PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 5 : POT-POURRI
À RENVOYER AU PLUS TARD LE 28 AVRIL 2023

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe junior est constitué des élèves nés en 2008 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe senior.
- Les exercices classés “Juniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés “Seniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Exercices Juniors

Exercice 1. Trouver toutes les triplets d'entiers positifs (x, y, z) satisfaisant l'équation

$$x! + 2^y = z!.$$

<u>*Solution de l'exercice 1*</u>

Soit (x, y, z) un triplet solution.

On cherche dans un premier temps à réduire le nombre de valeurs que x peut prendre. Pour ce faire notons que $x! < z!$ donc $x < z$. En particulier, $x!$ divise $z!$ et $x!$, donc $x!$ divise $z! - x! = 2^y$. Supposons par l'absurde que $x \geqslant 3$, dans ce cas 3 divise $x!$ mais ne divise pas 2^y, ce qui rend impossible le fait que $x!$ divise 2^y. Ainsi $x = 0, 1$ ou 2.

On effectue maintenant une disjonction de cas entre $x! = 1$ donc $x = 0$ ou 1, ou bien $x! = 2$ donc $x = 2$.

- **Cas** $x = 0$ **ou** 1 **:** l'équation devient $1 + 2^y = z!$. On effectue alors une deuxième disjonction de cas
  - **Cas** $y = 0$: on trouve $z = 2$. Réciproquement, $(0, 0, 2)$ et $(1, 0, 2)$ sont bien solution.
  - **Cas** $y \geqslant 1$ **:** ainsi $1 + 2^y \geqslant 3$ et $1 + 2^y$ est impair. Or $z!$ est pair si $z \geqslant 2$, et vaut 0 ou 1 si $z = 1$, aucun des deux cas ne peut donc satisfaire notre équation. Ainsi, si on suppose que $y \geqslant 1$, il n'y a pas de solution.
- **Cas** $x = 2$ **:** On distingue encore selon les valeurs de y :
  - **Cas** $y = 0$ **:** on obtient $3 = z!$ qui n'a pas de solutions (car $2! < 3 < 3!$).
  - **Cas** $y = 1$ **:** on obtient $4 = z!$ qui n'a pas de solutions (car $2! < 3 < 3!$).
  - **Cas** $y \geqslant 2$ **:** on obtient que 2 divise $2^y + 2$, mais que 4 ne divise pas $2^y + 2$. Ainsi 2 divise $z!$ mais 4 ne divise pas $z!$, donc $z = 2$ ou 3. Comme de plus $2^y + 2 \geqslant 4 + 2 = 6$, on obtient $z = 3$, donc $2 + 2^y = 6$, donc $2^y = 4$ donc $y = 2$. Réciproquement, $(2, 2, 3)$ est bien solution car $2 + 4 = 6$.

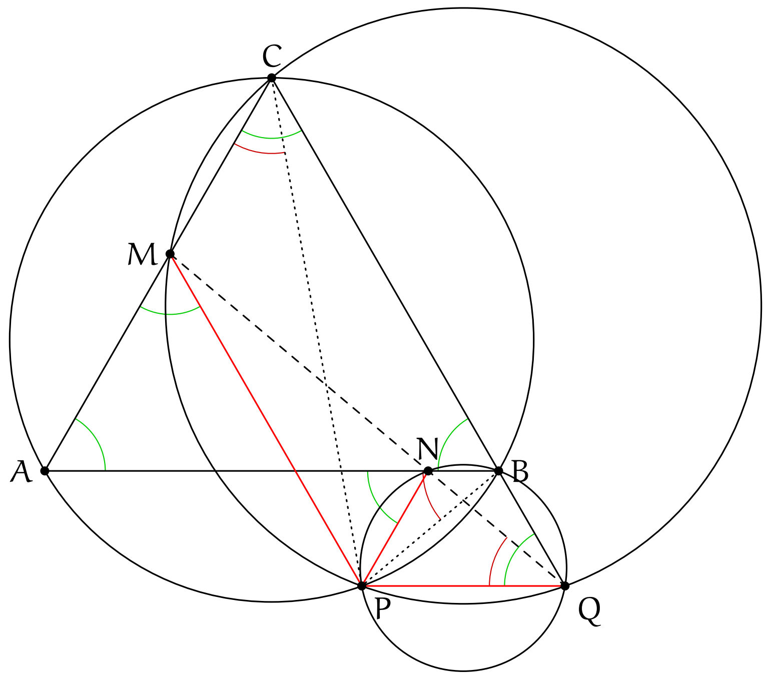
Ainsi les solutions sont les triplets $(0, 0, 2)$, $(1, 0, 2)$ et $(2, 2, 3)$.

<u>**Commentaire des correcteurs :**</u> L'exercice, plutôt simple, a été abordé par un grand nombre d'élèves. La plupart ont réussi à trouver le bon ensemble de solutions, et ont bien pensé à utiliser les modulos ou la divisibilité, ce qui est très bien. Cependant, de nombreuses erreurs ont été commises, consistant à négliger de traiter proprement les petits cas. Par exemple, de nombreuses copies affirmaient hâtivement qu'une puissance de 2 est paire, ce qui est faux pour $2^0 = 1$. Il faut faire attention à ce genre de détails. On rappelle également que 0 est un entier positif.

Exercice 2. Soit ABC un triangle equilatéral et P un point sur le cercle circonscrit de ce triangle mais distincs de A, B et C. Les droites passant par P et parallèles à (BC), (CA) et (AB) intersectent les droites (CA), (AB) et (BC) en M, N et Q respectivement. Montrer que les points M, N et Q sont alignés.

Solution de l'exercice 2

On se place dans le cas de la figure suivante :



Montrons que P, N, B, Q sont cocycliques. Comme (PN) est parallèle à (AC), et (NB) est parallèle à (AB), $\widehat{ANP} = \widehat{CAB} = 60$. Comme (PQ) est parallèle à (AB), $\widehat{PQB} = \widehat{ABC} = 60$. Ainsi P, N, B, Q sont cocycliques. Ainsi $\widehat{PQN} = \widehat{PBN} = \widehat{PBA}$.
Montrons que P, M, C, Q sont cocycliques. Comme (PM) est parallèle à (BC), $\widehat{AMP} = \widehat{ACB} = 60$. Or $\widehat{PQC} = \widehat{PQB} = 60$. Ainsi P, M, C, Q sont cocycliques. Ainsi $\widehat{PQM} = \widehat{PCM} = \widehat{PCA}$. Par cocyclité de A, P, B, C, $\widehat{PQM} = \widehat{PCA} = \widehat{PBA} = \widehat{PQN}$ donc Q, N, M sont alignés.

Commentaire des correcteurs : Bien résolu dans l'ensemble. Beaucoup de preuves qui sont un peu trop longues. Quelques erreurs de raisonnement (on ne peut pas utiliser que les points sont alignés pour montrer qu'ils le sont effectivement).

Exercice 3. Soit x, y, z trois réels positifs, tel que $x \leqslant 1$. Démontrer que :

$$xy + y + 2z \geqslant 4\sqrt{xyz}.$$

<u>*Solution de l'exercice 3*</u>
Notons que comme $x \leqslant 1$, $xy+y \geqslant xy+xy = 2xy$. En particulier par inégalité arithmético-géométrique

$$xy + y + 2z \geqslant 2xy + 2z = 2(xy + z) \geqslant 4\sqrt{xyz}$$

ce qui donne l'inégalité voulue.

<u>**Commentaire des correcteurs :**</u> L'exercice était assez simple et a été abordé par de nombreux élèves, et réussi par presque chacun d'entre eux. J'invite toutefois les élèves à bien se relire lorsqu'ils soumettent une copie, afin de vérifier que les inégalités sont écrites correctement et que des cas n'ont pas été oubliés (par exemple en simplifiant une équation par yz alors que yz peut être nul).

Exercice 4. 2024 élèves, tous de taille différente, doivent se placer en file indienne. Cependant, chaque élève ne souhaite pas avoir à la fois devant lui et derrière lui un élève plus petit que lui. Combien y a-t-il de façons de former une telle file indienne ?

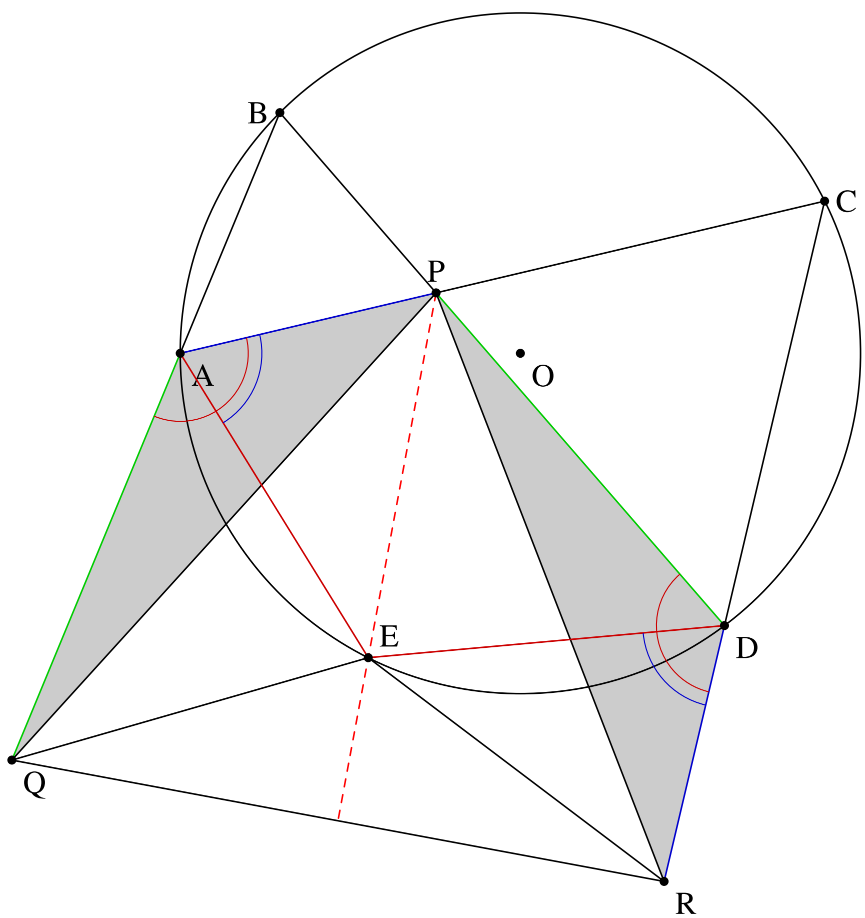
Solution de l'exercice 4

Regardons l'élève de plus grande taille : s'il n'est pas placé au tout début ou à la toute fin de la file, il est entre deux élèves plus petits que lui. Ainsi l'élève le plus grand doit être placé à la fin ou au début.
Via ce raisonnement, et en regardant les petits cas on peut conjecturer que si on doit placer $n \geqslant 1$ élèves tous de taille différente avec la contrainte de l'énoncé, il y a 2^{n-1} possibilités. Montrons cela par récurrence sur n.
Initialisation : pour $n = 1$ élèves, il n'y a qu'une file possible et $1 = 2^{n-1}$.
Hérédité : supposons l'hypothèse vraie au rang n pour un $n \geqslant 1$, montrons qu'elle l'est au rang $n+1$. L'élève le plus grand est frocément placé soit au tout début, soit à la toute fin. Si on l'enlève de la file, la file de n personnes vérifie toujours l'énoncé : il y a donc potentiellement 2^{n-1} possibilité pour la file sans la personne la plus grande. Si on rajoute la personne la plus grande devant ou derrière la file vérifie toujours l'énoncé (car la personne à côté du plus grand ne sera pas entre deux personnes plus petites), comme il y a deux choix de placements du plus grand, il y a $2^n = 2^{n+1-1}$ possibilités pour former la file, ce qui conclut la récurrence.
Ainsi en appliquant la propriété pour $n = 2024$, il y a 2^{2023} possibilités.

Commentaire des correcteurs : Exercice très bien réussi dans l'ensemble, avec peu d'erreurs. Deux méthodes de preuve principales ont été employées : la première est semblable à ce que fait l'énoncé, et consiste à voir comment placer les élèves, un par un. La seconde consiste à comprendre quelle va être la "forme" de la répartition des élèves, en V, et à compter ces configurations par divers arguments.

Exercice 5. Soient A, B, C, D et E cinq points dans cet ordre sur un cercle tels que $AE = DE$. Soit P le point d'intersection de (AC) et (BD). Soit Q le point de la demi-droite $[BA)$ tel que $AQ = DP$. Soit R le point de la demi-droite $[CD)$ tel que $DR = AP$. Montrer que les droites (PE) et (QR) sont perpendiculaires.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u>
On se place dans le cas de la figure suivante :



Dans cet énoncé on a de nombreuses égalités de longueur ($AQ = DP, DR = AP, AE = DE$. Comme sur la figure, il ne faut pas hésiter à colorier les longueurs égales pour voir des potentiels triangles isométriques, et avancer dans le problème).
Les triangles DRP et AQP ont l'air d'être isométriques : prouvons-le. Notons déjà que $DR = AQ$ et $DP = AR$ par hypothèse. De plus $\widehat{RDP} = 180 - \widehat{CDP} = 180 - \widehat{CDB} = 180 - \widehat{CAB} = 180 - \widehat{PAB} = \widehat{PAQ}$. Ainsi les triangles DRP et AQP sont isométriques.
En particulier $PQ = PR$, donc P est sur la médiatrice de (QR).
Les triangles DER et AEP ont l'air d'être isométriques : prouvons-le. On a $DE = AE$ et $DR = AP$. De plus $\widehat{EDR} = 180 - \widehat{EDC} = \widehat{CAE} = \widehat{PAE}$. Ainsi les triangles DER et AEP sont isométriques et $EP = ER$.
De même les triangles AEQ et DEP sont isométriques (car A, Q jouent un rôle symétrique à D, R), ainsi $EP = EQ$, donc $ER = EQ$: E est sur la médiatrice de (QR).
Ainsi la médiatrice de (QR) est (EP), donc (EP) et (QR) sont perpendiculaires.

<u>**Commentaire des correcteurs :**</u> L'exercice est très bien réussi.

Exercice 6. Est-il possible de trouver un bloc de 1000 nombres entiers strictement positifs consécutifs qui contient exactement 5 nombres premiers ?

Solution de l'exercice 6

A première vue, il semble difficile de garantir exactement 5 nombre premier dans un bloc de 1000 entiers consécutifs : aucun théorème d'arithmétique élémentaire permet de s'assurer d'avoir des nombres premiers rapprochés, mais pas d'autres nombres premier entre eux. On peut donc essayer de se demander combien de nombres premiers on peut trouver dans un bloc de 1000 nombres consécutifs.

Déjà, il est relativement connu qu'on peut trouver 1000 nombres consécutifs dont aucun n'est premier. En effet, $1001!+2, \dots, 1001!+1001$ ne sont pas premiers : si $2 \leqslant i \leqslant 1001$, $1001!+i$ est divisible par i et strictement plus grand que i, donc il n'est pas premier.

On peut aussi remarquer qu'entre 1 et 1000 il y a beaucoup de nombres premiers : en tout cas strictement plus que 5, vu que $2, 3, 5, 7, 11, 13$ sont premiers.

Notons $P(n)$ le nombre de nombres premiers dans l'ensemble $\{n, \dots, n+999\}$. L'étape naturelle après nos deux remarques précédentes est de se demander comment évalue le nombre $P(n)$ lorsque n parcourt $\mathbb{N}^*$. Pour passer de $\{n, \dots, n+999\}$ à $\{n+1, \dots, n+1+999\}$, on rajoute $n+1000$ et on enlève n. Ainsi on ajoute au plus un nombre premier, et on enlève au plus un nombre premier : on a donc

$$P(n+1) - P(n) \in \{-1, 0, 1\}.$$

Ainsi P ne varie que de 1 en 1, et on sait que $P(1) > 5 > P(1001!+2)$. Il semble assez intuitif que cela implique qu'il existe un entier k tel que $P(k) = 5$, nous allons prouver cela.

Soit k le premier entier tel que $P(k) \leqslant 5$. On sait que $k > 1$, donc $P(k-1) > 5$ par minimalité. Ainsi, on a forcément $P(k) = P(k-1) - 1$ (pour avoir $P(k) \leqslant 5$), donc $P(k) > 4$. Ainsi $P(k) \geqslant 5$, or par définition $P(k) \leqslant 5$, donc $P(k) = 5$.

Ainsi la réponse à l'énoncé est oui : il existe bien un bloc de 1000 entiers consécutifs avec exactement cinq entiers premiers.

Commentaire des correcteurs : L'exercice a globalement été bien traité, mais peu d'élèves ont réussi à bien formuler le fait qu'il existe 1000 nombres composés consécutifs.

Exercice 7. On dit qu'un entier $k > 1$ est *superbe* s'il existe m, n, a trois entiers strictement positifs tels que

$$5^m + 63n + 49 = a^k.$$

Déterminer le plus petit entier superbe.

Solution de l'exercice 7

Supposons que $k = 2$ est superbe : il existe trois entiers strictement positifs m, n, a tels que $5^m + 63n + 49 = a^2$. En regardant modulo 3, $5^m + 1 \equiv 2^m + 1 \equiv a^2 \pmod 3$. Or les puissances de 2 modulo 9 valent alternativement 2 si m est impair, puis 1 si m est pair, donc $2^m + 1$ vaut soit 2 soit 0 modulo 3. Comme les carrés modulo 3 sont 0 et 1, on en déduit que $2^m + 1$ vaut 0 modulo 3, donc que m est impair. En regardant modulo 7, on obtient que $5^m \equiv a^2 \pmod 7$. Or les carrés modulo 7 sont $0, 1, 2, 4$, et les puissances de 5 alternent entre $1, 5, 4, 6, 2, 3$. Ainsi 5^m vaut $0, 1, 2$ ou 4 si et seulement si m vaut $0, 2$ ou 4 modulo 6, ce qui est impossible car m est pair. Ainsi $k \neq 2$.
Supposons que $k = 3$ est superbe : il existe trois entiers strictement positifs m, n, a tels que $5^m + 63n + 49 = a^3$. En regardant modulo 7, $5^m \equiv a^3$. Or les cubes modulo 7 sont $0, 1, 6$. Et les puissances de 5 modulo 7 alternent entre $1, 5, 4, 6, 2, 3$. Ainsi on obtient que $m \equiv 0 \pmod 6$ ou $m \equiv 3 \pmod 6$: dans tous les cas 3 divise m. On regarde alors modulo 9 : on a $5^m + 4 \equiv a^3$. Or comme m est divisible par 3, 5^m et a^3 sont des cubes. Les cubes modulo 9 sont $0, 1, 8$. Ainsi $5^m - a^3$ peut valoir $0, 1, 2, 7, 8$ modulo 9, mais pas 4 ce qui est contradictoire. Ainsi $k \neq 3$.
Supposons que $k = 3$ est superbe : il existe trois entiers strictement positifs m, n, a tels que $5^m + 63n + 49 = a^4 = (a^2)^2$. En particulier, 2 est superbe ce qui est contradictoire.
Notons que 5 est superbe : en prenant $a = 3$, on a $a^k = 3^5 = 243 = 5^1 + 63 \times 3 + 49$ donc 5 est superbe. Ainsi 5 est le plus petit entier superbe.

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été traité par peu d'élèves, qui l'ont bien résolu.

Exercice 8. Soit x, y, z trois nombres réels vérifiant $x + y + z = 2$ et $xy + yz + zx = 1$. Déterminer la valeur maximale que peut prendre $x - y$.

Solution de l'exercice 8

Soit (x, y, z) un triplet vérifiant l'énoncé. Quitte à échanger x et le maximum du triplet, puis z et le minimum du triplet, on peut supposer $x \geqslant z \geqslant y$, tout en augmentant $x - y$.
Comme $x + y + z = 2$, on a $4 = (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + xz) = x^2 + y^2 + z^2 + 2$, donc $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.
En particulier $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (x-z)^2 = 2(x^2+y^2+z^2) - 2(xy+yz+xz) = 2$. Or par inégalité arithmético quadratique, $(x - z)^2 + (z - y)^2 \geqslant \frac{(x-z+z-y)^2}{2} = \frac{(x-y)^2}{2}$, donc $2 \geqslant (x - y)^2 + \frac{(x-y)^2}{2} = \frac{3(x-y)^2}{2}$, donc $(x - y) \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}$.
Essayons de montrer que cette valeur est atteignable. Si on a $x-y = \frac{2}{\sqrt{3}}$, alors on a égalité dans l'inégalité arithmético quadratique : ainsi $x-z = z-y$, donc comme leur somme vaut $x-y$, $x-z = z-y = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
En particulier, comme $x+y+z = 3z+(z-x)+(z-y) = 3z$, on a $z = \frac{2}{3}$, $x = \frac{2}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}$ et $y = \frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}$.
Réciproquement, pour ces valeurs de x, y, z, on a bien :

— $x + y + z = 3 \times \frac{2}{3} = 2$

— $xy + yz + zx = xy + (x + y)z = (\frac{2}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}})(\frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{4}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9} - \frac{1}{3} + \frac{8}{9} = \frac{9}{9} = 1$

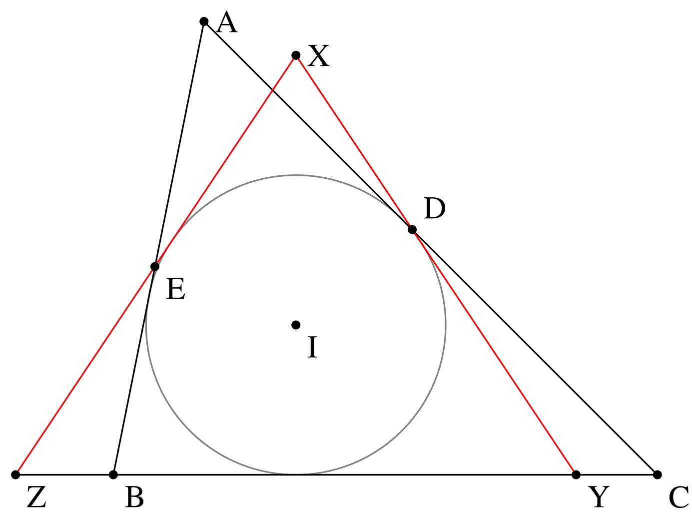
— $x - y = 2 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Ainsi (x, y, z) vérifie les conditions de l'énoncé, et $x-y = \frac{2}{\sqrt{3}}$, donc la valeur maximale que peut prendre $x - y$ est $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été assez peu abordé. La principale erreur est d'oublier de trouver des x, y, z pour lesquels on a égalité.

Exercice 9. Soit ABC un triangle et I le centre du cercle inscrit. On note D et E les pieds des bissectrices issues de B et C. Soit X l'intersection des symétriques de (AB) et (AC) par rapport à (CE) et (BD). Montrer que les droites (XI) et (BC) sont perpendiculaires.

Solution de l'exercice 9



Notons Y et Z les intersections respectives de (DX) et (EX) avec la droite (BC). On va montrer que le triangle ZXY est isocèle en X et que I est le centre de son cercle inscrit. Si on arrive à montrer ces propriétés, la conclusion de l'exercice suivrait. En effet, la droite (XI) est alors la bissectrice du triangle XYZ isocèle en X, donc en également la hauteur.

Soit ω le cercle inscrit du triangle ABC, on sait donc que la droite (AB) est tangente à ω, comme la droite (CI) est un axe de symétrie de ω il suit que la droite (XE) est également tangente à ω. De la même manière, la droite (DX) est tangente à ω. Par définition la droite (YZ) est la droite (BC) donc également tangente à ω. Cela montre que ω est le cercle inscrit du triangle XYZ. En particulier, la droite (XI) est la bissetrice issue de X.

On finit la preuve de l'exercice en montrant que $\widehat{XZY} = \widehat{XYZ}$. On note α l'angle en A dans le triangle ABC. On a alors,

$$\begin{aligned}
\widehat{XZY} &= \widehat{EZC} \\
&= \widehat{XEC} - \widehat{ECZ} \\
&= \widehat{AEC} - \widehat{ECA} \\
&= \widehat{EAC} = \alpha.
\end{aligned}$$

De la même manière $\widehat{XYZ} = \alpha$ ce qui montre bien que le triangle ZYX est isocèle en X et conclut la preuve de l'exercice.

Commentaire des correcteurs : Cet exercice de géométrie a été abordé par très peu d'élèves. La plupart d'entre eux l'ont bien réussi, par diverses méthodes. Les méthodes de résolution les plus simples, dans cet exercice, étaient celles qui faisaient le plus appel aux arguments de symétrie. On ne peut que conseiller, face à une figure qui présente de telles symétries, de chercher à les exploiter.

Exercices Seniors

Exercice 10. Trouver toutes les triplets d'entiers positifs (x, y, z) satisfaisant l'équation

$$x! + 2^y = z!.$$

<u>*Solution de l'exercice 10*</u>

Soit (x, y, z) un triplet solution.

On cherche dans un premier temps à réduire le nombre de valeurs que x peut prendre. Pour ce faire notons que $x! < z!$ donc $x < z$. En particulier, $x!$ divise $z!$ et $x!$, donc $x!$ divise $z! - x! = 2^y$. Supposons par l'absurde que $x \geqslant 3$, dans ce cas 3 divise $x!$ mais ne divise pas 2^y, ce qui rend impossible le fait que $x!$ divise 2^y. Ainsi $x = 0, 1$ ou 2.

On effectue maintenant une disjonction de cas entre $x! = 1$ donc $x = 0$ ou 1, ou bien $x! = 2$ donc $x = 2$.

- **Cas** $x = 0$ **ou** 1 **:** l'équation devient $1 + 2^y = z!$. On effectue alors une deuxième disjonction de cas
  - **Cas** $y = 0$: on trouve $z = 2$. Réciproquement, $(0, 0, 2)$ et $(1, 0, 2)$ sont bien solution.
  - **Cas** $y \geqslant 1$ **:** ainsi $1 + 2^y \geqslant 3$ et $1 + 2^y$ est impair. Or $z!$ est pair si $z \geqslant 2$, et vaut 0 ou 1 si $z = 1$, aucun des deux cas ne peut donc satisfaire notre équation. Ainsi, si on suppose que $y \geqslant 1$, il n'y a pas de solution.
- **Cas** $x = 2$ **:** On distingue encore selon les valeurs de y :
  - **Cas** $y = 0$ **:** on obtient $3 = z!$ qui n'a pas de solutions (car $2! < 3 < 3!$).
  - **Cas** $y = 1$ **:** on obtient $4 = z!$ qui n'a pas de solutions (car $2! < 3 < 3!$).
  - **Cas** $y \geqslant 2$ **:** on obtient que 2 divise $2^y + 2$, mais que 4 ne divise pas $2^y + 2$. Ainsi 2 divise $z!$ mais 4 ne divise pas $z!$, donc $z = 2$ ou 3. Comme de plus $2^y + 2 \geqslant 4 + 2 = 6$, on obtient $z = 3$, donc $2 + 2^y = 6$, donc $2^y = 4$ donc $y = 2$. Réciproquement, $(2, 2, 3)$ est bien solution car $2 + 4 = 6$.

Ainsi les solutions sont les triplets $(0, 0, 2)$, $(1, 0, 2)$ et $(2, 2, 3)$.

<u>**Commentaire des correcteurs :**</u> La quasi-totalité des élèves ayant traité l'exercice l'ont bien compris. Mais résoudre l'équation sans faute était plus compliqué : bien des élèves ont oublié des cas (typiquement, le cas $x = 0$; on rappelle d'ailleurs que $0! = 1$), fait des généralisations hâtives (par exemple que $1 + 2^{y-1}$ était toujours impair – ce qui n'est vrai que si $y \geqslant 2$, et il *faut* traiter le cas $y \leqslant 1$), ou oublié de vérifier que les triplets qu'ils ont trouvés étaient des solutions (faute assez répandue ; il faut **toujours** le faire, même s'il ne s'agit que de dire "on vérifie réciproquement que [...] sont bien des solutions"). Quelques élèves n'ont pas justifié certains arguments plus généraux ("les seules factorielles de différence 1 sont 2 et 1", ou "les seules factorielles qui sont des puissances de 2 sont 2 et 1"), ou l'ont fait très vaguement (en parlant de "vitesse de croissance", qui n'est pas un concept applicable ici). Ce genre d'affirmation doit *toujours* être justifié (surtout dans la mesure où l'argument tient en une ou deux phrases). Enfin, un nombre surprenant de copies contient de légères incohérences ou des étourderies, en général non sanctionnées : nous invitons les candidats à bien se relire avant d'envoyer les copies.

Exercice 11. Félix souhaite colorier les entiers de 1 à 2023 tels que si a, b sont deux entiers **distincts** entre 1 et 2023 et a divise b, alors a et b sont de couleur différentes. Quel est le nombre minimal de couleur dont Félix a besoin ?

Solution de l'exercice 11

On peut essayer de colorier de manière gloutonne les nombres : 1 peut être colorié d'une couleur qu'on note a, 2 et 3 de la même couleur b (mais pas de la couleur a), puis $4, 6$ de la couleur c (on peut aussi colorier 5 et 7 de la couleur c), etc. Il semble donc qu'une coloriation performante soit pour tout k de colorier les nombres n vérifiant $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$ de la couleur $k+1$, tant que $n \leqslant 2023$. Ainsi on colorie $[1, 2[$ de couleur 1, $[2, 4[$ de couleur 2, ..., [1024,2023] de couleur 11. Si $a \neq b$ sont de la même couleur $k \in \{1, \ldots, 11\}$ alors $0 < \frac{a}{b} < \frac{2^{k+1}}{2^k} = 2$, donc si b divise a, alors $\frac{a}{b}$ est entier donc vaut 1. On a alors $a = b$ ce qui est contradictoire. Ainsi notre coloriage vérifie bien la condition de l'énoncé, et nécessite 11 couleurs.

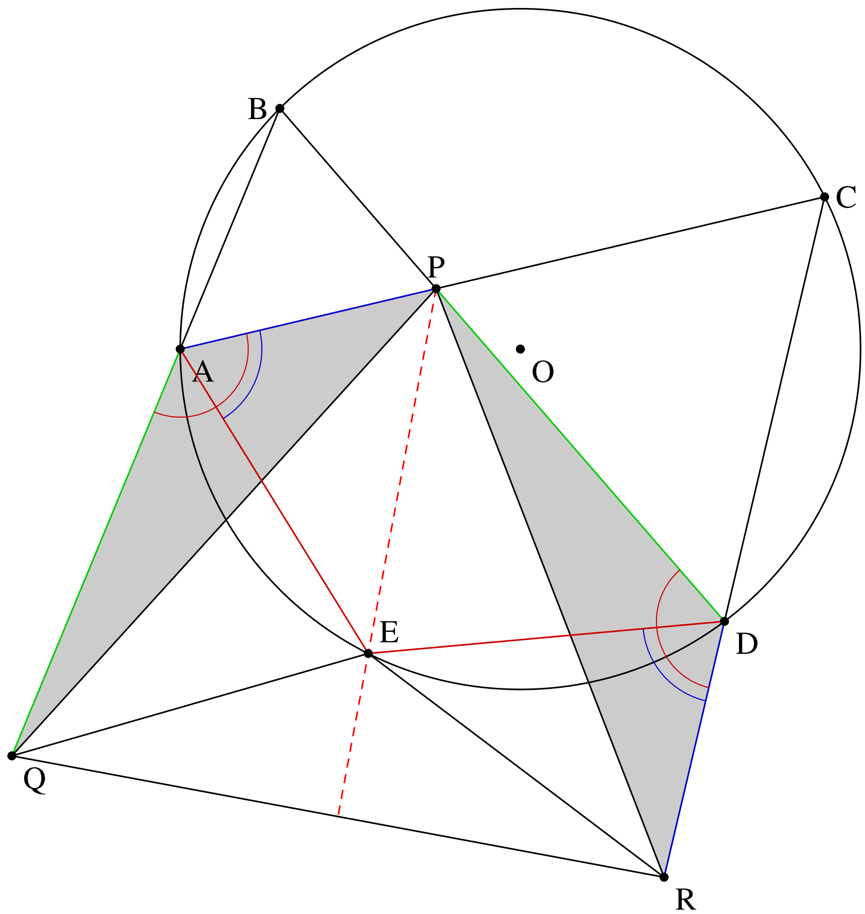
Réciproquement si un coloriage vérifie l'énoncé, les nombres $2^0 = 1, 2^1, \ldots, 2^{10}$ sont entre 1 et 2023, et si on prend $a \neq b$ parmi ces 11 nombres, soit a divise b, soit b divise a. Ainsi ces 11 nombres sont de couleurs différentes. Il faut donc au moins 11 couleurs.

Ainsi le nombre minimal de couleurs requises est 11.

Commentaire des correcteurs : L'exercice est très bien réussi. Comme dans tout exercice où on demande de trouver le nombre minimal tel que, il est important de découper la preuve en deux parties : pourquoi $n = 11$ couleurs suffisent, et pourquoi si $n \leqslant 10$, n couleurs ne suffisent pas.

Exercice 12. Soient A, B, C, D et E cinq points dans cet ordre sur un cercle tels que $AE = DE$. Soit P le point d'intersection de (AC) et (BD). Soit Q le point de la demi-droite $[BA)$ tel que $AQ = DP$. Soit R le point de la demi-droite $[CD)$ tel que $DR = AP$. Montrer que les droites (PE) et (QR) sont perpendiculaires.

Solution de l'exercice 12
On se place dans le cas de la figure suivante :



Dans cet énoncé on a de nombreuses égalités de longueur ($AQ = DP, DR = AP, AE = DE$. Comme sur la figure, il ne faut pas hésiter à colorier les longueurs égales pour voir des potentiels triangles isométriques, et avancer dans le problème).
Les triangles DRP et AQP ont l'air d'être isométriques : prouvons-le. Notons déjà que $DR = AQ$ et $DP = AR$ par hypothèse. De plus $\widehat{RDP} = 180 - \widehat{CDP} = 180 - \widehat{CDB} = 180 - \widehat{CAB} = 180 - \widehat{PAB} = \widehat{PAQ}$. Ainsi les triangles DRP et AQP sont isométriques.
En particulier $PQ = PR$, donc P est sur la médiatrice de (QR).
Les triangles DER et AEP ont l'air d'être isométriques : prouvons-le. On a $DE = AE$ et $DR = AP$. De plus $\widehat{EDR} = 180 - \widehat{EDC} = \widehat{CAE} = \widehat{PAE}$. Ainsi les triangles DER et AEP sont isométriques et $EP = ER$.
De même les triangles AEQ et DEP sont isométriques (car A, Q jouent un rôle symétrique à D, R), ainsi $EP = EQ$, donc $ER = EQ$: E est sur la médiatrice de (QR).
Ains i la médiatrice de (QR) est (EP), donc (EP) et (QR) sont perpendiculaires.

Commentaire des correcteurs : Cet exercice a été réussi par une large majorité des élèves l'ayant traité. Le principal problème était une imprécision dans le vocabulaire : deux triangles dont toutes les longueurs sont égales sont dits **isométriques** plutôt qu'égaux ou identiques. Quant à la notion de triangles semblables, elle est plus faible que la précédente, et traduit simplement l'égalité des angles (et donc aussi des rapports de longueurs, mais pas des longueurs elles-mêmes).

Exercice 13. On dit qu'un polynôme P est *fantabuleux* s'il existe des réels $a_0, \ldots, a_{2022}$ tel que

$$P(X) = X^{2023} + a_{2022}X^{2022} + \cdots + a_1X + a_0,$$

s'il a 2023 racines $r_1, \ldots, r_{2023}$ (non nécessairement distinctes) dans $[0, 1]$, et si $P(0) + P(1) = 0$. Déterminer la valeur maximale que peut prendre $r_1 \cdot r_2 \cdots r_{2023}$ pour un polynôme fantabuleux.

Solution de l'exercice 13

La réponse est 2^{-2023}, on va montrer cela en deux temps, dans un premier temps on va montrer que l'on ne peut pas trouver de polynôme avec une valeur plus grand et dans un second temps exhiber un polynôme qui vérifie les conditions de l'énoncé et dont le produit de racine est bien égal à 2^{-2023}.

Notons que par hypothèse, on peut réécrire $P(X) = \prod_{k=1}^{2023}(X - r_k)$. En particulier, $P(0) = -\prod_{k=1}^{2023} r_k$ et $P(1) = \prod_{k=1}^{2023}(1 - r_k)$. L'hypothèse $P(0) + P(1) = 0$ devient :

$$\prod_{k=1}^{2023}(1 - r_k) = \prod_{k=1}^{2023} r_k = r_1 \cdot r_2 \cdots r_{2023}.$$

Ainsi comme pour tout k, $r_k \geqslant 0$ et $1 - r_k \geqslant 0$, par inégalité arithmético-géométrique,

$$(r_1 \cdot r_2 \cdots r_{2023})^2 = \prod_{k=1}^{2023}(1 - r_k)r_k \leqslant \prod_{k=1}^{2023}\left(\frac{(1 - r_k) + r_k}{2}\right)^2 = \frac{1}{4^{2023}}.$$

Ainsi $r_1 \cdot r_2 \cdots r_{2023} \leqslant 2^{-2023}$.

Notons de plus que si $P(X) = \left(X - \frac{1}{2}\right)^{2023}$, P est bien unitaire de degré 2023, a 2023 racines dans $[0, 1]$, vérifie $P(0) + P(1) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{2023} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2023} = 0$ donc P est fantabuleux. Le produit de ses racines vaut 2^{-2023}. Ainsi la valeur maximale que peut prendre $r_1 \cdot r_2 \cdots r_{2023}$ pour un polynôme fantabuleux est 2^{-2023}.

Commentaire des correcteurs : L'exercice demandait de trouver la valeur maximale que pouvait prendre un produit de racines pour une classe de polynômes particuliers. Presque tous les élèves ont trouvé le cas réalisant le maximum (et donc sa valeur), et une proportion satisfaisante de ces élèves ont mené la preuve jusqu'au bout, généralement en appliquant l'IAG. Les relations de Viète semblent bien maitrisées mais n'étaient absolument pas nécessaires à la résolution du problème. Une idée à retenir : l'IAG est souvent une inégalité judicieuse pour montrer qu'un produit de réels positifs est maximal lorsque tous ses termes sont égaux.

Exercice 14. Est-il possible de trouver un bloc de 1000 nombres entiers strictement positifs consécutifs qui contient exactement 5 nombres premiers ?

Solution de l'exercice 14

A première vue, il semble difficile de garantir exactement 5 nombre premier dans un bloc de 1000 entiers consécutifs : aucun théorème d'arithmétique élémentaire permet de s'assurer d'avoir des nombres premiers rapprochés, mais pas d'autres nombres premier entre eux. On peut donc essayer de se demander combien de nombres premiers on peut trouver dans un bloc de 1000 nombres consécutifs.

Déjà, il est relativement connu qu'on peut trouver 1000 nombres consécutifs dont aucun n'est premier. En effet, $1001! + 2, \ldots, 1001! + 1001$ ne sont pas premiers : si $2 \leqslant i \leqslant 1001$, $1001! + i$ est divisible par i et strictement plus grand que i, donc il n'est pas premier.

On peut aussi remarquer qu'entre 1 et 1000 il y a beaucoup de nombres premiers : en tout cas strictement plus que 5, vu que $2, 3, 5, 7, 11, 13$ sont premiers.

Notons $P(n)$ le nombre de nombre premier dans l'ensemble $\{n, \ldots, n+999\}$. L'étape naturelle après nos deux remarques précédentes est de se demander comment évalue le nombre $P(n)$ lorsque n parcourt $\mathbb{N}^*$. Pour passer de $\{n, \ldots, n + 999\}$ à $\{n + 1, \ldots, n + 1 + 999\}$, on rajoute $n + 1000$ et on enlève n. Ainsi on ajoute au plus un nombre premier, et on enlève au plus un nombre premier : on a donc

$$P(n + 1) - P(n) \in \{-1, 0, 1\}.$$

Ainsi P ne varie que de 1 en 1, et on sait que $P(1) > 5 > P(1001! + 2)$. Il semble assez intuitif que cela implique qu'il existe un entier k tel que $P(k) = 5$, nous allons prouver cela.

Soit k le premier entier tel que $P(k) \leqslant 5$. On sait que $k > 1$, donc $P(k - 1) > 5$ par minimalité. Ainsi, on a forcément $P(k) = P(k - 1) - 1$ (pour avoir $P(k) \leqslant 5$), donc $P(k) > 4$. Ainsi $P(k) \geqslant 5$, or par définition $P(k) \leqslant 5$, donc $P(k) = 5$.

Ainsi la réponse à l'énoncé est oui : il existe bien un bloc de 1000 entiers consécutifs avec exactement cinq entiers premiers.

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été très réussi par les élèves qui l'ont cherché. Une erreur que j'ai retrouvée souvent est au niveau de la preuve de l'existence de 1000 entiers consécutifs non premiers. Certains écrivent que $1000!, 1000! + 1, \ldots, 1000! + 999$ ne sont pas premiers, alors que rien ne permet de voir a priori que $1000! + 1$ n'est pas premier. Par ailleurs, d'autres élèves ont voulu utilisé le théorème des nombres premiers, ce qui n'était pas forcément une bonne idée, car mettant en jeu des concepts d'équivalents de suite qui ne sont pas bien maîtrisés. Même si ce raisonnement peut être justifié, je n'ai pas jugé suffisant de dire que la densité des nombres premiers étant nulle, il existe 1000 entiers consécutifs tous non premiers.

Exercice 15. On dit qu'un nombre rationnel strictement positif q est *magnifique* s'il existe quatre entiers strictement positifs a, b, c, d tels que

$$q = \frac{a^{2021} + b^{2023}}{c^{2022} + d^{2024}}.$$

Existe-t-il un rationnel strictement positif qui n'est pas magnifique ?

<u>*Solution de l'exercice 15*</u>

La question posée est assez déroutante : il a l'air d'être dur de décider ou non si un nombre peut s'écrire de cette forme. On peut donc essayer de se fixe un rationnel strictement positif de la forme r/s avec r, s des entiers strictement positif, et chercher des bons a, b, c, d pour avoir

$$\frac{r}{s} = \frac{a^{2021} + b^{2023}}{c^{2022} + d^{2024}}.$$

Cela permettra au moins de comprendre si tous les rationnels sont magnifique, ou de trouver un ensemble de rationnels qui pourraient être non magnifique. Ici le choix de a, b, c, d n'est pas clair. Le plus naturel est de prendre $a = r^{r_a} s^{s_a}$, $b = r^{r_b} s^{s_b}$, $c = r^{r_c} s^{s_c}$ et $d = r^{r_d} s^{s_d}$ avec les r_i et s_i des entiers positifs. On obtient alors :

$$\frac{r}{s} = \frac{r^{2021 r_a} s^{2021 s_a} + r^{2023 r_b} s^{2023 s_b}}{r^{2022 r_c} s^{2022 s_c} + r^{2024 r_d} s^{2024 s_d}}.$$

Pour espérer factoriser et simplifier ce terme, le plus simple est d'avoir $2021 r_a = 2023 r_b$, i.e. de poser $r_b = 2021 r_1$ et $r_a = 2023 r_1$ pour un certain entier positif r_1. De même on pose $r_c = 2024 r_2$ et $r_d = 2022 r_2$ pour un certain entier positif r_2, $s_a = 2023 s_1$ et $s_b = 2021 s_1$ pour un certain entier positif s_1, et $s_c = 2024 s_2$ et $s_d = 2022 s_2$ pour un certain entier positif r_2.
On a alors

$$\frac{r}{s} = \frac{r^{2021 \times 2023 r_1} s^{2021 \times 2023 s_1}}{r^{2022 \times 2024 r_2} s^{2022 \times 2024 s_2}} = r^{2021 \times 2023 r_1 - 2022 \times 2024 r_2} s^{2021 \times 2023 s_1 - 2022 \times 2024 s_2}.$$

Ainsi il suffit de trouver r_1, r_2, s_1, s_2 des entiers positifs tels que $2021 \times 2023 r_1 - 2022 \times 2024 r_2 = 1$ et $-2021 \times 2023 s_1 + 2022 \times 2024 s_2 = 1$. Pour cela, il suffit d'utiliser le théorème de Bézout. En effet, 2021×2023 et 2022×2024 sont premiers entre eux : si on raisonne par l'absurde en considérant p un facteur premier de ces deux nombres, p divise deux nombres entre 2021 et 2024, donc divise leur différence, donc $p = 2$ ou 3. Or 2021×2023 est impair, et non divisible par 3, donc on a une contradiction. Ainsi il existe deux entiers e, f tels que $2021 \times 2023 e - 2022 \times 2024 f = 1$. Quitte à rajouter 2022×2024 plusieurs fois à e, et 2021×2023 le même nombre de fois à f, on peut supposer e, f positifs. De même il existe deux entiers positifs g et h tels que $-2021 \times 2023 g + 2022 \times 2024 h = 1$. Poser $s_1 = g, s_2 = h, r_1 = e, r_2 = f$ donne bien que r/s est magnifique : ainsi tout rationnel strictement positif est magnifique.

<u>Commentaire des correcteurs :</u> L'exercice a été très réussi par les élèves qui l'ont cherché.

Exercice 16. Soit p un nombre premier. Martin la grenouille est situé en position 0 sur la droite réelle. A chaque seconde, Martin effectue un mouvement : il peut rester à sa position, faire un saut de 1 sur la droite, ou faire un saut de 1 sur la gauche. Martin souhaite être revenu au bout de $p-1$ mouvements à sa position initiale : il note alors s_p le nombre de séquences de $p-1$ mouvements lui permettant de revenir à sa position initiale. Quel est le reste de s_p modulo p ?
Par exemple, pour $p=3$, $s_p=3$ puisque Martin peut choisit de rester à sa position deux fois, de faire un saut sur la droite puis sur la gauche, ou faire un saut sur la gauche puis sur la droite.

Solution de l'exercice 16
On propose deux solutions : une première solution très élémentaire et uniquement combinatoire, et une seconde solution utilisant des idées de combinatoire analytique, couplées à de la théorie des nombres.
Première solution :
Notons $a_n(k)$ le nombre de suites de n mouvements tel que si Martin était initialement à la position 0, il se retrouve à la position k (par exemple, pour $n=2$, $a_2(0)=2$ et $a_2(2)=a_2(-2)=1$). Cela revient donc à compter le nombre de n uplets à valeurs dans $\{-1,0,1\}$ de somme k. On va essayer de comprendre $(a_p(k))_k$ modulo p, et de trouver une relation de récurrence sur les $(a_n(k))$ pour trouver le reste de $a_{p-1}(0)$ modulo p.
On va montrer le lemme suivant :

Lemme 1. $a_p(k)$ vaut 0 modulo p, sauf si $k=p,0$ ou $-p$: dans ce cas $a_p(k)$ vaut 1 modulo p.

Démonstration. On se fixe k un entier différent de $\pm p$ (si $k=\pm p$, on voit bien que $a_p(k)=1$), on note A l'ensemble des p uplets de somme k. On définit $T : A \mapsto A$ l'application suivante : si $(a_1,\dots,a_p)$ est dans A, $T(a_1,\dots,a_p)=(a_2,\dots,a_p,a_1)$. Il est clair que $T(a_1,\dots,a_p)$ est bien dans A, et qu'en appliquant p fois T à un élément de A, on obtient le même élément de A. Notons que T est clairement injective, donc bijective car A est fini. Pour chaque y, on définit $\Omega_y := \{T^k(y) | k \geqslant 0$ où T^k est la composée k fois de T.
Soit x,y deux éléments de A tels que $\Omega_y \cap \Omega_x$ est non vide. Il existe h,ℓ positif tels que $T^h(x)=T^\ell(y)$. En particulier en appliquant $\ell(p-1)$ fois T, $T^{h+\ell(p-1)}(x)=T^{\ell p}(y)=y$, donc pour tout entier j positif, $T^j(y)=T^{h+\ell(p-1)+j}(x)\in\Omega_x$: on a donc $\Omega_y\subset\Omega_x$. De même on a l'inclusion réciproque, donc $\Omega_x=\Omega_y$. Ainsi les (Ω_x) partitionnent l'ensemble A.
Soit x dans A, montrons que Ω_x est de cardinal p, sauf si $x=(0,\dots,0)$. Déjà, comme T appliqué p fois donne l'identité, on sait que $\Omega_x=\{T^k(x)|k\in\{0,\dots,p-1\}$ donc est au plus de cardinal p. Supposons qu'il existe $i\neq j$ deux éléments de $\{0,\dots,p-1\}$ tels que $T^i(x)=T^j(x)$. Par symétrie, on peut supposer $i<j$, on a donc $T^{p-j+i}(x)=T^{p-j+j}(x)=x$, donc $x=T^k(x)$ avec $h=p-j+i\in\{1,\dots,p-1\}$. Posons $x=(x_1,\dots,x_n)$, l'équation $x=T^h(x)$ se retraduit par $x_j=x_{j+h}$ pour tout entier j (en prenant les indices modulo p. En particulier, pour tout entier $\ell\geqslant 0$, $x_{j+h\ell}=x_j$. En prenant ℓ un inverse de h modulo p, on a que pour tout j, $x_j=x_{j+1}$. Ainsi x est de la forme $(1,\dots,1),(0,\dots,0)$ ou $(-1,\dots,-1)$ ce qui est contradictoire avec le fait que $k\neq\pm p$ sauf si $x=(0,\dots,0)$. Ainsi $\Omega_x=\{T^k(x)|k\in\{0,\dots,p-1\}$ est bien de cardinal p sauf si $x=(0,\dots,0)$.
Comme A est partitionné en ensembles de cardinal p, sa taille est divisible par p si $k\neq 0$. Si $k=0$, A privé de $(0,\dots,0)$ est partitionné en ensembles de cardinal p, donc la taille de A vaut 1 modulo p. $\square$

Maintenant, notons que pour tout entier k, et tout $n\geqslant 2$, $s_n(k)=s_{n-1}(k-1)+s_{n-1}(k)+s_{n-1}(k+1)$. En effet, un n-uplet de somme k à valeurs dans $\{-1,0,1\}$ peut soit commencer par 1 et finir par un $n-1$-uplet de somme $k-1$, soit commencer par -1 et finir par un $n-1$-uplet de somme $k+1$, soit commencer par 0 et finir par un $n-1$-uplet de somme k. Donc il y a autant de n-uplets de somme k que de $n-1$-uplets de somme $k-1,k$ ou $k+1$.

Maintenant, à partir de ces observations essayons de conclure. Pour $p = 3$, $s_p = 3$, donc le reste de s_p modulo p est 0. Via la formule précédente,

$$\begin{aligned} s_{p-1}(k) - s_{p-1}(k+3) &= s_{p-1}(k) + s_{p-1}(k+1) + s_{p-1}(k+2) - (s_{p-1}(k+1) + s_{p-1}(k+2) - s_{p-1}(k+3)) \\ &= s_p(k+1) - s_p(k+2) \end{aligned}$$

En sommant la formule précédente pour k multiple de 3 entre 0 et $3(p-1)$, on obtient que :

$$s_{p-1}(0) - s_{p-1}(3p) = \sum_{k=0}^{p-1} s_p(3k+1) - s_p(3k+2)$$

Or on a $s_p(n) = 0$ sauf pour $n = \pm p$ ou 0. Et on a clairement $s_{p-1}(3p) = 0$, car $3p > p-1$, donc un $p-1$-uplet de $\{-1, 0, 1\}$ ne peut pas avoir somme $3p$. Ainsi la formule précédente donne que s_{p-1} vaut 1 modulo p et p est de la forme $3k+1$, $p-1$ si p est de la forme $3k+2$.

Seconde solution :
L'énoncé peut être reformulé de la façon suivante : s_p est le nombre de $p-1$ uplets dans $\{-1, 0, 1\}$ de somme nulle. En particulier, en ajoutant 1 à chaque pas, s_p est le nombre de $p-1$ uplets dans $\{0, 1, 2\}$ de somme $p-1$. C'est donc également le coefficient de degré $p-1$ de $(1+X+X^2)^{p-1}$ d'après la théorie des séries génératrices : en effet, chaque terme du produit $(1+X+X^2)\dots(1+X+X^2)$ correspond à $p-1$ choix de $0, 1$ ou 2, et la somme des différents pas correspond à la puissance de X dans le produit global.
Ainsi on cherche à comprendre ce que vaut le reste du $p-1$-ième coefficient de $Q(X) := (1+X+X^2)^{p-1}$ modulo p. On peut essayer de comprendre les valeurs de Q modulo p : si a est un entier, et p ne divise pas $1+a+a^2$, $Q(a) \equiv 1 \pmod p$ par le théorème de petit Fermat. Sinon $Q(a) \equiv 0 \pmod p$.
En particulier $\sum_{a=0}^{p-1} Q(a) \equiv -n_p$ où n est le nombre de solution de racines distinctes de X^2+X+1 modulo p. Pour $p = 3$, il n'y a qu'une seule racine : 1. Pour $p \neq 3$, 1 n'est pas racine, donc ce sont les racines de $X^3 - 1$ différentes de 1. Or il existe un élément d'ordre 3 modulo p si et seulement si 3 divise $p-1$: en effet, s'il existe un élément d'ordre 3 modulo p, par petit Fermat, 3 divise $p-1$. Si 3 divise $p-1$, soit y une racine primitive modulo p, $y^{(p-1)/3}$ est un élement d'ordre 3.
Ainsi $n_3 = 1$, si $p \neq 3$ et 3 ne divise pas $p-1$, $n_p = 0$ et si $p \neq 3$ et 3 divise $p-1$, X^2+X+1 a une racine. Comme c'est un polynôme de degré 2 il a 2 racines. De plus celles-ci sont distinctes : sinon sont discrminant vaudrait 0 modulo p, or celui-ci vaut -3. Ainsi si 3 divise $p-1$, $n = 2$.

Or Q est unitaire de degré $2(p-1)$. Ecrivons Q sous la forme $\sum_{k=0}^{2(p-1)} a_k X^k$ avec $a_{2(p-1)} = 1$ et $a_{p-1} = s_p$. On a :

$$\sum_{a=0}^{p-1} Q(a) \equiv \sum_{k=0}^{2(p-1)} a_k \sum_{a=0}^{p-1} a^k \pmod p$$

Pour $k = 0$, $\sum_{a=0}^{p-1} a^k \equiv 0 \pmod p$. Pour $k > 0$, $0^k = 0$, donc si on se donne y une racine primitive modulo p,

$$\sum_{a=0}^{p-1} a^k \equiv \sum_{a=1}^{p-1} a^k \equiv \sum_{n=0}^{p-2} (y^n)^k \equiv \sum_{n=0}^{p-2} (y^k)^n \pmod p$$

Si $y^k \not\equiv 1 \pmod n$ (ce qui est le cas si $p-1$ ne divise pas k), alors $\sum\limits_{n=0}^{p-2}(y^k)^n \equiv \frac{y^{(p-1)k}-1}{y^k-1} \equiv 0 \pmod p$ car $y^{p-1} \equiv 1 \pmod p$. Si $p-1$ divise k, $\sum\limits_{n=0}^{p-2}(y^k)^n \equiv p-1 \pmod p$. Ainsi, on obtient

$$\sum_{a=0}^{p-1} Q(a) \equiv \sum_{k=0}^{2(p-1)} a_k \sum_{a=0}^{p-1} a^k \pmod p \equiv -a_{p-1} - a_{2(p-1)} = -a_{p-1} - 1.$$

Donc $a_{p-1} \equiv n-1 \pmod p$
Ainsi :

— Si $p=3$, le reste de s_p modulo p vaut 0,
— si $p \neq 3$ et 3 ne divise pas $p-1$ (i.e. si $p \equiv 2 \pmod 3$), le reste de s_p modulo p vaut $p-1$,
— si 3 divise $p-1$, le reste de s_p modulo p vaut 1.

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été très peu réussi. Les élèves l'ayant réussi ont suivi la première solution. Beaucoup ont essayé de calculer une somme, puis se sont retrouvés très vite bloqués par les coefficients binomiaux, qu'il était difficile de regarder mod p.

Exercice 17. Déterminer toutes les fonctions f injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que tout polynôme $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, celui-ci a une racine réelle si et seulement si le polynôme $\sum_{i=0}^{n} a_i x^{f(i)}$ a une racine réelle.

Solution de l'exercice 17

Il s'avère que la condition d'injectivité était inutile : nous allons prouver le résultat sans l'injectivité de f. Notons que le polynôme 1 n'a pas de racine réelle, la condition de l'énoncé nous apprend que $x^{f(0)}$ n'en a pas non plus : la seule possibilité pour $f(0)$ est donc $f(0) = 0$. De même, $f(n) \neq 0$ si $n \neq 0$ car X^n a une racine réelle, et 1 n'en a pas.
Montrons que $f(n)$ a la même parité que n pour tout entier n. Notons que si n est pair, $X^n + 1$ n'a pas de racine réelle donc $X^{f(n)} + 1$ non plus. Ceci implique que $f(n)$ est pair (sinon -1 serait une racine réelle). De même si n est impair, $f(n)$ est impair. Posons $\alpha = f(1)$, α est donc **impair**.
Soit t un réel. Pour la suite, nous aurons besoin de comprendre, pour tout b réel vérifiant $b > 1$, si l'équation $x^b - x = t$ sur $\mathbb{R}^+$. Pour tout $t > 0$, on pose $f_b : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ qui à x associe $x^b - x$.

Lemme 2. L'équation $x^b - x = t$ a une solution si et seulement si $t \geqslant f_b(x_b)$ où $x_b = \left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{b-1}}$.

Démonstration. La fonction f_b est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$. Lla dérivée de f_b est $bx^{b-1} - 1$, qui est négative jusqu'en x_b puis positive. Ainsi f décroît puis croît. Comme f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, les valeurs prises par f sur $\mathbb{R}^+$ sont exactement $[f(x_b), +\infty[$ par continuité, ce qui donne le résultat voulu. □

On aura aussi besoin du lemme suivant :

Lemme 3. Soit $b > a$ deux entiers strictement positifs, avec b pair. Si l'équation $x^b - x^a = t$ a une solution, alors cette équation a une solution positive.

Démonstration. Soit x une solution de l'équation. Comme b est pair, $|x|^b - |x|^a \leqslant x^b - x^a = t$. Or l'application qui à y associe $y^b - y^a$ est continue, et tend vers $+\infty$ en $+\infty$, donc l'équation $y^b - y^a = t$ a une solution dans $[|x|, +\infty[$, donc une solution positive. □

Maintenant appliquons l'hypothèse de l'énoncé au polynôme $X^{2n} - X - t$. Celui-ci a une racine réelle si et seulement si $t \geqslant f_{2n}(x_{2n})$. En particulier, le polynôme $X^{f(2n)} - X^\alpha - t$ a une racine réelle si et seulement si $t \geqslant f_{2n}(x_{2n})$.

— Si $f(2n) < \alpha$, alors la fonction qui à x associe $x^{f(2n)} - x^\alpha$ tend vers $-\infty$ et $+\infty$, et $+\infty$ en $-\infty$ car α est impair. Ainsi par continuité, l'équation $x^{f(2n)} - x^\alpha = t$ a toujours une solution donc $X^{f(2n)} - X^\alpha - t$ a toujours une racine ce qui est absurde.
— Si $f(2n) = \alpha$, alors le polynôme n'a une racine que pour $t = 0$ ce qui est absurde.

Ainsi $f(2n) > \alpha$. En particulier ,par le lemme précédent le polynôme $X^{f(2n)} - X^\alpha - t$ a une racine réelle si et seulement s'il a une racine réelle positive, c'est-à-dire si et seulement si l'équation $x^{f(2n)} - x^\alpha = t$ a une solution positive. Comme $x \mapsto x^\alpha$ est bijectif de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, le polynôme $X^{f(2n)} - X^\alpha - t$ a une racine réelle si et seulement si l'équation $x^{f(2n)/\alpha} - x = t$ a une racine positive, donc si et seulement si $t \geqslant f_{f(2n)/\alpha}(x_{f(2n)/\alpha})$. Posons $u = f(2n)/\alpha > 1$, on a donc $f_u(x_u) = f_{2n}(x_{2n})$.

— Si $2n > u$, Comme $x_u < 1$, $f_u(x_u) > f_{2n}(x_u) \geqslant f_{2n}(x_{2n}) = f_u(x_u)$ (via les variations de f_{2n}) ce qui est absurde.
— Si $2n < u$, Comme $x_{2n} < 1$, $f_{2n}(x_{2n}) > f_u(x_{2n}) \geqslant f_u(x_u) = f_{2n}(x_{2n})$ (via les variations de f_u) ce qui est absurde.

Ainsi $u = 2n$, donc $f(2n) = 2n\alpha$.

Il reste alors à montrer que si n est impair, $f(n) = \alpha n$. Pour cela on fait de même que dans l'argument précédent : on regarde le polynôme $X^{2n} - X^n - t$, on montre qu'il a une racine réelle si et seulement si

$t \geqslant f_{2n/n}(x_{2n/n}) = f_2(x_2)$. Ensuite on obtient que $X^{f(2n)} - X^{f(n)} - t$ a une racine si et seulement si $t \geqslant f_2(x_2)$. Comme $f(n)$ est impair, et $f(2n)$ pair, on en déduit que $f(2n) > f(n)$, puis que $f_2(x_2) = f_{f(2n)/f(n)}(x_{f(2n)/f(n)})$. De même on prouve que $f(2n)/f(n) = 2$, donc $f(2n) = 2f(n)$. Or $f(2n) = 2n\alpha$, donc $f(n) = n\alpha$. Ainsi si f est solution, f est de la forme $f : n \mapsto an$ pour un certain a impair.

Réciproquement s'il existe a impair tel que $f(n) = an$ pour tout entier positif n, alors si le polynôme $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ a une racine réelle x_0, le polynôme $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^{f(k)} = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^{ak}$ a pour racine $x_0^{1/a}$. Réciproquement si $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^{ak}$ a une racine réelle y_0, y_0^a est racine de $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$. Ainsi f vérifie bien l'énoncé.
Les fonctions vérifiant l'énoncé sont les fonctions telles qu'il existe a impair tel que $f(n) = an$ pour tout entier positif n.

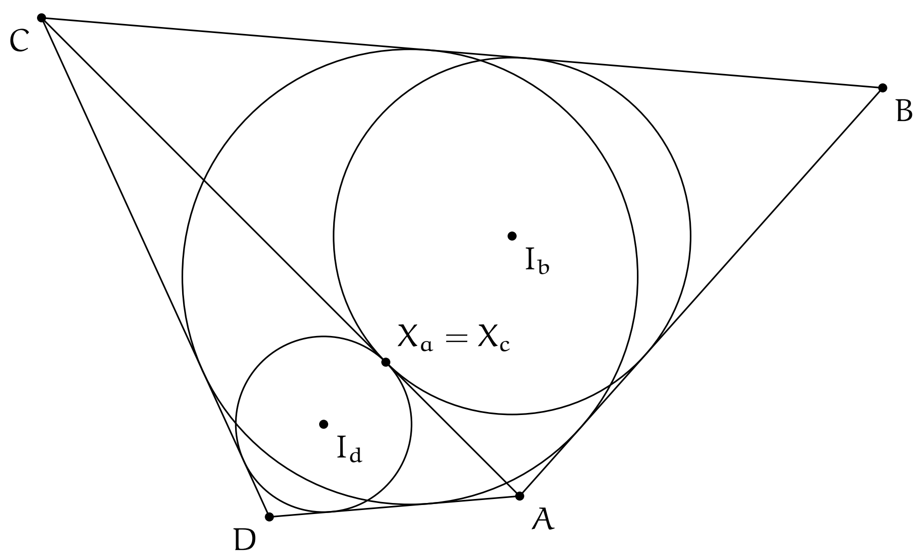
<u>Commentaire des correcteurs :</u> L'exercice a été très peu abordé, mais les élèves l'ayant abordé ont majoritairement réussi l'exercice avec des preuves variées. Attention aux expressions de la forme x^q avec q rationnel et x négatif : cela n'a pas forcément un sens clair. Il faut être très précautionneux.

Exercice 18. Un quadrilatère convexe $ABCD$ admet un cercle inscrit de centre I. Soit I_a, I_b, I_c et I_d les centres des cercles inscrits de triangles DAB, ABC, BCD et CDA respectivement. On suppose que les tangentes communes aux cercle circonscrits de AI_bI_d et CI_bI_d se rencontrent en X et que les tangentes commune extérieures des cercles circonscrits de BI_aI_c et DI_aI_c se rencontrent en Y. Montrer que $\widehat{XIY} = 90$.

<u>*Solution de l'exercice 18*</u>
On note ω_i le cercle inscrit de centre I_i et de rayon r_i pour $i \in \{A, B, C, D\}$, on note également O_A, O_B, O_C et O_D les centres des cercles AI_bI_d, BI_aI_c, CI_bI_d et DI_aI_c. On commence par démontrer le lemme suivant :

Lemme 4. Les cercles ω_a et ω_c sont tangents tous les deux en le même point sur (AC).

Preuve : (On réfère également au Lemme 36 du cours de Géométrie D de Valbonne 2022).



Soit X_a le point de tangence de ω_a sur (BD) et X_c le point de tangence de ω_c sur (BD). On sait que $ABCD$ est circonscriptible, cela implique que $AB - AD = BC - CD$. On Peut calculer la distance BX_a elle vaut

$$BX_a = \frac{AB - AD + BD}{2} = \frac{BC - CD + BD}{2} = BX_c,$$

ce qui montre que $X_a = X_c$. $\square$

On renomme T le point de tangence. Alors les points I_a, T et I_c sont alignés et $(I_aI_c) \perp (BD)$. On note $\widehat{ABT} = 2\varphi$ et $\widehat{TBC} = 2\mu$, alors $\widehat{ABI} = \varphi + \mu$ et $\widehat{ABI_a} = \varphi$, ce qui montre que $\widehat{I_aBI} = \mu$ et ainsi que les droites (BT) et (BI) sont conjuguées isogonales dans le triangle BI_aI_c, or (BT) est la hauteur dans ce même triangle et par un lemme classique on sait alors que la droite (BI) passe également par le centre du cercle circonscrit au triangle BI_aI_c. Donc O_B est sur la droite (BI). De la même manière O_D se trouve sur la droite (DI). On sait aussi que $(O_BO_D) \perp (I_aI_c)$ donc $(DB)//(O_BO_D)$. On va maintenant démontrer que la droite (IY) bissecte l'angle $\widehat{BID}$. X se trouve sur la droite O_BO_D de telle sorte que $\dfrac{XO_B}{XO_D} = \dfrac{r_b}{r_d}$, par le lemme de la bissectrice on veut montrer que $\dfrac{IO_B}{IO_D} = \dfrac{r_b}{r_d}$, or comme $(DB)//(O_BO_D)$

on a $\frac{IO_B}{IO_D} = \frac{IB}{ID}$. On calcule maintenant

$$X := r_b \cdot \frac{1}{r_d} = \frac{\sin(\widehat{IAB}) \cdot AI}{\sin(\widehat{ABI})} \frac{\sin(\widehat{ADI})}{\sin(\widehat{IAD}) \cdot AI},$$

d'après la loi des sinus dans les triangles IAB et IAD, on a d'une part $X = \frac{\sin(\widehat{ADI})}{\sin(\widehat{ABI})}$. On trouve d'autre part,

$$X' := r_b \cdot \frac{1}{r_d} = \frac{2I_aI_c}{\sin(\widehat{I_aDI_c})} \cdot \frac{\sin(\widehat{I_aBI_c})}{2I_aI_c} = \frac{\sin(\widehat{I_aDI_c})}{\sin(\widehat{I_aBI_c})},$$

or, $\widehat{ADI} = \widehat{ADC}/2 = \widehat{I_aDI_c}$ et également $\widehat{ABI} = \widehat{I_aBI_c}$ ce qui montre que $X = X'$ et ainsi que la droite (IY) est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{BID}$. On montre de la même manière que la droite (XI) est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{AIC}$. Dans le but de démontrer que $\widehat{XIY} = 90$ il faut démontrer que les angles $\widehat{AIC}$ et $\widehat{BID}$ ont les même bissectrice. Si la proposition suivante est vraie alors, $(DI, IC) = (AI, IB)$. Ou encore $(CI, ID) + (AI, IB) \equiv 0 \pmod{180}$. On va démontrer cette dernière relation, on appelle E le point d'intersection des droites (AD) et (BC), Alors $(AI, IB) = 90 + \frac{(BE, EA)}{2}$ et $(CI, ID) = 90 - \frac{(BE, EA)}{2}$, donc $(AI, IB) + (BE, EA) = 180 \equiv 0 \pmod{180}$, ce qui conclut.

<u>**Commentaire des correcteurs :**</u> Bien résolu pour les quelques élèves qui ont rendu une copie.