PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 4 : COMBINATOIRE
À RENVOYER AU PLUS TARD LE 15 MARS 2024

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe junior est constitué des élèves nés en 2009 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe senior.
- Les exercices classés “Juniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés “Seniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Exercices Juniors

Exercice 1. Antoine propose à Baptiste de jouer à l'"alphabet en folie" : Ils commencent par se mettre d'accord sur une lettre. Puis, à tour de rôle, chacun peut choisir de prononcer entre 1 et 2 lettres suivantes dans l'alphabet en partant de A. Celui qui prononce la lettre choisie a gagné. Si Antoine commence, pour quelles lettres de départ dispose-t-il d'une stratégie lui permettant de gagner la partie à coup sûr ?

Voici un exemple de partie : la lettre choisie initialement est E. Antoine dit "A", Baptiste "B", Antoine "CD" et Baptiste dit "E". Dans ce cas, Baptiste a gagné.

Exercice 2. Aurélien découpe une feuille de papier en 7 morceaux. Une étape consiste ensuite à choisir un morceau et à le découper en $4, 7$ ou 10 morceaux. Aurélien peut-il obtenir ainsi 2021 morceaux ?

Exercice 3. On dispose de cinq couleurs et d'une grille 99×99. On colorie certains carrés de la grille avec l'une des cinq couleurs de sorte que

— Chaque couleur apparaît le même nombre de fois dans la grille.

— Aucune ligne et aucune colonne ne contient des cases de couleur différente.

Quelle est le plus grand nombre possible de cases que l'on peut colorier en suivant ces règles ?

Exercice 4. Une partie se joue sur un échiquier de taille $n \times n$. Au début, il y a 99 pierres sur chaque case. Tour à tour, Aimeric et Benoit choisissent une ligne ou une colonne et retirent une pierre de chaque case de la ligne ou de la colonne choisie. Ils ne peuvent choisir une ligne ou une colonne que si elle comporte au moins une pierre sur chaque case. Le premier joueur qui ne peut pas se déplacer perd la partie. Aimeric joue le premier tour. Déterminer tous les n pour lesquels Benoit a une stratégie gagnante.

Exercice 5. Soit n un entier naturel. Joseph peut tirer $2n+1$ flèches. Chacun de ses tirs est un échec ou une réussite. Un tir est dit "équilibré" si le nombre d'échecs avant ce tir additionné au nombre de réussites après ce tir est égal à n. Déterminer si le nombre de tirs équilibrés est pair ou impair.

Exercice 6. Dans une école il y a n cours et n élèves. Les élèves sont inscrits dans plusieurs cours de sorte que deux élèves différents n'ont jamais exactement les même cours. Prouver qu'on peut supprimer un cours de sorte qu'aucune paire d'élèves ne se retrouve avec exactement les mêmes cours.

Exercice 7. Déterminer le plus grand entier n pair ayant la propriété suivante : quelle que soit la façon de paver une grille $n \times n$ avec des dominos, il existe une ligne coupant le tableau en deux parties non vides et n'intersectant aucun domino.

Exercice 8. Aline et Elsa jouent au jeu suivant. Elles disposent de 100 pierres qu'elles séparent en deux piles (pas forcément de même taille) au début du jeu. Puis chacune à leur tour, en commençant par Aline, elles effectuent le mouvement suivant : elles choisissent une pile, puis un entier strictement positif inférieur ou égal à la moitié de la taille de la pile choisie et retirent ce nombre de pierres de la pile. La première joueuse qui ne peut plus effectuer de mouvement perd.

Déterminer toutes les configurations initiales pour lesquelles Elsa a une stratégie gagnante.

Exercice 9. Soit N un entier strictement positif. On suppose qu'il existe quatre sous-ensembles A_1, A_2, A_3 et A_4 de $\{1, \ldots, N\}$, chacun de cardinal 500 et on suppose que, pour tous x, y dans $\{1, \ldots, N\}$, il existe un indice i tel que x et y sont dans A_i. Déterminer la plus grande valeur de N possible.

Exercices Seniors

Exercice 10. Aurélien découpe une feuille de papier en 7 morceaux. Une étape consiste ensuite à choisir un morceau et à le découper en $4, 7$ ou 10 morceaux. Aurélien peut-il obtenir ainsi 2021 morceaux ?

Exercice 11. On dispose de cinq couleurs et d'une grille 99×99. On colorie certains carrés de la grille avec l'une des cinq couleurs de sorte que

— Chaque couleur apparaît le même nombre de fois dans la grille.

— Aucune ligne et aucune colonne ne contient des cases de couleur différente.

Quelle est le plus grand nombre possible de cases que l'on peut colorier en suivant ces règles ?

Exercice 12. Soit k un entier strictement positif et P un point du plan. Déterminer le plus petit entier n ayant la propriété suivante : on peut tracer n droites ne passant pas par P de sorte que toute demi-droite d'origine le point P coupe au moins k droites.

Exercice 13. Soit $k \geqslant 1$ un nombre entier.

Considérons $4k$ jetons, dont $2k$ sont rouges et $2k$ sont bleus. Une suite de ces $4k$ jetons peut être transformée en une autre suite par un mouvement, consistant à interchanger un certain nombre (éventuellement un seul) de jetons rouges consécutifs avec un nombre égal de jetons bleus consécutifs. Par exemple, un mouvement permet de passer de r<u>bb</u>br<u>r</u>rb à r<u>r</u>rbr<u>bb</u>b où r désigne un jeton rouge et b désigne un jeton bleu.

Déterminer le plus petit nombre n (comme fonction de k) tel que, partant de n'importe quelle suite initiale des $4k$ jetons, il faut au plus n mouvements pour atteindre l'état dans lequel les $2k$ premiers jetons sont rouges.

Exercice 14. Aline et Elsa jouent au jeu suivant. Elles disposent de 100 pierres qu'elles séparent en deux piles (pas forcément de même taille) au début du jeu. Puis chacune à leur tour, en commençant par Aline, elles effectuent le mouvement suivant : elles choisissent une pile, puis un entier strictement positif inférieur ou égal à la moitié de la taille de la pile choisie et retirent ce nombre de pierres de la pile. La première joueuse qui ne peut plus effectuer de mouvement perd.

Déterminer toutes les configurations initiales pour lesquelles Elsa a une stratégie gagnante.

Exercice 15. Soit $n \geqslant 3$ un entier. On colorie $2n$ sommets d'un $4n + 1$-gone régulier. Montrer qu'il existe trois sommets coloriés qui forment un triangle isocèle.

Exercice 16. On considère un 2022-gone régulier de côté 1. Les points sont numérotés $A_1, \ldots, A_{2022}$ dans un certain ordre. Au départ, Elie part du point A_1 , puis saute de point en point vers le point A_2, puis de A_2 vers A_3 etc... chaque fois en prenant l'arc le plus court. Lorsqu'il atteint A_{2022}, il rejoint finalement A_1. Déterminer la valeur maximale de la somme des longueurs des arcs qu'a parcouru Elie, parmi toutes les numérotations de points possibles.

Exercice 17. On considère 51 entiers strictement positifs de somme 100 sur une ligne. Montrer que pour tout entier $1 \leqslant k < 100$, il existe des entiers consécutifs de somme k ou $100 - k$.

Exercice 18. Soient $C_1, C_2, ...C_n$ des cercles de même rayon disposés dans le plan de sorte qu'ils ne soient jamais tangents 2 à 2 et qu'il existe toujours un chemin passant par les cercles pour aller d'un point de l'un d'entre eux à un autre (autrement dit, les cercles sont connectés). En notant S l'ensemble des points d'intersection des cercles, montrer que $|S| \geqslant n$.