COUPE ANIMATH DE PRINTEMPS

31 mai 2023

Durée : 3 heures (collège), 4 heures (lycée).

Instructions

▷ Les exercices « collégiens » concernent les élèves scolarisés au collège.
Les exercices « lycéens » concernent les élèves scolarisés au lycée.
Chaque exercice est noté sur 7 points.

▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**

▷ **Pour les exercices 1 et 8,** seule une réponse numérique est attendue ; un résultat correct sans justification vaudra donc 7 points, tandis qu'un résultat incorrect sans justification vaudra 0 point. Cependant, si un raisonnement accompagne un résultat faux (ou pas de résultat), ce raisonnement sera lu et noté et pourra rapporter une partie des points de l'exercice.

▷ **À part dans les exercices 1 et 8,** on demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.

▷ Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.

▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.

▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
LES CALCULATRICES SONT INTERDITES, AINSI QUE TOUS LES INSTRUMENTS ÉLECTRONIQUES.
Cela concerne en particulier l'usage de l'ordinateur, et donc de *Geogebra* et de logiciels de traitement de texte.

Après l'épreuve, merci de renvoyer les copies par voie électronique via le formulaire de dépôt disponible à l'adresse suivante :

`http://igm.univ-mlv.fr/~juge/animath/`

Association Animath,
Préparation Olympique Française de Mathématiques (POFM)

`contact-pofm@animath.fr`

Exercices collégiens

Exercice 1. Calculer le nombre

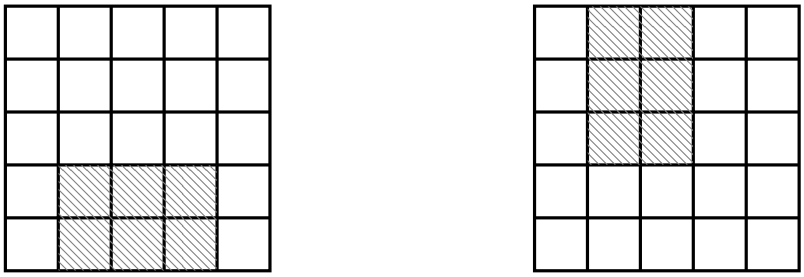
$$\frac{4^8}{8^4}.$$

Seule une réponse numérique est attendue ici.

Exercice 2. Soit ABC un triangle vérifiant $\widehat{CAB} = 20°$. Soit D le milieu du segment $[AB]$. On suppose que $\widehat{CDB} = 40°$. Que vaut l'angle $\widehat{ABC}$?

Exercice 3. On considère une grille 5×5, composée de 25 cases blanches. Vincent souhaite colorier en rouge certaines cases de la grille de telle sorte que tout rectangle 2×3 ou 3×2 contienne au moins une case coloriée. Quel est le plus petit nombre de cases qu'il peut colorier ?

Ci-dessous, à gauche une grille 5×5 où un rectangle 2×3 est hachuré, à droite une grille 5×5 où un rectangle 3×2 est hachuré.



Exercice 4. Soit $ABCDE$ un pentagone dont tous les côtés sont de même longueur, tel que les angles $\widehat{BCD}$ et $\widehat{CDE}$ soient droits, et tel que le point A n'est pas à l'intérieur du quadrilatère $BCDE$. Soit P le point d'intersection des droites (AC) et (BD). Montrer que $AP = PD$.

Exercice 5. Théo a reçu ses notes du trimestre, qui sont toutes des entiers compris entre 1 et 5 (1 et 5 inclus). Il constate que la moyenne de ses notes est inférieure ou égale à 3. Ainsi, pour qu'il ne soit pas privé de dessert pendant une semaine, il compte remplacer sur son relevé de notes toutes ses notes égales à 1 par autant de notes égales à 3. Montrer qu'après cette transformation, la moyenne des notes reste inférieure ou égale à 4.

Exercice 6. Soit x, y des entiers positifs tels que $1 \leqslant y < x$, on dit que le couple (x, y) est *joli* si x et y ont exactement $x - y$ diviseurs positifs en commun. Par exemple, 30 et 42 ont exactement 4 diviseurs en commun : $1, 2, 3$ et 6. Comme $42 - 30 = 12 \neq 4$, le couple $(42, 30)$ n'est donc pas joli. Par contre, le couple $(8, 6)$ est joli, car 6 et 8 ont $8 - 6 = 2$ diviseurs positifs en commun : 1 et 2.

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on note $s(n)$ le nombre de couples d'entiers (x, y) tels que $1 \leqslant y < x \leqslant n$ et que (x, y) soit joli.

a) Existe-t-il un entier $n \geqslant 2$ tel que $s(n) = 2022$?

b) Existe-t-il un entier $n \geqslant 2$ tel que $s(n) = 2023$?

Exercice 7. On considère une grille 10×10, composée de 100 cases. Les lignes de la grille sont numérotées de haut en bas dans l'ordre de 1 à 10 : la ligne la plus haute a le numéro 1, la plus basse le numéro 10. Les colonnes de la grille sont numérotées de gauche à droite dans l'ordre de 1 à 10 : la colonne la plus à gauche a le numéro 1, la plus à droite le numéro 10. Martin colorie certaines cases de la grille, de sorte que pour toute case coloriée c, il existe au plus une case coloriée différente de c dont le numéro de la colonne est supérieur ou égal à celui de la colonne de c et dont le numéro de la ligne est supérieur ou égal à celui de la ligne de c.

Quel est le nombre maximal de cases que Martin peut colorier ?

Exercices lycéens

Exercice 8. Combien y a-t-il de nombres entiers n tels que $\frac{n}{3}$ et $3n$ soient tous deux des nombres entiers entre 1 et 1000 (1 et 1000 inclus) ?

Seule une réponse numérique est attendue ici.

Exercice 9. Soit ABC un triangle vérifiant $\widehat{CAB} = 20°$. Soit D le milieu du segment $[AB]$. On suppose que $\widehat{CDB} = 40°$. Que vaut l'angle $\widehat{ABC}$?

Exercice 10. En utilisant les nombres de 1 à 22 exactement une fois chacun, Antoine écrit 11 fractions : par exemple il peut écrire les fractions $\frac{10}{2}, \frac{4}{3}, \frac{15}{5}, \frac{7}{6}, \frac{8}{9}, \frac{11}{19}, \frac{12}{14}, \frac{13}{17}, \frac{22}{21}, \frac{18}{16}$ et $\frac{20}{1}$.

Antoine souhaite avoir autant que possible de fractions à valeurs entières parmi les fractions écrites : dans l'exemple précédent, il a écrit trois fractions à valeurs entières : $\frac{10}{2} = 5$, $\frac{15}{5} = 3$ et $\frac{20}{1} = 20$. Quel est le nombre maximal de fractions qui peuvent être à valeurs entières ?

Exercice 11. Soit $a_1, \ldots, a_{100}$ 100 entiers distincts tels que $1 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots < a_{100} \leqslant 400$.

Pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant 99$, on pose $d_i = a_{i+1} - a_i$. Montrer qu'il y a au moins 15 nombres parmi $d_1, d_2, \ldots, d_{99}$ qui sont égaux.

Exercice 12. Soit $ABCD$ un losange, et soit E le point d'intersection des diagonales. Soit F le milieu du segment $[BE]$, et G le milieu du segment $[AD]$. Soit I le point d'intersection des droites (FG) et (AC), et soit K le symétrique de A par rapport au point I. Que vaut $\frac{EK}{EA}$?

Exercice 13. On considère une grille 10×10, composée de 100 cases. Les lignes de la grille sont numérotées de haut en bas dans l'ordre de 1 à 10 : la ligne la plus haute a le numéro 1, la plus basse le numéro 10. Les colonnes de la grille sont numérotées de gauche à droite dans l'ordre de 1 à 10 : la colonne la plus à gauche a le numéro 1, la plus à droite le numéro 10. Martin colorie certaines cases de la grille, de sorte que pour toute case coloriée c, il existe au plus une case coloriée différente de c dont le numéro de la colonne est supérieur ou égal à celui de la colonne de c et dont le numéro de la ligne est supérieur ou égal à celui de la ligne de c.

Quel est le nombre maximal de cases que Martin peut colorier ?

Exercice 14. Soit n un entier strictement positif. Aline souhaite écrire $2n$ nombres réels au tableau de sorte que

- ▷ les $2n$ nombres écrits ne sont pas tous égaux,
- ▷ si Aline entoure n nombres écrits au tableau, quel que soit le choix d'Aline, la somme des n nombres entourés est égale au produit des n nombres qui ne sont pas entourés.

Pour quelles valeurs de n Aline peut-elle réaliser son souhait ?

Exercice 15. Soit $n \geqslant 2$ un entier fixé. Un nombre S est dit *spécial* si pour tout entier strictement positif k et pour toute décomposition de n en somme de k entiers strictement positifs

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$$

avec $n_1 \leqslant n_2 \leqslant \cdots \leqslant n_k$, on peut trouver des entiers $0 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ tels que

$$a_1 n_1 + a_2 n_2 + \cdots + a_k n_k = S.$$

a) Montrer que $n^2 - 2n$ n'est **pas** spécial.

b) Trouver tous les nombres spéciaux.