorte que

$$\begin{aligned}
OA_2^2 &= \overrightarrow{OA_2} \cdot \overrightarrow{OA_2} \\
&= (\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} - \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} - \overrightarrow{OA}) \\
&= \overrightarrow{OB_1}^2 + \overrightarrow{OC_1}^2 + \overrightarrow{OA}^2 + 2\overrightarrow{OB_1} \cdot \overrightarrow{OC_1} - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB_1} - 2\overrightarrow{OC_1} \cdot \overrightarrow{OA} \\
&= (3 + 2\cos(180° - \alpha) - 2\cos(\beta) - 2\cos(\gamma))R^2 \\
&= (3 - 2\cos(\alpha) - 2\cos(\beta) - 2\cos(\gamma))R^2.
\end{aligned}$$

Puisque A, B et C jouent des rôles symétriques, on en conclut que $OA_2^2 = OB_2^2 = OC_2^2$.

Commentaire des correcteurs L'exercice a été très peu réussi. Beaucoup d'élèves ont effleuré le début de la solution en exploitant les égalités de longueurs issues des parallélogrammes ou les égalités d'angles avec les pôles Sud, mais très très peu ont pensé à introduire le centre O dans leurs calculs ou dans leur figure alors qu'il était la star de l'exercice.

Mentionnons également qu'il est agaçant de voir des élèves lancer des phrases du type « il existe une transformation/une similitude envoyant le triangle/le parallélogramme sur un autre » alors que le contenu de la phrase est faux et que l'issue de la phrase ne permet pas de conclure :non, l'existence d'une similitude envoyant un triangle sur un autre ne nous dit rien sur le fait que le centre des cercles est le même ! Il est encore plus agaçant de voir que ces raisonnements sont les seuls apparents. Les élèves, au lieu d'essayer des choses simples comme une chasse aux angles ou une chasse aux longueurs, s'entêtent à improviser des raisonnements avec des concepts dont ils ne maîtrisent ni la théorie ni la portée. Ce n'est certainement pas de cette façon que l'on progresse en géométrie.

Exercice 4. Un jardinier et un pivert jouent au jeu suivant, dans leur jardin dont la forme est celle d'une grille 2022×2022 formée de 2022^2 cases. Deux cases sont considérées comme voisines si elles ont un sommet ou une arête en commun. Initialement, chaque case abrite un arbre de taille 0. Puis, à chaque tour de jeu,

- ▷ le jardinier choisit une case; les arbres de cette case et des cases adjacentes (soit de quatre à neuf cases en tout) voient tous leur taille augmenter de 1;
- ▷ le pivert choisit alors quatre cases; les arbres de ces cases voient tous leur taille diminuer de 1 (ou rester égale à 0 si le pivert a choisi une case avec un arbre de taille 0).

On dit qu'un arbre est *resplendissant* si sa taille vaut au moins 10^6. Trouver le plus grand entier A pour lequel le jardinier pourra s'assurer, en un nombre fini de tours de jeu, et quels que soient les choix du pivert, d'avoir fait pousser au moins A arbres resplendissants.

Solution de l'exercice 4 Nous allons démontrer que l'entier recherché est $A = 5n = 2271380$, où l'on a posé $n = 674^2 = (2022/3)^2$.

Tout d'abord, voici une stratégie pour le pivert. Il numérote les lignes et les colonnes de 1 à 2022, puis colorie en noir chaque case située dans une colonne c et une ligne ℓ pour lesquelles 3 ne divise ni c, ni ℓ. Parmi les quatre à neuf cases sur lesquelles le jardinier agit à chaque tour, au plus quatre sont noires. Le pivert choisit alors les cases noires en question; si cela fait moins de quatre cases, il choisit d'autres cases au hasard.

Ce faisant, il s'assure, à la fin du tour de jeu, qu'aucun arbre situé dans une case noire n'aura vu sa taille augmenter. Une récurrence immédiate indique donc que nul arbre situé dans une case noire ne verra sa hauteur dépasser 1, et puisqu'il y a $4n$ cases noires, on ne pourra jamais dépasser un total de $2022^2 - 4n = 5n$ arbres resplendissants.

Réciproquement, voici une stratégie pour le jardinier; on pose $m = 10^6$. Faisant fi de la coloration imposée par le pivert, il colorie en rouge chaque case située dans une colonne c et une ligne ℓ pour lesquelles $c \equiv \ell \equiv 2 \pmod 3$. Il y a n cases rouges, et chaque case est soit rouge, soit adjacente à une case rouge. Le jardinier pose alors $k = (4n+1)m + 1$ puis, au cours des kn premiers tours de jeu, il choisit chaque case rouge exactement k fois. Il a donc fait croître de k la hauteur de chaque arbre du jardin.

Soit a le nombre d'arbres qui ne sont *pas* resplendissants à l'issue de cette première partie du jeu : le pivert a dû choisir au moins $k - m$ fois chacun de ces a arbres. Puisqu'il a choisi $4kn$ arbres au cours des kn tours de jeu, en déduit que $a(k - m) \leqslant 4kn$, donc que

$$(k - m)(a - 4n - 1) \leqslant 4kn - (k - m)(4n + 1) = (4n + 1)m - k < 0.$$

Puisque $k \geqslant m$, cela signifie que $a < 4n + 1$, donc que $a \leqslant 4n = 9n - A$.

En conclusion, l'entier recherché est bien $A = 5n$.

Commentaire des correcteurs Le problème était difficile et beaucoup d'élèves n'ont pas bien compris ce qui été demandé d'eux, y compris certains qui ont reçus de points pour avoir eu de bonnes idées. Beaucoup trop de copies ressemblent à ceci :

> « Le jardinier découpe la grille en carrés 3×3 et joue dans les milieux des carrés car c'est le plus intéressant pour lui. Dans chacun de ces carrés, le pivert a le choix entre attaquer toujours les mêmes arbres ou se répartir, il a intérêt à toujours attaquer les mêmes arbres sinon tous les arbres deviennent resplendissants. Il peut en attaquer 4 par carré; par conséquent, le jardinier en jouant suffisamment de fois dans chaque milieu arrive à rendre 5 arbres par carré resplendissants, soit $5 \times 2022^2/9$ arbres. »

Une telle copie combine essentiellement tout ce qu'il ne faut pas faire :

- ▷ Que signifie la phrase « il est plus intéressant de jouer au milieu » ? Il faut le justifier même si ça parait intuitif. De même, beaucoup d'élèves ont affirmé que le jardinier n'avait pas intérêt à jouer au bord car « il augmente moins d'arbres », mais un seul élève est parvenu à le justifier correctement. En effet, faire grandir ces arbres sur le bord sont susceptibles d'être plus intéressants que d'autres arbres déjà immenses, donc la bonne manière de justifier cette affirmation était de dire que le jardinier peut remplacer un coup sur le bord par un coup adjacent, qui va faire pousser les même arbres et d'autres en plus, et qui est donc toujours meilleur. Pour résumer : pour dire qu'un coup est mauvais, il est nécessaire de proposer un coup alternatif meilleur qui remplisse tous les objectifs atteints par le premier coup.
- ▷ Beaucoup d'élèves ont fait des fausses dichotomies pour la stratégie du pivert : soit il attaque toujours les mêmes arbres, soit il papillonne uniformément. Des intermédiaires sont bien sûr possibles, où le pivert attaque principalement certains arbres mais va parfois sur d'autres.
- ▷ La principale erreur est cependant celle-ci : une bonne stratégie pour un des deux joueurs étant trouvée, il est absolument interdit de s'en servir pour trouver une stratégie « par réaction » pour l'autre joueur. Même si vous êtes convaincus que le jardinier a intérêt à jouer au milieu des carrés 3×3, il est impossible de le supposer pour décrire la stratégie du pivert. Même si vous êtes convaincus que le pivert a intérêt a choisir un certain nombre d'arbres contre lesquels il entretient une rancœur millénaire et à les attaquer dès que le jardinier essaye de les faire pousser, il est impossible de le supposer pour décrire la stratégie du jardinier. En effet, même s'il existe des stratégies optimales pour chacun des deux joueurs vérifiant ces contraintes raisonnables, il existe aussi des stratégies tout aussi performantes ne fonctionnant pas ainsi.

  Voilà comment il faut procéder pour un affrontement entre deux joueurs : il faut séparer sa preuve en deux parties totalement disjointes qui ne partageront aucun argument en commun. D'une part, il faut donner une stratégie pour le pivert qui permette d'assurer un certain score même si le jardinier joue de manière chaotique. Il est alors crucial de ne rien supposer sur la stratégie du jardinier et de ne pas faire de fausse dichotomie ; il faut laisser le jardinier « mal » jouer dans cette partie s'il le souhaite, car c'est toujours plus simple que de justifier que son « mauvais » coup ne pourrait pas devenir bon dans un lointain futur. Dans la deuxième moitié de la preuve, on inverse tout, on donne une stratégie pour le jardinier qui reste valable même si le pivert ne suit pas la stratégie qu'on vient de décrire, même si lui aussi joue de manière chaotique, sans rien supposer sur sa stratégie à lui.

Problèmes Senior

Exercice 5. Soit $a_1, a_2, \ldots$ des nombres réels strictement positifs tels que

$$a_{n+1}^2 + a_n a_{n+2} \leqslant a_n + a_{n+2}$$

pour tout entier $n \geqslant 1$. Démontrer que $a_{2023} \leqslant 1$.

Solution de l'exercice 5 L'inégalité donnée dans l'énoncé et celle qu'il nous est demandé de démontrer suggèrent de s'intéresser aux termes de la forme $b_n = a_n - 1$, car alors l'équation de l'énoncé se réécrit comme

$$b_{n+1}(b_{n+1} + 2) + b_n b_{n+2} \leqslant 0,$$

et il s'agit de démontrer que $b_{2023} \leqslant 0$.

Soit $n \geqslant 2$ un entier éventuel pour lequel $b_n > 0$. Puisque $b_{n-1}b_{n+1} \leqslant -b_n(b_n+2) < 0$, l'un des deux termes b_{n-1} et b_{n+1} est strictement positif, et l'autre est strictement négatif. En posant $m = n - 1$ dans le cas où $b_{n-1} > 0$, et $m = n$ dans le cas où $b_{n+1} > 0$, on dispose désormais d'un entier $m \geqslant 1$ pour lequel $b_m > 0$ et $b_{m+1} > 0$. Dans ces conditions, et puisque $b_{m+2} \geqslant -1$, on sait que

$$b_m \geqslant b_m + b_m b_{m+2} + b_{m+1}(b_{m+1} + 2) \geqslant b_{m+1}(b_{m+1} + 2) > b_{m+1}.$$

De même, puisque $b_{m-1} \geqslant -1$, on sait que

$$b_{m+1} \geqslant b_{m+1} + b_{m-1}b_{m+1} + b_m(b_m + 2) \geqslant b_m(b_m + 2) > b_m,$$

ce qui contredit l'inégalité $b_m > b_{m+1}$ obtenue précédemment.

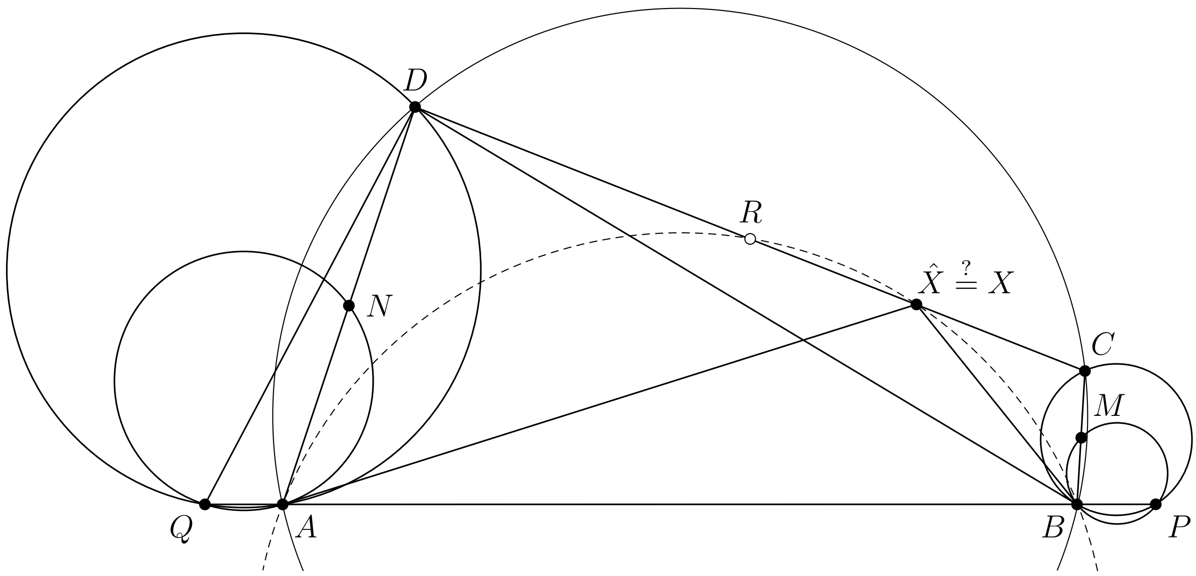
On en conclut que $b_n \leqslant 0$, c'est-à-dire $a_n \leqslant 1$, pour tout entier $n \geqslant 2$, et notamment pour $n = 2023$.

Commentaire des correcteurs Le problème était relativement difficile, mais a été plutôt bien réussi. Attention à ne pas s'emmêler dans les implications, à bien distinguer les inégalités $<$ et $\leqslant$, et surtout à faire attention attention lorsque l'on divise une inégalité : le terme par lequel on divise peut être nul (auquel cas on n'a pas le droit de diviser) ou négatif (auquel cas la division change le sens de l'inégalité).

Exercice 6. Soit A, B, C, D quatre points situés dans cet ordre sur un cercle ω. Soit P et Q deux points situés sur la droite (AB), de sorte que les points Q, A, B, P soient alignés dans cet ordre, que le cercle circonscrit à ADQ soit tangent à la droite (AC), et que le cercle circonscrit à BCP soit tangent à la droite (BD). Soit M et N les milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[AD]$.

Démontrer que la tangente en A au cercle circonscrit à ANQ, la tangente en B au cercle circonscrit à BMP et la droite (CD) sont concourantes.

Solution de l'exercice 6



Soit X le point d'intersection éventuel dont on doit démontrer l'existence : nous allons en chercher des caractérisations alternatives. Pour ce faire, et au vu des nombreuses relations de tangence et de cocyclicité dont on dispose, une chasse aux angles s'impose.

Par exemple, $(AQ, AD) = (AB, AD) = (CB, CD)$ et $(QA, QD) = (AC, AD) = (BC, BD)$. Il existe donc une similitude directe qui envoie AQD sur CBD. Celle-ci envoie également N sur le milieu de $[CD]$, que l'on notera R. Mais alors

$$(AB, AX) = (AQ, AX) = (NQ, NA) = (RB, RC) = (RB, RX),$$

ce qui signifie que les points A, B, X et R sont cocycliques.

On définit donc le point $\hat{X}$ comme étant le second point d'intersection du cercle circonscrit à ABR avec la droite (CD), et en reprenant le calcul précédent, on remarque que

$$(AQ, A\hat{X}) = (AB, A\hat{X}) = (RB, R\hat{X}) = (RB, RC) = (NQ, NA),$$

ce qui signifie comme prévu que la droite $(A\hat{X})$ est tangente au cercle circonscrit à ANQ. On démontre de même que $(B\hat{X})$ est tangente au cercle circonscrit à BMP, ce qui conclut.

Solution alternative n°1 Une fois n'est pas coutume, on peut utiliser brutalement des coordonnées cartésiennes. On identifie chaque point à ses coordonnées, puis on note O et O_2 les centres des cercles circonscrits à QAD et à QAN. On choisit en outre le repère de sorte que $A = (0, 0)$ et $B = (1, 0)$, puis on pose $C = (x, y)$ et $D = (u, v)$, $O = (s, t)$ et $O_2 = (s_2, t_2)$. Ainsi, $N = (u/2, v/2)$, $Q = (2s, 0)$ et $s_2 = s$.

Les égalités $OC^2 = OA^2 + AC^2$ et $OA^2 = OD^2$ se réécrivent comme $sx + ty = 0$ et $2(su + tv) = u^2 + v^2$, de sorte que

$$s = \frac{u^2 + v^2}{2\delta} y,$$

où l'on a posé $\delta = uy - vx$. De même, l'égalité $O_2A^2 = O_2N^2$ se réécrit comme $4(us + vt_2) = u^2 + v^2$, de sorte que

$$t_2 = \frac{u^2 + v^2 - 4us}{4v}.$$

Par ailleurs, notons $Z = (z, w)$ le point de (CD) pour lequel (AZ) est tangente au cercle circonscrit à AQN. L'alignement de Z avec C et D indique qu'il existe un réel λ tel que $Z = \lambda C + (1 - \lambda) D$; l'orthogonalité de (AX) avec (AO_2) indique que $\overrightarrow{AO_2} \cdot \overrightarrow{AZ} = sz + t_2 w = 0$. On en déduit que $s(\lambda x + u - \lambda u) + t_2(\lambda y + v - \lambda v) = 0$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{su + t_2 v}{s(u - x) + t_2(v - y)} \\
&= \frac{4suv + (u^2 + v^2 - 4us)v}{4s(u - x)v + (u^2 + v^2 - 4us)(v - y)} \\
&= \frac{(u^2 + v^2)v}{(u^2 + v^2)(v - y) + 4(uy - vx)s} \\
&= \frac{(u^2 + v^2)v}{(u^2 + v^2)(v - y) + 2(u^2 + v^2)y} \\
&= \frac{v}{v + y}.
\end{aligned}$$

Pour des raisons de symétrie, le point Z' de (CD) pour lequel (BZ') est tangente au cercle circonscrit à BPM est lui aussi décrit par la relation $Z' = \mu D + (1 - \mu) C$, avec $\mu = y/(v + y)$. Mais alors $\lambda + \mu = 1$, ce qui signifie comme prévu que $Z = Z'$.

Remarque : Dans cette deuxième solution, on n'a même pas utilisé la cocyclicité des points A, B, C et D, qui se traduit par l'égalité $v(x^2 + y^2) + uy = vx + (u^2 + v^2)y$. Ainsi, l'hypothèse de cocyclicité mentionnée dans l'énoncé avait pour but principal de rendre le problème plus accessible.

Par ailleurs, une caractérisation alternative du point X qui reste valide dans ce cadre plus général est la suivante : si l'on note Y le point d'intersection des droites (AC) et (BD), puis Z le point d'intersection des droites (AD) et (BC), X est en fait le point d'intersection des droites (YZ) et (CD). Cette caractérisation se vérifie assez simplement en calculant les coordonnées des points Y et Z.

Commentaire des correcteurs L'exercice a été relativement bien trouvé. Des approches à coup de loi des sinus et de chasse aux rapports étaient possibles. En revanche, beaucoup trop d'élèves introduisent encore les centre des cercles circonscrits pour traduire les hypothèses de tangence, alors que cela est souvent très inefficace comparé à l'usage du théorème de l'angle tangentiel. Beaucoup d'élèves annoncent vouloir tenter des transformations compliquées ou introduire beaucoup de nouveaux points avant même d'essayer une chasse aux angles avec les points existant déjà. Il faut **TOUJOURS** commencer par tester des idées simples et à sa portée plutôt que d'essayer des méthodes conceptuelles.

Il est également dommage de ne pas voir plus d'élèves introduire le milieu de $[CD]$, alors que la figure présente déjà quelques milieux et que l'on sait qu'en présence de milieux de segments, introduire de nouveaux milieux peut s'avérer très utile pour obtenir des égalités d'angles.

Exercice 7. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Morgane écrit au tableau, en base 10, les nombres $2023, 2023 \times 2, \ldots, 2023 \times n$. Pour tout chiffre c compris entre 1 et 9, elle note alors $\mathsf{d}_c(n)$ le nombre d'apparitions du chiffre c sur le tableau. Par exemple, si $n = 3$, elle écrit les nombres 2023, 4046 et 6069, donc $\mathsf{d}_1(3) = \mathsf{d}_5(3) = \mathsf{d}_7(3) = \mathsf{d}_8(3) = 0$, $\mathsf{d}_3(3) = \mathsf{d}_9(3) = 1$, $\mathsf{d}_2(3) = \mathsf{d}_4(3) = 2$ et $\mathsf{d}_6(3) = 3$; ces neuf nombres prennent donc exactement quatre valeurs.

Démontrer qu'il existe une infinité d'entiers $n \geqslant 1$ pour lesquels les neuf nombres $\mathsf{d}_1(n), \mathsf{d}_2(n), \ldots, \mathsf{d}_9(n)$ prennent exactement deux valeurs.

Solution de l'exercice 7 Soit k un multiple de $\varphi(2023)$, soit $\ell = (10^k - 1)/2023$. Nous allons démontrer que ℓ est une solution. Pour ce faire, on introduit l'ensemble

$$\Omega = \{2023n \colon 1 \leqslant n \leqslant \ell\}.$$

Les éléments de Ω décrivent précisément l'ensemble des résidus modulo $10^k - 1$ qui sont des multiples de 2023, chaque résidu étant obtenu exactement une fois. Par conséquent, l'application $\phi \colon x \mapsto 10x$, qui définit une permutation de $\mathbb{Z}/(10^k - 1)\mathbb{Z}$, définit aussi une permutation de l'ensemble des résidus qui sont des multiples de 2023, et induit donc une permutation de Ω lui-même. Concrètement, si l'on écrit les éléments de Ω en base 10 avec k chiffres (quitte à laisser des 0 en apparence inutiles sur la gauche), ϕ envoie $\overline{a_{k-1}a_{k-2}\ldots a_1a_0}^{10}$ sur $\overline{a_{k-2}a_{k-3}\ldots a_1a_0a_{k-1}}^{10}$.

Pour tout chiffre c et tout entier i tel que $0 \leqslant i \leqslant k-1$, on note $\Omega(c,i)$ l'ensemble des éléments de Ω dont le chiffre a_i, de poids 10^i, est égal à c ; on pose abusivement $\Omega(c,k) = \Omega(c,0)$. Lorsque $0 \leqslant i \leqslant k-1$, la bijection ϕ induit une bijection de $\Omega(c,i)$ vers $\Omega(c,i+1)$. Ainsi, les ensembles $\Omega(c,0), \Omega(c,1), \ldots, \Omega(c,k-1)$ sont tous de même cardinal, et

$$\mathsf{d}_c(\ell) = |\Omega(c,0)| + |\Omega(c,1)| + \cdots + |\Omega(c,k-1)| = k\,|\Omega(c,0)|.$$

Or, $\Omega(c,0)$ est formé des nombres $2023n$ pour lesquels $1 \leqslant n \leqslant \ell$ et $c \equiv 3n \pmod{10}$. Puisque $\ell \equiv -1/3 \equiv 3 \pmod{10}$, on en déduit que $|\Omega(c,0)|$ vaut $(\ell+7)/10$ si c vaut 3, 6 ou 9, et vaut $(\ell-3)/10$ sinon. Cela signifie que les cardinaux $|\Omega(c,0)|$ prennent exactement deux valeurs lorsque c varie de 1 à 9, et donc que les entiers $\mathsf{d}_c(\ell)$ prennent eux aussi deux valeurs.

Commentaire des correcteurs Le problème était très difficile. Peu d'élèves l'ont abordé et, parmi eux, plusieurs on formulé des remarques sur la périodicité qu'il était ensuite difficile de valoriser. L'idée était de se demander pourquoi 2023 marcherait et de tester des petits cas pour trouver une conjecture à prouver : la propriété remarquable pour 2023 était d'être premier avec 10 et de ne pas terminer par 1, donc le premier petit cas intéressant était 3 :il se trouve que les solutions que donne ce petit cas sont exactement des solutions générales au problème !

Une autre approche, plus qualitative, était possible ; elle consistait à se dire qu'il fallait que $2023n$ soit une puissance de 10 moins 1, pour avoir une répartition quasi-uniforme de tous les chiffres de 1 à 9. Une fois la forme générale des solutions trouvées, on pouvait montrer qu'il s'agissait effectivement de solutions, en dénombrant les occurrences de chaque chiffre et en montrant qu'on pouvait permuter cycliquement les chiffres des nombres.

Problèmes EGMO

Exercice 8. Un jardinier et un pivert jouent au jeu suivant, dans leur jardin dont la forme est celle d'une grille 2022×2022 formée de 2022^2 cases. Deux cases sont considérées comme voisines si elles ont un sommet ou une arête en commun. Initialement, chaque case abrite un arbre de taille 0. Puis, à chaque tour de jeu,

- ▷ le jardinier choisit une case ; les arbres de cette case et des cases adjacentes (soit de quatre à neuf cases en tout) voient tous leur taille augmenter de 1 ;
- ▷ le pivert choisit alors quatre cases ; les arbres de ces cases voient tous leur taille diminuer de 1 (ou rester égale à 0 si le pivert a choisi une case avec un arbre de taille 0).

On dit qu'un arbre est *resplendissant* si sa taille vaut au moins 10^6. Trouver le plus grand entier A pour lequel le jardinier pourra s'assurer, en un nombre fini de tours de jeu, et quels que soient les choix du pivert, d'avoir fait pousser au moins A arbres resplendissants.

Solution de l'exercice 8 Nous allons démontrer que l'entier recherché est $A = 5n = 2271380$, où l'on a posé $n = 674^2 = (2022/3)^2$.

Tout d'abord, voici une stratégie pour le pivert. Il numérote les lignes et les colonnes de 1 à 2022, puis colorie en noir chaque case située dans une colonne c et une ligne ℓ pour lesquelles 3 ne divise ni c, ni ℓ. Parmi les quatre à neuf cases sur lesquelles le jardinier agit à chaque tour, au plus quatre sont noires. Le pivert choisit alors les cases noires en question ; si cela fait moins de quatre cases, il choisit d'autres cases au hasard.

Ce faisant, il s'assure, à la fin du tour de jeu, qu'aucun arbre situé dans une case noire n'aura vu sa taille augmenter. Une récurrence immédiate indique donc que nul arbre situé dans une case noire ne verra sa hauteur dépasser 1, et puisqu'il y a $4n$ cases noires, on ne pourra jamais dépasser un total de $2022^2 - 4n = 5n$ arbres resplendissants.

Réciproquement, voici une stratégie pour le jardinier ; on pose $m = 10^6$. Faisant fi de la coloration imposée par le pivert, il colorie en rouge chaque case située dans une colonne c et une ligne ℓ pour lesquelles $c \equiv \ell \equiv 2 \pmod 3$. Il y a n cases rouges, et chaque case est soit rouge, soit adjacente à une case rouge. Le jardinier pose alors $k = (4n+1)m + 1$ puis, au cours des kn premiers tours de jeu, il choisit chaque case rouge exactement k fois. Il a donc fait croître de k la hauteur de chaque arbre du jardin.

Soit a le nombre d'arbres qui ne sont *pas* resplendissants à l'issue de cette première partie du jeu : le pivert a dû choisir au moins $k - m$ fois chacun de ces a arbres. Puisqu'il a choisi $4kn$ arbres au cours des kn tours de jeu, en déduit que $a(k-m) \leqslant 4kn$, donc que

$$(k-m)(a-4n-1) \leqslant 4kn - (k-m)(4n+1) = (4n+1)m - k < 0.$$

Puisque $k \geqslant m$, cela signifie que $a < 4n+1$, donc que $a \leqslant 4n = 9n - A$.

En conclusion, l'entier recherché est bien $A = 5n$.

Commentaire des correcteurs Le problème a été beaucoup abordé mais assez mal traité dans l'ensemble. De nombreuses copies donnent des stratégies raisonnables pour les joueurs sans justifier qu'elle soient réellement optimales, ou donnent une stratégie optimale sachant que l'autre joueur joue la stratégie raisonnable précédemment décrite.

Il y avait deux parties à ce problème, qui ont rarement été bien séparées :

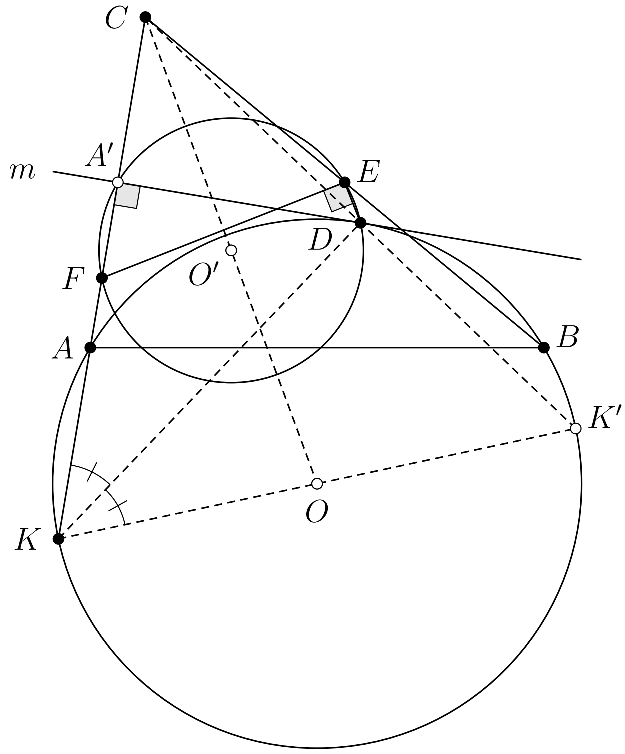
- ▷ donner une stratégie pour le pivert, valable même si le jardinier agit de manière chaotique, et
- ▷ donner une stratégie pour le jardinier, valable même si le pivert agit de manière chaotique.

Une justification de la stratégie du jardinier ne peut pas commencer par « si le pivert joue le mieux possible pour lui », car la stratégie doit marcher complètement indépendamment de l'autre joueur. Par exemple, fournir un pavage était la bonne manière de justifier la stratégie du pivert, puisque peu importe les choix du jardinier, le pivert peut s'adapter. Le lecteur est très fortement encouragé à lire les commentaires formulés à propos du problème 4, qui présentait le même énoncé mais était destiné aux élèves du groupe Junior.

La plupart des élèves ont tout de même réussi à se forger une intution de la bonne borne, ce qui n'était pas évident.

Exercice 9. Soit ABC un triangle, et soit E le milieu de $[BC]$. Soit m la médiatrice de $[AC]$, et soit D un point de m tel que le cercle circonscrit à ABD soit tangent à m. Enfin, soit K le point d'intersection, autre que A, entre le cercle circonscrit à ABD et la droite (AC), et soit F le milieu de $[CK]$. Démontrer que les droites (DE) et (EF) sont perpendiculaires.

<u>*Solution de l'exercice 9*</u>



Une première difficulté est de tracer la figure : comment tracer un point tangent à une droite et passant par deux points donnés ? Une stratégie usuelle, en pareil cas, est d'inverser le tracé : on commence par placer les points A, B et D, puis on en déduit la tangente m et le point C.

Notons maintenant Ω et Ω' les cercles circonscrits à ABD et DEF, puis O et O' leurs centres. Notre figure chèrement acquise suggère que Ω', m et (AC) sont concourantes. Ce n'est pas là une surprise : en effet, il s'agit de démontrer que $\mathcal{C}'$ est le cercle de diamètre $[FD]$, ou encore que le milieu de $[AC]$, que l'on notera A', appartient à Ω'.

Or, les trois points A', E et F sont les milieux respectifs des segments $[CA]$, $[CB]$ et $[CK]$. Le cercle circonscrit à ces trois points, dont on souhaite démontrer qu'il s'agit de Ω', est donc l'image de Ω par l'homothétie de centre C et de rayon $1/2$. Au vu de la figure, il s'agit donc de démontrer, si l'on note K' le symétrique de K par rapport à O, que cette homothétie envoie K' sur D, c'est-à-dire que D est le milieu de $[K'C]$. Or, par construction, on sait déjà que $\widehat{KDK'} = 90°$.

On va donc maintenant démontrer que (KD) est la bissectrice de $\widehat{CKK'}$, grâce à une chasse aux angles. Tout d'abord, puisque AKO est isocèle en O et que (AK) et (DO) sont perpendiculaires à m, on sait que

$$(KC, KK') = (KA, KO) = (AO, AK) = (OA, OD).$$

D'autre part, puisque m est tangente à Ω, on sait également que

$$(KC, KD) = (KA, KD) = (DA, DA') = (DA, CA) + 90° = (DA, DO) + 90°.$$

Puisque ADO est isocèle en O, on en conclut comme souhaité que

$$2(KC,KD) = 2(DA,DO) = (DA,DO) + (AO,AD) = (OA,OD) = (KC,KK').$$

<u>*Commentaire des correcteurs*</u> Problème convenablement traité, avec plusieurs copies qui arrivent à aller loin voire à conclure avec des remarques simples sur la figure, comme l'angle droit $\widehat{KDC}$. Peu d'élèves ont pensé à introduire le point K' de la solution officielle ; même si introduire ce point n'était pas strictement nécessaire, tous les élèves qui l'ont fait on ensuite résolu le problème et obtenu d'excellentes notes.

Il peut donc être judicieux d'introduire de nouveaux points mais beaucoup le font sans raison précise, simplement pour exprimer un angle d'une nouvelle façon. Ici, on a de très fortes raisons de vouloir introduire le point K', et il est nécessaire de se convaincre de la possible utilité d'un point avant de l'introduire, au risque de se perdre dans des considérations inutiles.

Exercice 10. Soit $k \geqslant 2$ un entier. Trouver le plus petit entier $n \geqslant k+1$ pour lequel il existe un ensemble E de n réels, deux à deux distincts, dont chaque élément peut s'écrire comme la somme de k autres éléments de E, qui sont eux-mêmes deux à deux distincts.

<u>*Solution de l'exercice 10*</u> Soit n un entier et E un ensemble tels que décrits dans l'énoncé. On trie les éléments de E dans l'ordre croissant : ce sont $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$. Enfin, soit s la somme de tous les éléments de S.

Puisque $x_1 \geqslant x_2 + x_3 + \cdots + x_{k+1}$ et $x_n \leqslant x_{n-1-k} + x_{n-k} + \cdots + x_{n-1}$, on sait que

$$\begin{aligned} 2x_1 + (n-k-1)x_n &\geqslant 2x_1 + x_{k+2} + x_{k+3} + \cdots + x_n \geqslant s \\ &\geqslant x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-2-k} + 2x_n \geqslant (n-k-1)x_1 + 2x_n, \end{aligned}$$

la première et la dernière inégalité étant strictes si $n \geqslant k+3$.

Lorsque n vaut $k+1$, $k+2$ et $k+3$, on obtient respectivement les inégalités absurdes $2x_1 \geqslant 2x_n$, $2x_1 + x_n \geqslant x_1 + 2x_n$ et $2x_1 + 2x_n > 2x_1 + 2x_n$. Par conséquent, $n \geqslant k+4$.

Réciproquement, si $n = k+4$, et si $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ est un ensemble convenable, il s'agit d'identifier, pour tout entier $i \leqslant n$, trois réels $x_u < x_v < x_w$ distincts de i et tels que x_i est la somme des réels x_j lorsque $j \neq i, u, v, w$; ou, alternativement, tels que $x_u + x_v + x_w = s - 2x_i$. On pose alors $\ell = \lfloor k/2 \rfloor$, de sorte que $\ell \geqslant 1$, puis on procède par disjonction de cas, en fonction de la parité de k.

- Si k est pair, on pose $E = \{-\ell-2, -\ell-1, \ldots, -2, -1, 1, 2, \ldots, \ell+1, \ell+2\}$. La somme des éléments de E vaut $s = 0$. On choisit alors les réels x_u, x_v et x_w comme suit :
  - si $3 \leqslant x_i \leqslant \ell+2$, on pose $x_u = -x_i$, $x_v = 1 - x_i$ et $x_w = -1$;
  - si $1 \leqslant x_i \leqslant 2$, on pose $x_u = -3$, $x_v = -x_i$ et $x_w = 3 - x_i$;
  - si $-\ell-2 \leqslant x_i \leqslant -1$, on reprend les choix de x_u, x_v et x_w effectués pour $-x_i$, puis on change leurs signes.
- Si k est impair, on pose $E = \{-\ell-2, -\ell-1, \ldots, \ell+1, \ell+2\}$; il s'agit du même ensemble que précédemment, auquel on a ajouté l'entier 0. La somme des éléments de E vaut toujours $s = 0$, et il suffit de traiter le cas où $x_i = 0$, cas pour lequel on choisit $x_u = -2$, $x_v = -1$ et $x_w = 3$.

En conclusion, l'entier recherché est $n = k+4$.

<u>*Commentaire des correcteurs*</u> Le problème a été très peu abordé. C'est dommage, car il était possible de faire de nombreuses remarques simples mais valorisées. Certaines élèves ont traité le cas $k = 2$ plus ou moins correctement, ce qui est un bon début.