Coupe Animath de Printemps

31 mai 2023

Durée : 3 heures (collège), 4 heures (lycée).

Instructions

- Les exercices « collégiens » concernent les élèves scolarisés au collège.
  Les exercices « lycéens » concernent les élèves scolarisés au lycée.
  Chaque exercice est noté sur 7 points.

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**

- **Pour les exercices 1 et 8,** seule une réponse numérique est attendue ; un résultat correct sans justification vaudra donc 7 points, tandis qu'un résultat incorrect sans justification vaudra 0 point. Cependant, si un raisonnement accompagne un résultat faux (ou pas de résultat), ce raisonnement sera lu et noté et pourra rapporter une partie des points de l'exercice.

- **À part dans les exercices 1 et 8,** on demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.

- Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.

- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.

- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  LES CALCULATRICES SONT INTERDITES, AINSI QUE TOUS LES INSTRUMENTS ÉLECTRONIQUES.
  Cela concerne en particulier l'usage de l'ordinateur, et donc de *Geogebra* et de logiciels de traitement de texte.

Après l'épreuve, merci de renvoyer les copies par voie électronique via le formulaire de dépôt disponible à l'adresse suivante :

`http://igm.univ-mlv.fr/~juge/animath/`

Association Animath,
Préparation Olympique Française de Mathématiques (POFM)

contact-pofm@animath.fr

Exercices collégiens

Exercice 1. Calculer le nombre

$$\frac{4^8}{8^4}.$$

Seule une réponse numérique est attendue ici.

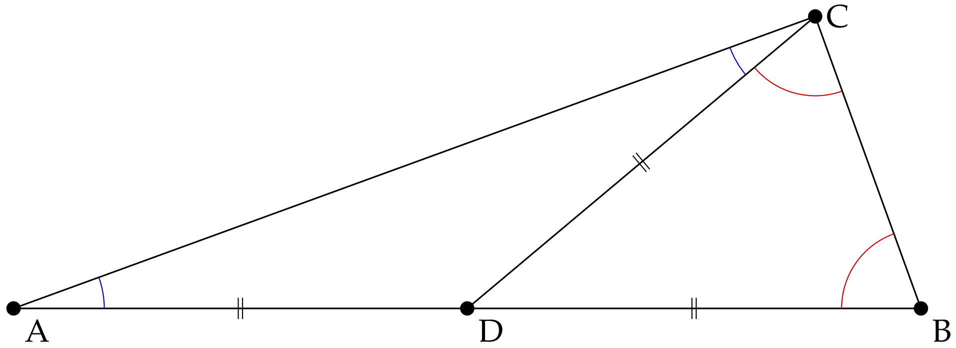
Solution de l'exercice 1 L'idée est de remarquer que 4 et 8 sont tous les deux des puissances de 2, ce qui va permettre de ne pas calculer le numérateur et le dénominateur explicitement. En effet, en utilisant la formule $(a^b)^c = a^{bc}$, on obtient

$$\frac{4^8}{8^4} = \frac{(2^2)^8}{(2^3)^4} = \frac{2^{2\times 8}}{2^{3\times 4}} = \frac{2^{16}}{2^{12}} = 2^{16-12} = 2^4 = 16.$$

Commentaire des correcteurs : À part la majorité des élèves qui calculent bien, il y a un grand nombre d'erreurs de calculs. Il est bon de relire ses calculs pour éviter ce type d'écueils.

Exercice 2. Soit ABC un triangle vérifiant $\widehat{CAB} = 20°$. Soit D le milieu du segment $[AB]$. On suppose que $\widehat{CDB} = 40°$. Que vaut l'angle $\widehat{ABC}$?

Solution de l'exercice 2



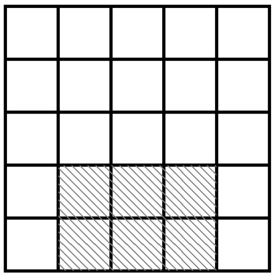
Comme $\widehat{CDB} = 40°$, on obtient par angles supplémentaires que $\widehat{CDA} = 180 - \widehat{CDB} = 140°$. Comme la somme des angles dans le triangle ADC vaut $180°$, on obtient $\widehat{DCA} = 180 - \widehat{CAD} - \widehat{ADC} = 180 - \widehat{CAB} - \widehat{ADC} = 180 - 20 - 140 = 20°$. Ainsi le triangle CDA est isocèle en D, donc $DB = DA = DC$: le triangle CDB est également isocèle en D. Comme la somme des angles dans le triangle CDB vaut $180°$, on a $180° = \widehat{DCB} + \widehat{DBC} + \widehat{CBD} = 2\widehat{DBC} + 40°$, donc $\widehat{DBC} = \frac{180-40}{2} = 70°$. Ainsi $\widehat{ABC} = 70°$.

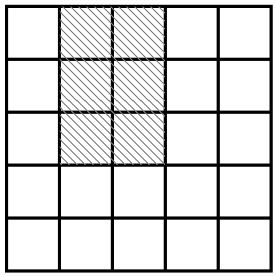
Solution alternative n°1 On prouve de même que $DB = DA = DC$. Ainsi le milieu du segment $[AB]$ est le centre du cercle circonscrit à ABC. Ainsi le triangle ABC est rectangle en C. Les angles $\widehat{CAB}$ et $\widehat{ABC}$ sont donc complémentaires : $\widehat{ABC} = 90 - \widehat{BAC} = 70°$.

Commentaire des correcteurs : L'exercice est très bien réussi. Un certain nombre d'élèves font cependant la confusion entre médiane et bissectrice : ce n'est pas parce que dans un triangle, une droite passant par un sommet coupe le coté opposé en son milieu que l'angle au sommet est également coupé en deux. On déplore également un nombre significatif d'élèves qui ne rendent pas de figure pour appuyer leur raisonnement, ce qui est dommage. Certains élèves essayent également d'invoquer la réciproque du théorème de l'angle au centre, qui malheureusement n'est pas vraie dans le cas général.

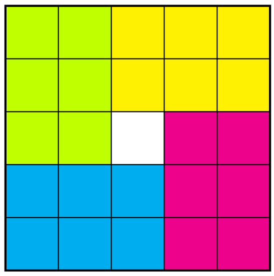
Exercice 3. On considère une grille 5×5, composée de 25 cases blanches. Vincent souhaite colorier en rouge certaines cases de la grille de telle sorte que tout rectangle 2×3 ou 3×2 contienne au moins une case coloriée. Quel est le plus petit nombre de cases qu'il peut colorier ?

Ci-dessous, à gauche une grille 5×5 où un rectangle 2×3 est hachuré, à droite une grille 5×5 où un rectangle 3×2 est hachuré.

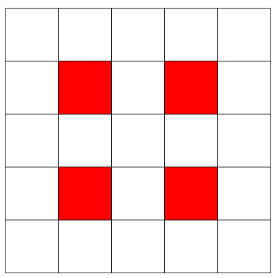




Solution de l'exercice 3 On remarque tout d'abord qu'il faut colorier au moins 4 cases. En effet, sur la figure suivante, on trace 4 rectangles 2×3 ou 3×2 qui sont tous disjoints : il faut donc au moins une case coloriée dans chacun d'entre eux.



Par ailleurs, on remarque que peu importe le rectangle 2×3 ou 3×2 dans le coloriage suivant, ce rectangle contient au moins une case coloriée.

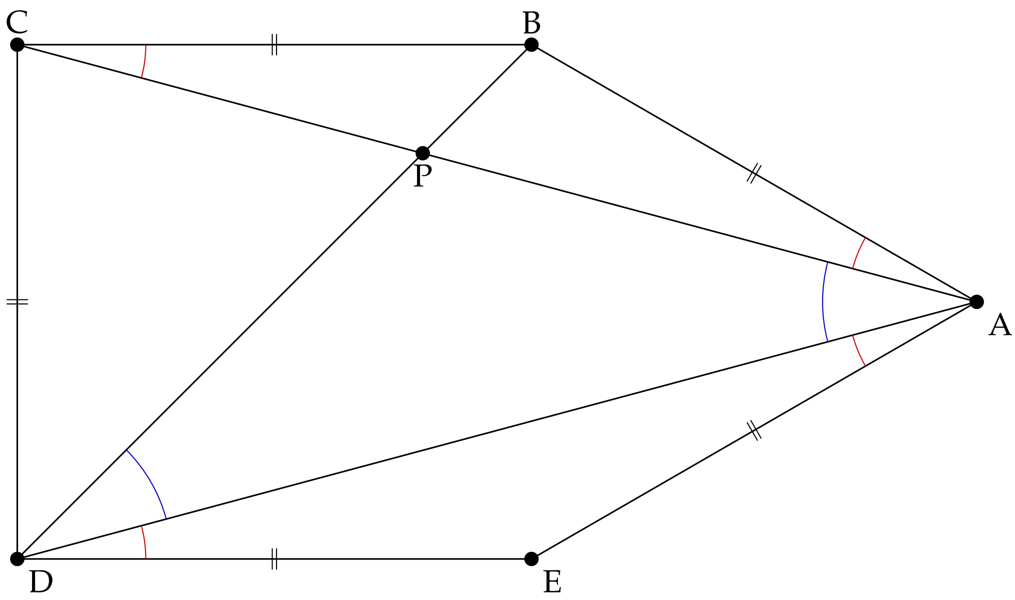


Ainsi, le plus petit nombre de cases qu'on doit colorier est 4.

Commentaire des correcteurs : L'exercice était assez dur pour un problème 3, et très peu d'élèves ont reçu tous les points. La grande majorité des élèves a trouvé une configuration avec 4 cases coloriées, mais malheureusement de nombreux élèves n'ont pas pensé à montrer que 4 était la valeur minimale, alors qu'une configuration avec seulement 3 cases coloriées aurait pu exister. Même parmi les élèves qui ont essayé de faire cette vérification, la plupart se sont contentés de montrer le résultat dans certains exemples trop précis. L'argument "voici une configuration de 4 cases qui fonctionne, si on en enlève une alors la configuration ne fonctionne plus, donc on ne peut pas avoir seulement 3 cases coloriées" par exemple a été vu à de nombreuses reprises, alors qu'il ne dénie pas l'existence d'une solution avec 3 cases coloriées. Enfin, les copies qui ont le mieux réussi sont en général celles qui utilisent des schémas pour illustrer leurs propos, plutôt que s'embrouiller dans de longs paragraphes peu clairs, et en général peu rigoureux.

Exercice 4. Soit $ABCDE$ un pentagone dont tous les côtés sont de même longueur, tel que les angles $\widehat{BCD}$ et $\widehat{CDE}$ soient droits, et tel que le point A n'est pas à l'intérieur du quadrilatère $BCDE$. Soit P le point d'intersection des droites (AC) et (BD). Montrer que $AP = PD$.

Solution de l'exercice 4



Comme $\widehat{BCD}$ et $\widehat{CDE}$ sont droits, les droites (BC) et (DE) sont parallèles. Comme on a $BC = DE$, $BCDE$ est un parallélogramme. Un parallélogramme qui a un angle droit est un rectangle, et un rectangle avec deux côtés adjacents de même longueur est un carré, donc $BCDE$ est un carré. En particulier, $BE = EA = AB$: ABE est un triangle équilatéral.
À partir de là, on peut en déduire que $\widehat{ABC} = \widehat{ABE} + \widehat{EBC} = 60 + 90 = 150°$. Comme ABC est isocèle en B, on en déduit que $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}(180 - 150) = 15°$.
De même, $\widehat{ADE} = \widehat{EAD} = 15°$. Ainsi,

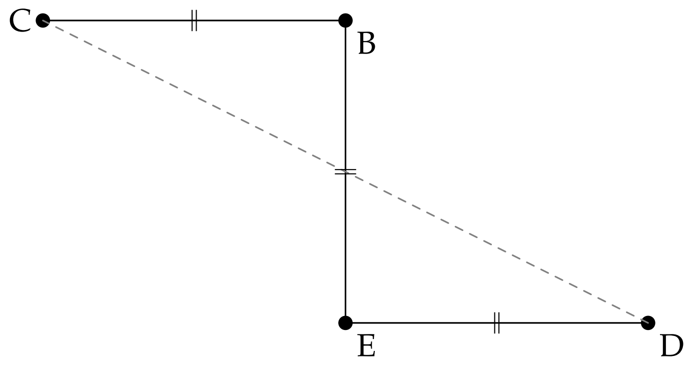
$$\widehat{DAP} = \widehat{BAE} - \widehat{BAC} - \widehat{EAD} = 60 - 15 - 15 = 30°.$$

Aussi,

$$\widehat{PDA} = \widehat{BDE} - \widehat{ADE} = 45 - 15 = 30°$$

Ainsi, $\widehat{DAP} = \widehat{PDA} = 30°,\ PAD$ est isocèle en P, et $AP = PD$ comme espéré.

Remarque : Dans la solution présentée, il y a une petite erreur (qui n'a pas été sanctionnée en cas d'oubli). En effet, on suppose sans le dire que le quadrilatère $BCDE$ est non croisé. Si celui-ci est croisé, c'est $BCED$ qui est un parallélogramme (comme dans la figure ci-dessous). Dans ce cas, si on note B' le symétrique de B par rapport à C, on a bien que $B'CDE$ est un carré. Ainsi le triangle EBB' est rectangle en B', donc $EB > BB' = 2BC = EA + AB$ ce qui est impossible par inégalité triangulaire.



Commentaire des correcteurs : Un exercice que beaucoup de monde a abordé et réussi. Beaucoup d'élèves ont néanmoins perdu un point parce qu'ils n'ont pas justifié que le quadrilatère $BCDE$ était un carré, la configuration de l'énoncé n'est pas classique et les correcteurs ont exigé une démonstration : paraphraser l'énoncé en affirmant que la quadrilatère a deux angles droits consécutifs et trois côtés de même longueur ne constitue pas une justification, il fallait prouver pourquoi cela impliquait que la quadrilatère était un carré. Attention également aux faux théorèmes, il existe des triangles qui ont deux côtés en commun et un angle en commun mais qui ne sont pas semblables (il faut pour cela que l'angle ne se trouve pas entre les deux côtés dont on connaît la valeur).

Exercice 5. Théo a reçu ses notes du trimestre, qui sont toutes des entiers compris entre 1 et 5 (1 et 5 inclus). Il constate que la moyenne de ses notes est inférieure ou égale à 3. Ainsi, pour qu'il ne soit pas privé de dessert pendant une semaine, il compte remplacer sur son relevé de notes toutes ses notes égales à 1 par autant de notes égales à 3. Montrer qu'après cette transformation, la moyenne des notes reste inférieure ou égale à 4.

Solution de l'exercice 5 Notons a le nombre de notes 1 de Théo, b le nombre de notes 2 de Théo, et ainsi de suite, e le nombre de notes 5 de Théo, et n le nombre total de notes, autrement dit $n = a+b+c+d+e$. Lors du changement, les notes 1 deviennent des 3, donc la somme de toutes les notes est augmentée de $2a$, et donc la moyenne est augmentée de $\frac{2a}{n}$.

Supposons que la moyenne après transformation soit strictement plus grande que 4. Alors la moyenne a augmenté de strictement plus que 1, donc $\frac{2a}{n} > 1$. Mais alors, on a

$$\frac{3a+2b+3c+4d+5e}{n} \leqslant \frac{3a+5b+5c+5d+5e}{n} = \frac{3a+5(n-a)}{n} = 5 - \frac{2a}{n} < 4,$$

contradiction. Ainsi, la moyenne après transformation est bien plus petite que 4.

Solution alternative n°1 On garde les mêmes notations pour a, b, c, d, e, n que dans la solution précédente.
Remarquons que si la moyenne après transformation est strictement plus grande que 4, on doit avoir $e > a+b+c$. En effet,

$$\frac{3a+2b+3c+4d+5e}{n} \leqslant \frac{3(a+b+c)+4d+5e}{n},$$

et

$$\begin{aligned} \frac{3(a+b+c)+4d+5e}{n} &> 4 \\ \iff 3(a+b+c)+4d+5e &> 4n = 4(a+b+c+d+e) \\ \iff -(a+b+c)+e &> 0. \end{aligned}$$

Ainsi, si la moyenne après transformation était plus grande que 4, on doit avoir $a+b+c < e$. Seulement, on a

$$\frac{a+2b+3c+4d+5e}{n} \geqslant \frac{a+b+c+4d+5e}{n},$$

et

$$\begin{aligned} \frac{a+b+c+4d+5e}{n} &> 3 \\ \iff a+b+c+4d+5e &> 3n = 3(a+b+c+d+e) \\ \iff d+2e &> 2(a+b+c), \end{aligned}$$

qui est vrai car $e > a+b+c$ et $d \geqslant 0$.
Ainsi, si la moyenne de Théo après transformation est strictement plus grande que 4, la moyenne avant transformation est strictement plus grande que 3, et donc si la moyenne avant transformation est plus petite que 3, la moyenne après transformation est plus petite que 4.

Commentaire des correcteurs : Un exercice assez difficile qui n'a été résolu complètement que par très peu d'élèves. Un bon réflexe dans ce type d'exercice est d'écrire l'énoncé sous forme d'équations (ici d'inégalités) et de voir quelles conditions cela revient à trouver. Même si il est souvent une bonne idée de traiter des cas particuliers, il est regrettable que nombre d'élèves se soient arrêtés à cette étape, considérant parfois qu'un exemple tient lieu de preuve. On retrouve dans de nombreuses copies l'évocation d'un soi-disant "meilleur cas" où l'on n'aurait uniquement des 1 et des 5. Bien que ce cas permette effectivement d'atteindre l'égalité, traiter ce cas n'est pas une démonstration, et la notion de "meilleur cas" ainsi que les pseudo-preuves que ce dernier est le "meilleur cas" sont toujours floues et vagues, et cela ne tient pas lieu de preuve. Les copies ayant bien avancé sur ce problème sont donc celles ayant tenté de le formaliser et de trouver des conditions suffisantes à l'inégalité qu'on souhaitait démontrer.

Exercice 6. Soit x, y des entiers positifs tels que $1 \leqslant y < x$, on dit que le couple (x, y) est *joli* si x et y ont exactement $x - y$ diviseurs positifs en commun. Par exemple, 30 et 42 ont exactement 4 diviseurs en commun : $1, 2, 3$ et 6. Comme $42 - 30 = 12 \neq 4$, le couple $(42, 30)$ n'est donc pas joli. Par contre, le couple $(8, 6)$ est joli, car 6 et 8 ont $8 - 6 = 2$ diviseurs positifs en commun : 1 et 2.

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on note $s(n)$ le nombre de couples d'entiers (x, y) tels que $1 \leqslant y < x \leqslant n$ et que (x, y) soit joli.

a) Existe-t-il un entier $n \geqslant 2$ tel que $s(n) = 2022$?

b) Existe-t-il un entier $n \geqslant 2$ tel que $s(n) = 2023$?

<u>*Solution de l'exercice 6*</u> Soit (x, y) un couple joli, et d un diviseur de x et de y. On pose $x = kd$ et $y = k'd$ avec k et k' des entiers, on a alors $x - y = d(k - k')$ donc d divise $x - y$.

Ainsi $x - y$ a au moins $x - y$ diviseurs. Or si un nombre positif divise $x - y$ il est forcément inférieur ou égal à $x - y$. Ainsi comme $x - y > 0$, tous les diviseurs de $x - y$ sont dans $\{1, \dots, x - y\}$. Comme $x - y$ a $x - y$ diviseurs, et il y a $x - y$ éléments dans $\{1, \dots, x - y\}$, ce sont tous des diviseurs de $x - y$.

Supposons $x - y > 1$. Comme $x - y \geqslant x - y - 1 \geqslant 1$, $x - y - 1$ divise $x - y$. Il existe ainsi un entier strictement positif k tel que $x - y = k(x - y - 1)$. On ne peut pas avoir $k = 1$, donc $k \geqslant 2$. Ainsi $x - y \geqslant 2(x - y - 1)$ donc $2 \geqslant x - y$. Ainsi on a forcément $x - y = 2$ ou 1.

Réciproquement si $x - y = 1$, comme tout diviseur de x et y divise $x - y = 1$, le seul diviseur en commun que x et y peuvent avoir est 1. Or 1 divise x et y. Ainsi si $x - y = 1$, (x, y) est joli.

Si $x - y = 2$, comme tout diviseur de x et y divise $x - y = 2$, les deux seuls diviseurs en commun que x et y peuvent avoir sont 1 et 2. Or 1 divise x et y, et 2 divise x et y si et seulement si x et y sont pairs. Comme $x = y + 2$, la dernière condition est équivalent au fait que y soit pair. ainsi si $x - y = 2$ et y est pair, alors (x, y) est joli.

Ainsi :

- ▷ Si $n = 2k$ les couples jolis (x, y) avec $1 \leqslant y < x \leqslant n$ sont les couples de la forme $(y + 1, y)$ avec $1 \leqslant y \leqslant n - 1$, et les couples de la forme $(2j, 2j + 2)$ avec $1 \leqslant j \leqslant k - 1$. Il y en a $s(n) = n - 1 + k - 1 = 3k - 2$.
- ▷ Si $n = 2k + 1$ les couples jolis (x, y) avec $1 \leqslant y < x \leqslant n$ sont les couples de la forme $(y + 1, y)$ avec $1 \leqslant y \leqslant n - 1$, et les couples de la forme $(2j, 2j + 2)$ avec $1 \leqslant j \leqslant k - 1$. Il y en a $s(n) = n - 1 + k - 1 = 3k - 1$.

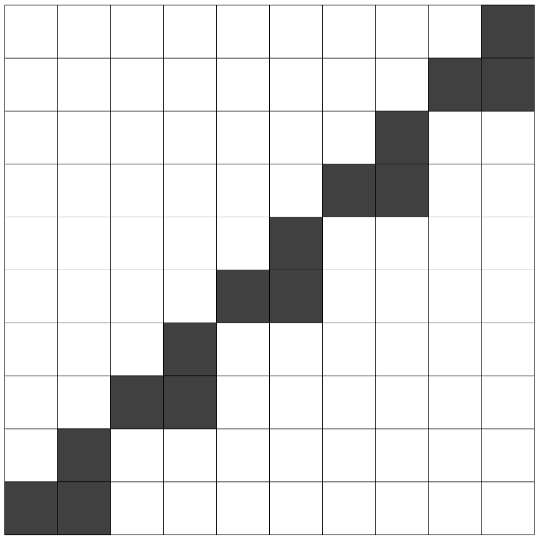
Il existe donc bien un entier $n \geqslant 2$ tel que $s(n) = 2023$: comme $2023 = 3 \times 675 - 2$, on a $s(2 \times 675) = s(1350) = 2023$. Néanmoins, $s(n)$ n'est jamais divisible par 3 (il s'écrit soit $3k - 2$, soit $3k - 1$), donc il n'existe pas d'entier n tel que $s(n) = 2022$.

<u>**Commentaire des correcteurs :**</u> L'exercice a été très peu traité comparé à l'exercice 7. C'est dommage car il était plus facile d'y obtenir des points. Il est dommage de voir que peu d'élèves ont essayé de trouver tous les couples jolis avec $x, y \leqslant 5$ (de tester des petits cas), et de calculer les valeurs de $s(n)$: il était facile de faire des conjectures de manière intelligente, et cela permettait de bien avancer. Beaucoup d'élèves admettent que si n a n diviseurs, alors $n = 1$ ou 2 : il fallait prouver ce fait crucial pour le problème.

Exercice 7. On considère une grille 10×10, composée de 100 cases. Les lignes de la grille sont numérotées de haut en bas dans l'ordre de 1 à 10 : la ligne la plus haute a le numéro 1, la plus basse le numéro 10. Les colonnes de la grille sont numérotées de gauche à droite dans l'ordre de 1 à 10 : la colonne la plus à gauche a le numéro 1, la plus à droite le numéro 10. Martin colorie certaines cases de la grille, de sorte que pour toute case coloriée c, il existe au plus une case coloriée différente de c dont le numéro de la colonne est supérieur ou égal à celui de la colonne de c et dont le numéro de la ligne est supérieur ou égal à celui de la ligne de c.

Quel est le nombre maximal de cases que Martin peut colorier ?

Solution de l'exercice 7 On montre que la réponse est 15.
Tout d'abord, on peut exhiber un coloriage avec 15 carrés coloriés :



Dans ce coloriage, toutes les cases sur la diagonale voient exactement une autre case coloriée, et les cases en dessous de la diagonale n'en voient aucune, ce coloriage est donc valide.

Supposons à présent qu'on ait un coloriage valide avec 16 cases (si on en a plus, on prend 16 cases quelconques parmi les cases coloriées).
Comme il est clairement impossible d'avoir trois cases coloriées sur une même ligne ou colonne, il y a au moins 6 lignes et 6 colonnes qui ont deux cases coloriées. Considérons l'une de ces lignes, mettons la ligne i. Si on considère la case la plus à gauche parmi les deux cases coloriées de la ligne i, on remarque que celle-ci ne peut avoir une autre case coloriée sur la même colonne qu'elle, mettons j. En effet, si cette éventuelle deuxième case est au-dessus de (i, j), alors la deuxième case verrait les deux cases coloriées de la ligne i, et si la deuxième case était en dessous de (i, j), (i, j) verrait à a fois cette case et la deuxième case de la ligne i. Dans tous les cas on aurait une contradiction : il n'y a qu'une seule case coloriée dans la colonne j.
Ce raisonnement étant valide pour chacune des 6 lignes sur lesquelles on a deux cases coloriées, on a donc 6 colonnes avec une seule case coloriée. Mais on avait dit qu'on avait 6 colonnes avec deux cases coloriées, contradiction.
Le nombre maximal est donc bien 15.

Solution alternative n°1 On prouve de même qu'il est possible de colorier 15 cases via la configuration précédente.

Il est clairement impossible d'avoir 3 cases dans une même ligne. Supposons qu'il existe deux lignes, a et b contenant chacune deux cases coloriées et telles que la ligne a est au dessus de ligne b. Alors la case de gauche de la ligne a doit être strictement plus à droite que la case de droite de la ligne b. En effet, si ce n'était pas le cas, la case verrait à la fois la case de droite de la ligne a, et la case de gauche de la ligne b, ce qui est impossible.

Ainsi, toutes les cases appartenant à des lignes contenant 2 cases coloriées sont dans différentes colonnes. Il y a au plus 10 cases appartenant à des lignes contenant 2 cases coloriées, donc au plus 5 lignes contenant deux cases coloriées.

Ainsi il y a au plus $5 + 5 \times 2 = 15$ cases coloriées.

Le nombre maximal est donc bien 15.

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été beaucoup abordé, mais finalement peu d'élèves ont véritablement compris l'énoncé : certains ont cru que Martin ne pouvait même pas colorier 10 cases (alors que colorier la diagonale était assez naturel), et certains ont colorié des cases d'une manière qui ne correspondait pas du tout à l'énoncé. Une fois la configuration du corrigé trouvée, beaucoup se sont contentés de dire qu'on ne pouvait pas colorier plus de cases et donc que c'était bel et bien le maximum. On peut pourtant en coloriant $(1, 1)$ et $(2, 2)$, trouver une configuration où on ne peut pas colorier plus de cases : pourtant 2 n'est pas la bonne réponse. Nous sommes également étonnés par le peu d'élèves ayant noté qu'il y avait au plus 2 cases par lignes. C'était une remarque toute simple, mais importante, et très peu d'élèves ont eu le réflexe de la faire.

Exercices lycéens

Exercice 8. Combien y a-t-il de nombres entiers n tels que $\frac{n}{3}$ et $3n$ soient tous deux des nombres entiers entre 1 et 1000 (1 et 1000 inclus) ?

Seule une réponse numérique est attendue ici.

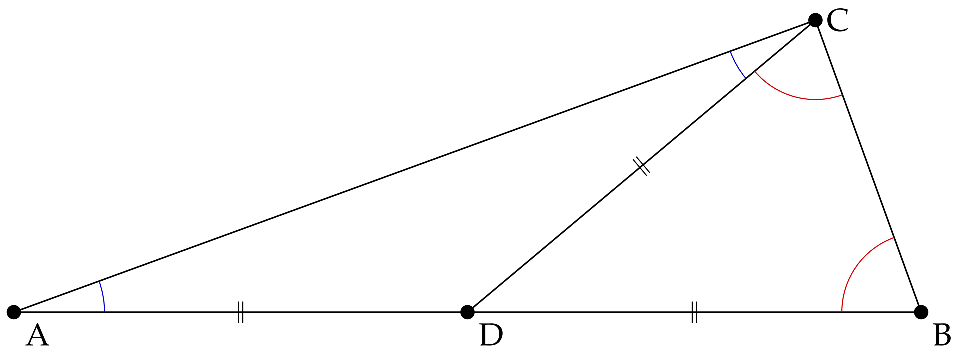
Solution de l'exercice 8 Si $\frac{n}{3}$ est entier, appelons cet entier k. Alors on doit avoir $1 \leqslant k \leqslant 1000$ et $1 \leqslant 9k \leqslant 1000$.
Réciproquement, si on a k un entier tel que $1 \leqslant 9k \leqslant 1000$, alors poser $n = 3k$ produit un n qui fonctionne. Ainsi, il y a autant de tels n qu'il y a d'entiers qui vérifient $1 \leqslant k$ et $9k \leqslant 1000$.
Il y en a $\left\lfloor \frac{1000}{9} \right\rfloor = 111$.

Solution alternative n°1 Pour que $\frac{n}{3}$ soit un entier, il faut que n soit divisible par 3. Par ailleurs $3n \leqslant 1000$, donc $1 \leqslant n \leqslant 333$.
Réciproquement, tous les nombres multiples de 3 entre 1 et 333 fonctionnent, et il y en a 111.

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été très bien réussi. Malheureusement, certains élèves qui n'avaient pas le bon résultat n'ont pas exposé leur raisonnement et n'ont donc pas obtenu de points.

Exercice 9. Soit ABC un triangle vérifiant $\widehat{CAB} = 20°$. Soit D le milieu du segment $[AB]$. On suppose que $\widehat{CDB} = 40°$. Que vaut l'angle $\widehat{ABC}$?

Solution de l'exercice 9



Comme $\widehat{CDB} = 40°$, on obtient par angles supplémentaires que $\widehat{CDA} = 180 - \widehat{CDB} = 140°$. Comme la somme des angles dans le triangle ADC vaut $180°$, on obtient $\widehat{DCA} = 180 - \widehat{CAD} - \widehat{ADC} = 180 - \widehat{CAB} - \widehat{ADC} = 180 - 20 - 140 = 20°$. Ainsi le triangle CDA est isocèle en D, donc $DB = DA = DC$: le triangle CDB est également isocèle en D. Comme la somme des angles dans le triangle CDB vaut $180°$, on a $180° = \widehat{DCB} + \widehat{DBC} + \widehat{CBD} = 2\widehat{DBC} + 40°$, donc $\widehat{DBC} = \frac{180-40}{2} = 70°$. Ainsi $\widehat{ABC} = 70°$.

Solution alternative n°1 Comme $\widehat{CDB} = 40°$, on obtient $\widehat{CDA} = 140°$, et comme la somme des angles d'un triangle vaut $180°$, on obtient $\widehat{DCA} = 20°$. Ainsi le triangle CDA est isocèle en D, donc $DB = DA = DC$: le milieu du segment AB est le centre du cercle circonscrit à ABC. Ainsi ABC est rectangle en C. Les angles $\widehat{CAB}$ et $\widehat{ABC}$ sont donc complémentaires : $\widehat{ABC} = 70°$.

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été plutôt bien réussi par les lycéens. Beaucoup d'élèves font mal la différence entre ce qu'est une médiane et une bissectrice qui sont, la plupart du temps, deux droites différentes. Les élèves ayant choisi d'utiliser les propriétés de l'angle au centre sont très rarement allés au bout de l'exercice, en effet, si $\widehat{BDC} = 2\widehat{BAC}$, cela n'implique pas forcément que D est le centre du cercle circonscrit à ABC. Pour éviter de perdre des points, on conseille aux élèves de privilégier les chasses aux angles élémentaires et de tracer des figures que l'on a peu observées dans leur copie.

Exercice 10. En utilisant les nombres de 1 à 22 exactement une fois chacun, Antoine écrit 11 fractions : par exemple il peut écrire les fractions $\frac{10}{2}, \frac{4}{3}, \frac{15}{5}, \frac{7}{6}, \frac{8}{9}, \frac{11}{19}, \frac{12}{14}, \frac{13}{17}, \frac{22}{21}, \frac{18}{16}$ et $\frac{20}{1}$.

Antoine souhaite avoir autant que possible de fractions à valeurs entières parmi les fractions écrites : dans l'exemple précédent, il a écrit trois fractions à valeurs entières : $\frac{10}{2} = 5$, $\frac{15}{5} = 3$ et $\frac{20}{1} = 20$. Quel est le nombre maximal de fractions qui peuvent être à valeurs entières ?

Solution de l'exercice 10 Tout d'abord, il est possible de faire 10 nombres entiers, avec les fractions

$$\left\{\frac{22}{11}, \frac{20}{10}, \frac{18}{9}, \frac{16}{8}, \frac{14}{7}, \frac{12}{6}, \frac{21}{3}, \frac{19}{1}, \frac{15}{5}, \frac{4}{2}, \frac{17}{13}\right\}.$$

Par ailleurs, il est impossible d'avoir 11 fractions entières. En effet, il y a 3 nombres premiers qui n'ont aucun multiple plus petit que 22 : $19, 17$ et 13. Ainsi la seule façon qu'a l'un de ces trois nombres de faire une fraction entière est avec le nombre 1, qui ne peut être utilisé qu'avec un seul de ces trois nombres.

Commentaire des correcteurs : L'exercice à été globalement très bien réussi. Cependant certains élèves, bien qu'ayant constaté l'importance de 13, 17 et 19, n'ont pas pensé à en associer 2 dans la même fraction, et n'obtiennent donc que 9 fractions entières, ce qui est bien dommage. D'autres élèves se sont contentés d'avoir une configuration à 10 fractions sans justification qu'elle soit optimale. Enfin, nous rappelons que $\frac{19}{8}$ n'est définitivement pas un entier.

Exercice 11. Soit $a_1, \ldots, a_{100}$ 100 entiers distincts tels que $1 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots < a_{100} \leqslant 400$.
Pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant 99$, on pose $d_i = a_{i+1} - a_i$. Montrer qu'il y a au moins 15 nombres parmi $d_1, d_2, \ldots, d_{99}$ qui sont égaux.

Solution de l'exercice 11 Procédons par l'absurde, en supposant donc qu'il y a à chaque fois au plus 14 d_i égaux. Soit e_i la liste des d_i, mais réordonnée, de sorte que $e_i \leqslant e_j$ si $i \leqslant j$.
Alors $e_i \geqslant 1$ pour tout i, mais on ne peut pas avoir $e_{15} = 1$ d'après notre hypothèse, donc $e_{15} \geqslant 2$. Ici encore, si $e_{29} = 2$ on devrait avoir $e_{15} = e_{16} = \cdots = e_{29} = 2$, en contradiction avec notre hypothèse. Ainsi $e_{29} \geqslant 3$. En continuant ainsi, on obtient $e_{14k+1} \geqslant k+1$, et en particulier $e_{14k+i} \geqslant k+1$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant 14$.
À présent, comme

$$a_{100} - a_1 = d_1 + d_2 + \cdots + d_{99} = e_1 + e_2 + \cdots + e_{99},$$

on a

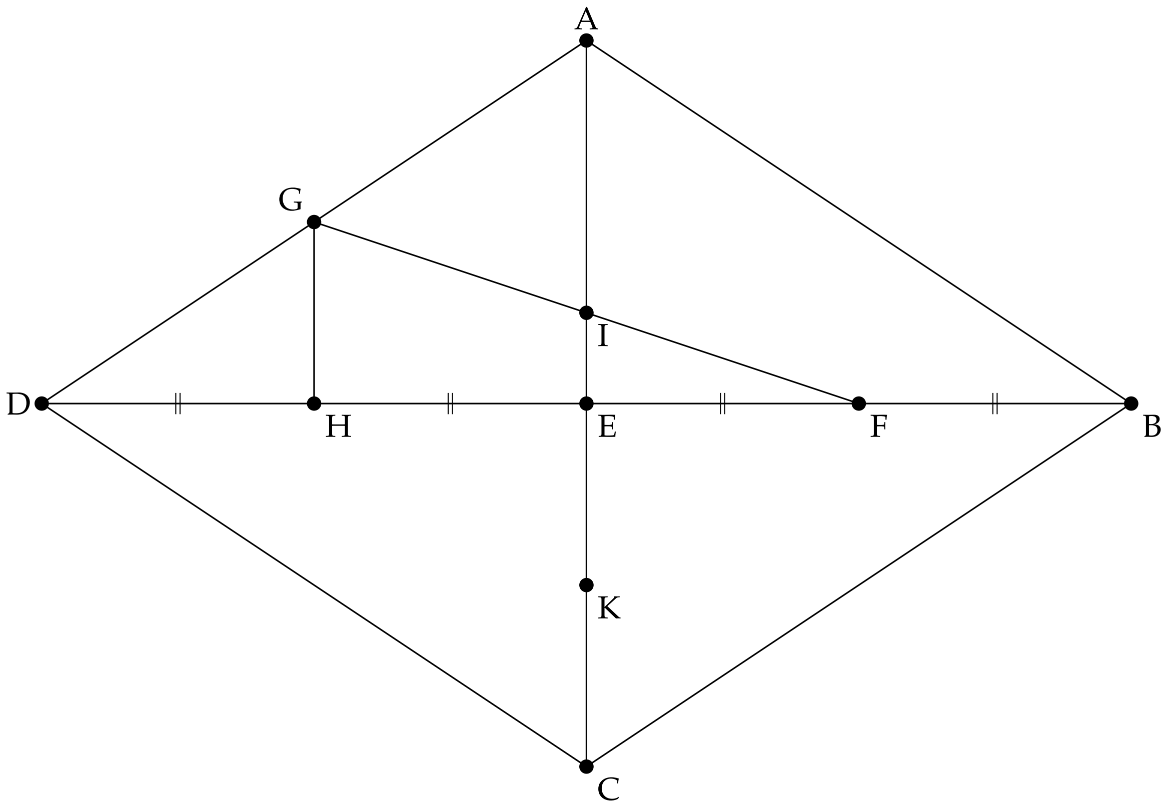
$$a_{100} - a_1 \geqslant \underbrace{1 + \cdots + 1}_{14 \text{ fois}} + \underbrace{2 + \cdots + 2}_{14 \text{ fois}} + \cdots + \underbrace{7 + \cdots + 7}_{14 \text{ fois}} + 8 = 14(1+2+\cdots+7)+8 = 14 \times 28 + 8 = 400.$$

Cependant, comme $1 \leqslant a_1 < a_{100} \leqslant 400$, on a $a_{100} - a_1 \leqslant 399$, ce qui est une contradiction avec notre observation précédente.

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été plutôt bien réussi. Cependant, très peu d'élèves ont obtenu le dernier point du barème car beaucoup ne justifiaient pas dans quelle mesure le cas optimal permettait de résoudre le cas général. La grande majorité des élèves a trouvé la configuration optimale mais malheureusement beaucoup ont fait des erreurs de calculs sur la somme et n'ont donc pas obtenu les points associés au calcul. Un nombre conséquent d'élèves a aussi mal interprété la question, et la manière dont les 15 d_i étaient égaux deux à deux, croyant que cela signifiait que tous les autres devaient être distincts deux à deux.

Exercice 12. Soit $ABCD$ un losange, et soit E le point d'intersection des diagonales. Soit F le milieu du segment $[BE]$, et G le milieu du segment $[AD]$. Soit I le point d'intersection des droites (FG) et (AC), et soit K le symétrique de A par rapport au point I. Que vaut $\dfrac{EK}{EA}$?

Solution de l'exercice 12



Notons que par symétrie, $EK = IK - IE = AI - IE = AE - 2IE$. Il suffit donc d'exprimer IE en fonction de EA pour calculer le rapport EK/EA.

Introduisons H le milieu du segment $[DE]$. Ainsi $HE = \frac{DE}{E} = \frac{BE}{2} = EF$, donc E est le milieu de $[HF]$.

Le théorème de la droite des milieux nous donne que (HG) et (EA) sont parallèles. Ainsi (EI) et (HG) sont parallèles, donc comme E est le milieu de $[HF]$, par le théorème de la droite des milieux, I est le milieu de $[FG]$ et $EI = \frac{HG}{2}$. Par le théorème de la droite des milieux dans le triangle AEG, $GH = \frac{AE}{2}$, donc $EI = \frac{AE}{4}$.
Ainsi $EK = AE - 2IE = \frac{AE}{2}$ donc $\frac{AE}{AK} = \frac{1}{2}$.

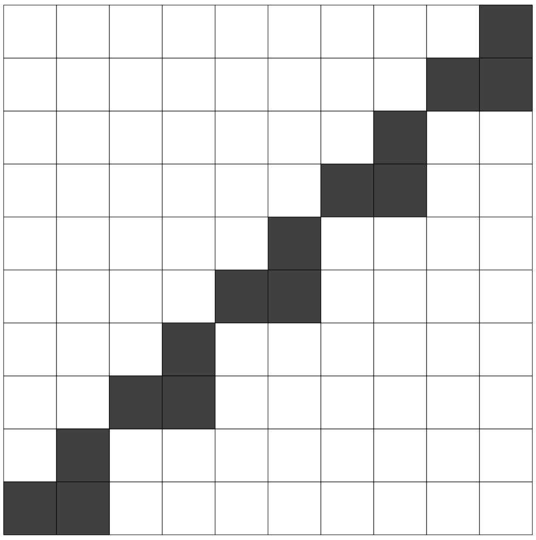
Commentaire des correcteurs : La plupart des élèves avaient une bonne intuition de l'exercice et arrivaient à trouver ou observer le résultat. Il faut cependant faire attention à bien justifier ses réponses : même quand des droites sont parallèles ou perpendiculaires sur la figure, il faut le justifier. Cela peut souvent se faire par le théorème de Thalès ou sa version raffinée de la droite des milieux.

Certains élèves ont remarqué à juste titre que l'exercice pouvait se traiter de manière analytique. Cependant, il faut faire très attention car les repères naturels peuvent ne pas être orthonormés et on ne peut donc pas utiliser la formule habituelle des normes qui repose sur Pythagore.

Exercice 13. On considère une grille 10×10, composée de 100 cases. Les lignes de la grille sont numérotées de haut en bas dans l'ordre de 1 à 10 : la ligne la plus haute a le numéro 1, la plus basse le numéro 10. Les colonnes de la grille sont numérotées de gauche à droite dans l'ordre de 1 à 10 : la colonne la plus à gauche a le numéro 1, la plus à droite le numéro 10. Martin colorie certaines cases de la grille, de sorte que pour toute case coloriée c, il existe au plus une case coloriée différente de c dont le numéro de la colonne est supérieur ou égal à celui de la colonne de c et dont le numéro de la ligne est supérieur ou égal à celui de la ligne de c.

Quel est le nombre maximal de cases que Martin peut colorier ?

Solution de l'exercice 13 On montre que la réponse est 15.
Tout d'abord, on peut exhiber un coloriage avec 15 carrés coloriés :



Dans ce coloriage, toutes les cases sur la diagonale voient exactement une autre case coloriée, et les cases en dessous de la diagonale n'en voient aucune, ce coloriage est donc valide.

Supposons à présent qu'on ait un coloriage valide avec 16 cases (si on en a plus, on prend 16 cases quelconques parmi les cases coloriées).
Comme il est clairement impossible d'avoir trois cases coloriées sur une même ligne ou colonne, par le principe des tiroirs, il y a au moins 6 lignes et 6 colonnes qui ont deux cases coloriées. Considérons l'une de ces lignes, mettons la ligne i. Si on considère la case la plus à gauche parmi les deux cases coloriées de la ligne i, on remarque que celle-ci ne peut avoir une autre case coloriée sur la même colonne qu'elle, mettons j. En effet, si cette éventuelle deuxième case est au-dessus de (i, j), alors la deuxième case verrait les deux cases coloriées de la ligne i, et si la deuxième case était en dessous de (i, j), (i, j) verrait à a fois cette case et la deuxième case de la ligne i. Dans tous les cas on aurait une contradiction : il n'y a qu'une seule case coloriée dans la colonne j.
Ce raisonnement étant valide pour chacune des 6 lignes sur lesquelles on a deux cases coloriées, on a donc 6 colonnes avec une seule case coloriée. Mais on avait dit qu'on avait 6 colonnes avec deux cases coloriées, contradiction.
Le nombre maximal est donc bien 15.

Solution alternative n°1 On prouve de même qu'il est possible de colorier 15 cases via la configuration précédente.

Il est clairement impossible d'avoir 3 cases dans une même ligne. Supposons qu'il existe deux lignes, a et b contenant chacune deux cases coloriées et telles que la ligne a est au dessus de ligne b. Alors la case de gauche de la ligne a doit être strictement plus à droite que la case de droite de la ligne b. En effet, si ce n'était pas le cas, la case verrait à la fois la case de droite de la ligne a, et la case de gauche de la ligne b, ce qui est impossible.

Ainsi, toutes les cases appartenant à des lignes contenant 2 cases coloriées sont dans différentes colonnes. Il y a au plus 10 cases appartenant à des lignes contenant 2 cases coloriées, donc au plus 5 lignes contenant deux cases coloriées.

Ainsi il y a au plus $5 + 5 \times 2 = 15$ cases coloriées.

Le nombre maximal est donc bien 15.

Commentaire des correcteurs : La borne de 15 et la construction ont été trouvé par un nombre important d'élèves, mais peu parmi eux sont parvenus à en démontrer l'optimalité. On compte par ailleurs de nombreuses copies prétendant résoudre l'exercice mais contenant des preuves erronées. Il faudrait retenir que dans ce genre d'exercice dont la résolution se décompose en une partie construction et une partie preuve d'optimalité, les deux parties sont indépendantes : la construction va donc rarement servir à la résolution. Nombreux sont les élèves ayant invoqué un argument du style : « on ne peut plus rajouter de cases à ma construction donc celle-ci est optimale », ce qui est bien entendu faux. On ne peut par exemple pas non plus rajouter de case coloriée à la configuration obtenue en coloriant uniquement le coin supérieur gauche et le coin inférieur droit. Nombreux sont ceux qui élaborent un procédé de construction en disant qu'à chaque fois ils font le meilleur choix, sans aucune preuve, et à la fin clament qu'on ne pouvait faire plus que 15 cases (ou parfois 13, ou 19, ce qui montre directement que l'argument ne fonctionne pas). Une autre erreur courante a été de prétendre que la configuration optimale s'obtenait nécessairement en rajoutant des cases coloriées à une configuration maximisant le nombre de cases sans qu'une d'entre elles n'aie un numéro de ligne et de colonne supérieurs à ceux d'une autre : cela n'a pas de raison d'être vrai.

Exercice 14. Soit n un entier strictement positif. Aline souhaite écrire $2n$ nombres réels au tableau de sorte que

- ▷ les $2n$ nombres écrits ne sont pas tous égaux,
- ▷ si Aline entoure n nombres écrits au tableau, quel que soit le choix d'Aline, la somme des n nombres entourés est égale au produit des n nombres qui ne sont pas entourés.

Pour quelles valeurs de n Aline peut-elle réaliser son souhait ?

Solution de l'exercice 14 Soit n un entier pour lequel Aline peut réaliser son souhait, et $x_1, \ldots x_{2n}$ les $2n$ nombres écrits au tableau. Puisqu'ils ne sont pas tous égaux il y en a deux qui sont différents, supposons sans perte de généralités qu'il s'agit de x_1 et x_2.
Prenons maintenant $i, j \geqslant 3$ deux nombres différents, on montre que $x_i = x_j$.
Si Aline entoure x_1 et $n-1$ nombres parmi $x_3, \ldots x_{2n}$, on doit avoir $x_1 + S = x_2 \times P$, où S est la somme des $n-1$ nombres entourés qui ne sont pas x_1, et P est le produit des $n-1$ nombres autres que x_2 qui n'ont pas été entourés. En entourant x_2 et les mêmes $n-1$ nombres, on obtient maintenant $x_2 + S = x_1 \times P$.
En soustrayant les deux équations ainsi obtenues, on a $x_1 - x_2 = P(x_2 - x_1)$.
Comme $x_1 \neq x_2$, on en déduit $P = -1$. Comme ce raisonnement est faisable pour n'importe quelle répartition de $x_3, \ldots, x_{2n}$ en deux paquets de $n-1$ éléments, tout produit de $n-1$ éléments parmi $x_3, \ldots x_{2n}$ est égal à -1. En particulier $x_3 x_5 x_6 \cdots x_{n+2} = x_4 x_5 x_6 \cdots x_{n+2}$, et enfin $x_3 = x_4$ (le produit est bien non nul). En répétant ce raisonnement, on obtient que $x_3 = x_4 = \cdots = x_{2n}$. De plus, on doit avoir $x_3^{n-1} = -1$, mais ce n'est possible que si n est pair.

Réciproquement, si n est pair, on a déjà montré que $x_3 = x_4 = \cdots = x_{2n} = -1$. Au moins l'un des deux nombres x_1 et x_2 est différent de -1, mettons qu'il s'agisse de x_1. Alors le même raisonnement que précédemment en remplaçant x_2 par x_3 nous donne qu'on a également $x_2 = -1$. À présent, il ne reste plus qu'à trouver s'il y a une valeur possible pour x_1.
Si Aline n'entoure pas x_1, on trouve $-n = (-1)^{n-1} x_1$. Comme n est pair, cela impose $x_1 = n$. Il ne reste plus que le cas où Aline entoure x_1. On a alors $n + (n-1) \times (-1) = (-1)^n$, et les deux côtés de l'équation valent bien 1.
Ainsi, les nombres pour lesquels Aline réalise son souhait sont précisément les nombres pairs.

Solution alternative n°1 Pour une liste X de nombres, on note $S(X)$ la somme des nombres, et $P(X)$ le produit des nombres. On suppose qu'Aline peut écrire ses $2n$ nombres, on va chercher des résultats qui pourraient nous donner des informations sur quels n pourraient marcher. On note Z la liste des $2n$ nombres qu'Aline a écrit.
Avec ces notations, si X est n'importe quelle liste de n éléments de Z, on a donc

$$S(X) = P(Z \setminus X) \text{ et } S(Z \setminus X) = P(Z).$$

Ainsi, on a $S(X) + S(Z \setminus X) = S(Z)$ et $S(X) \times S(Z \setminus X) = P(X) \times P(Z \setminus X) = P(Z)$, d'où $S(X)$ et $S(Z \setminus X)$ sont les deux racines du polynôme $T^2 - S(Z)T + P(Z)$.
Quand X varie, $S(X)$ prend donc au plus deux valeurs distinctes : celle où X contient les n valeurs minimales et celle où X contient les n valeurs maximales.
Par conséquent, partant des valeurs minimales, si on enlève le minimum et qu'on le remplace par le maximum, on a déjà n valeurs maximales. Ainsi, les nombres qu'on n'a pas changés sont à la fois parmi les n plus petits et les n plus grands : ils sont tous égaux. On a donc $2n-2$ nombres égaux, encadrés par un maximum et un minimum. Si ces trois valeurs étaient distinctes, on pourrait créer trois sommes différentes ($n-1$ nombres du milieu, et on complète avec les trois valeurs différentes possibles). Donc ou alors le minimum, ou alors le maximum doit être égal aux $2n-2$ nombres égaux : on a même $2n-1$ nombres égaux.

Mettons qu'on a $2n-1$ fois le nombre A, et une fois le nombre B.
Alors on doit avoir $nA = A^{n-1}B$ et $(n-1)A+B = A^n$. Mais alors $A \neq 0$, et $n = A^{n-1}(A^{n-1}-(n-1))$.
On reconnaît là un polynôme de degré 2 en A^{n-1}, qui vaut donc n ou -1.
Le cas $A^{n-1} = n$ est impossible, car l'équation $nA = A^{n-1}B$ deviendrait $A = B$, qui est exclu car alors tous nos nombres seraient égaux. Ainsi, $A^{n-1} = -1$, donc n est pair, $A = -1$ et $B = n$.

Mais alors les deux équations $nA = A^{n-1}B$ et $(n-1)A+B = A^n$ sont satisfaites, donc si Aline choisit ces nombres, elle gagne.
Les nombres pour lesquels Aline peut réaliser son souhait sont donc précisément les nombres pairs.

Commentaire des correcteurs : L'exercice était difficile. La plupart des solutions se ramenaient plus ou moins directement à la solution 1 du corrigé. Il y a eu un certain nombre de copies qui divisaient par zéro ($a \cdot b = 0 \iff a = 0$ OU $b = 0$). D'autres copies ont également utilisé des inégalités, qu'elles ont multipliées entre elles sans se soucier du signe (impossible pour des nombres négatifs). Attention à bien lire l'énoncé, un bon nombre de copies ont mal lu certaines parties de l'énoncé.

Exercice 15. Soit $n \geqslant 2$ un entier fixé. Un nombre S est dit *spécial* si pour tout entier strictement positif k et pour toute décomposition de n en somme de k entiers strictement positifs

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$$

avec $n_1 \leqslant n_2 \leqslant \cdots \leqslant n_k$, on peut trouver des entiers $0 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ tels que

$$a_1 n_1 + a_2 n_2 + \cdots + a_k n_k = S.$$

a) Montrer que $n^2 - 2n$ n'est **pas** spécial.

b) Trouver tous les nombres spéciaux.

Solution de l'exercice 15 a) Posons $k = 2,\ n_1 = 1$ et $n_2 = n - 1$.
Si $n^2 - 2n$ était spécial, on aurait $a_1 < a_2$ tels que $n^2 - 2n = a_1 + (n-1)a_2$.
Cependant, comme $n^2 - 2n = (n-2)(n-1) + (n-2)$, le reste de la division euclidienne de $n^2 - 2n$ par $n - 1$ est $n - 2$.
Autrement dit, $n^2 - 2n - (n-2) = a_1 - (n-2) + (n-1)a_2$ est divisible par $n-1$, et donc $a_1 - (n-2)$ est multiple de $n-1$. Si on avait $a_1 < n-2$, on devrait donc avoir $a_1 - (n-2) = \alpha(n-1) < 0$, et donc $\alpha < 0$. Cela entraînerait $\alpha \leqslant -1$, puis $a_1 < 0$, une contradiction.
Ainsi $a_1 \geqslant n-2$, et comme $a_2 > a_1$, on a $a_2 \geqslant n-1$. Mais alors

$$n^2 - 2n = a_1 + (n-1)a_2 \geqslant n - 2 + (n-1)^2 > n^2 - 2n,$$

une contradiction. Ainsi $n^2 - 2n$ n'est pas spécial.

b) Notons que pour $k = 1$, on trouve qu'un nombre spécial est multiple de n.
De plus, si S est spécial, $S + \alpha n$ l'est également pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$. En effet, soit $n = n_1 + \cdots + n_k$ une décomposition de n, et soit $a_1, \ldots, a_k$ les entiers donnés par le fait que S est spécial, c'est-à-dire $0 \leqslant a_1 < \cdots < a_k$ et $S = a_1 n_1 + \cdots + a_k n_k$. Mais alors $S + \alpha n = a_1 n_1 + \cdots + a_k n_k + \alpha(n_1 + \cdots + n_k) = (a_1 + \alpha)n_1 + \cdots + (a_k + \alpha)n_k$.
Comme de plus $a_1 + \alpha < \cdots < a_k + \alpha$, $S + \alpha n$ est bien spécial.

Donc si on avait un multiple de n plus petit que $n^2 - 2n$ qui était spécial, $n^2 - 2n$ serait également spécial, donc aucun nombre plus petit que $n^2 - 2n$ n'est spécial.
Par ailleurs, si on venait à montrer que $n^2 - n$ est spécial, on aurait trouvé tous les nombres spéciaux, puisque les nombres qui ne sont pas multiples de n ne sont pas spéciaux, les nombres multiples de n plus petits que $n^2 - 2n$ ne sont pas spéciaux, et les nombres multiples de n plus grands que $n^2 - n$ seraient spéciaux.

Soit $n = n_1 + \cdots + n_k$ une décomposition de n. Alors on peut écrire

$$\begin{aligned} n(n-1) &= (n_1 + \cdots + n_k)(n_1 + \cdots + n_k - 1) \\ &= n_1(\underbrace{n_1 - 1}_{a_1}) + n_2(\underbrace{n_2 + 2n_1 - 1}_{a_2}) + \cdots + n_k(\underbrace{n_k + 2n_{k-1} + \cdots + 2n_1 - 1}_{a_k}) \end{aligned}$$

Comme $n_1 \geqslant 1$, $a_1 \geqslant 0$, et comme $a_{i+1} - a_i = n_{i+1} + n_i > 0$, on a bien $a_{i+1} > a_i$, donc $n(n-1)$ est spécial.

Ainsi, les nombres spéciaux sont exactement les multiples de n plus grands que $n^2 - n$.

Solution alternative n°1 La seule partie de la solution qui change est la preuve que $n(n-1)$ est spécial, qu'on fait ici par récurrence forte sur n.

Pour $n = 2$, on a $n^2 - n = 2$, et deux décompositions possibles pour 2 : 2 et $1 + 1$. Il suffit de prendre $a_1 = 1$ pour la première, et $a_1 = 0, a_2 = 2$ pour la deuxième.

Supposons à présent que pour un certain n, pour tout $2 \leqslant m < n$, $m^2 - m$ soit spécial. On montre que $n^2 - n$ est spécial pour n.
Commençons par écarter le cas $k = 1$: dans ce cas il suffit de prendre $a_1 = n - 1$.
On suppose donc $k \geqslant 2$. Alors $n - n_1$ est plus grand que 2. En effet, si $n = 3$ on doit avoir $n_1 = 1$ si $k \geqslant 2$, et comme $n \geqslant kn_1 \geqslant 2n_1$, on a $n - n_1 \geqslant 2$ si $n \geqslant 4$.
Notons que

$$\begin{aligned} (n-n_1)^2 - (n-n_1) &= n^2 - n - 2n_1(n-n_1) - n_1(n_1-1) \\ \iff n^2 - n &= (n-n_1)(n+n_1-1) + n_1(n_1-1), \end{aligned}$$

et d'après l'hypothèse de récurrence, $(n-n_1)(n-n_1-1)$ est spécial pour $n - n_1$. En particulier, pour la décomposition $n - n_1 = n_2 + \cdots + n_k$, on a des entiers $b_i,\ 2 \leqslant i \leqslant k$ tels que $0 \leqslant b_2 < \cdots < b_k$ et

$$(n-n_1)(n-n_1-1) = b_2 n_2 + \cdots + b_k n_k.$$

Mais alors

$$(n-n_1)(n+n_1-1) = n_2(b_2+2n_1) + n_3(b_3+2n_1) + \cdots + n_k(b_k+2n_1),$$

et donc

$$n(n-1) = n_1(\underbrace{n_1-1}_{a_1}) + n_2(\underbrace{b_2+2n_1}_{a_2}) + n_3(\underbrace{b_3+2n_1}_{a_3}) + \cdots + n_k(\underbrace{b_k+2n_1}_{a_k}).$$

On a clairement $a_2 < a_3 < \cdots < a_k$, et comme de plus $b_2 \geqslant 0$ et $n_1 \geqslant 1$, on a bien $0 \leqslant n_1 - 1 < b_2 + 2n_1$.
Ainsi $n^2 - n$ est bien spécial, et les nombres spéciaux sont exactement les multiples de n plus grands que $n^2 - n$.

Commentaire des correcteurs : Un exercice difficile, très peu d'élèves ont réussi à obtenir des points. Nombreux sont ceux qui ont mal compris l'énoncé, surtout dans le a). Il ne s'agissait pas de trouver un n tel que $n^2 - 2n$ n'est pas un nombre spécial, mais de montrer que, quel que soit n, ce nombre n'est jamais spécial. D'autres ont écrit $n^2 - 2n = (n-2)n_1 + \cdots + (n-2)n_k$ et ont conclu que $n^2 - 2n$ n'était pas spécial, car on avait $a_1 = \cdots = a_n$, en oubliant que d'autres décompositions pourraient totalement être possibles. Tout de même, un certain nombre de participants a intuité que la décomposition $n = 1 + (n-1)$ serait la décomposition problématique, parfois sans aller au bout du raisonnement. Enfin, le b) a été bien traité les très rares fois où il a été traité.