PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 4 : COMBINATOIRE
À RENVOYER AU PLUS TARD LE 20 MARS 2023

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe junior est constitué des élèves nés en 2008 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe senior.
- Les exercices classés “Juniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés “Seniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Exercices Juniors

Exercice 1. Six paniers à fruits contiennent des poires, des pêches et des pommes. Le nombre de pêches dans chaque panier est égal au nombre total de pommes dans les autres paniers. Le nombre de pommes dans chaque panier est égal au nombre total de poires dans les autres paniers. Montrez que le nombre total de fruits est un multiple de 31.

Solution de l'exercice 1 Notons $p_1, p_2, \ldots, p_6$ le nombre de poires dans chaque panier, et $q_1, q_2, \ldots, q_6$ le nombre de pommes dans chaque panier. Notons également P le nombre total de poires. On a :

$$\begin{array}{rcccl} q_1 & = & p_2+p_3+p_4+p_5+p_6 & = & P-p_1 \\ q_2 & = & p_1+p_3+p_4+p_5+p_6 & = & P-p_2 \\ & \ldots & & & \\ q_6 & = & p_1+p_2+p_3+p_4+p_5 & = & P-p_3 \end{array}$$

D'où : $q_1+q_2+\cdots+q_6 = (P-p_1)+(P-p_2)+\cdots+(P-p_6) = 6P-(p_1+p_2+\cdots+p_6) = 5P$
Le nombre total de pommes est égal à 5 fois le nombre total de poires. De même, le nombre total de pêches est égal à 5 fois le nombre total de pommes, donc à 25 fois le nombre total de poires. Le nombre total de fruits est donc égal à $31 = 25+5+1$ fois le nombre total de poires, et est donc multiple de 31.

Commentaire des correcteurs : Exercice très bien réussi.

Exercice 2. Une ligne maritime Est-Ouest voit partir chaque matin 10 bateaux à des moments tous distincts, 5 bateaux partent du côté Ouest et 5 du côté Est. On suppose qu'ils naviguent tous à la même vitesse et que dès que deux bateaux se rencontrent ils se retournent et repartent chacun de leur côté, toujours à la même vitesse. Quel est le nombre possible de rencontres entre bateaux ?

Solution de l'exercice 2 Le nombre de croisements ne change pas si on dit que les bateaux continuent tout droit au lieu de faire demi-tour lors d'une rencontre. Chaque bateau qui part d'un côté croise tous les autres bateaux qui partent de l'autre côté. Il y a donc $5 \times 5 = 25$ rencontres.

Commentaire des correcteurs : L'énoncé de cet exercice mal réussi a manifestement troublé les élèves, peut-être parce qu'il n'était pas assez précis. On considérait en effet que tous les bateaux étaient déjà à l'eau et partis avant la première rencontre. Il fallait alors déterminer combien il pouvait y avoir de rencontres entre bateaux (pas simplement le nombre maximal, mais bien *tous les nombres de rencontres possibles*).

Si beaucoup d'élèves ont donné le nombre correct (il y en a toujours 25), très peu semblent avoir compris (ou du moins expliqué) que cela ne dépendait effectivement pas des écarts entre les bateaux. Un certain nombre d'élèves ont reconnu que les changements de sens des bateaux suivaient des sortes de "phases", (les deux premiers bateaux se rencontrent, repartent dans des directions opposés, "transmettent" cela vers les bateaux extrêmes, qui repartent en sens opposé et "retransmettent" de proche en proche vers les bateaux centraux la bonne direction) et ont tenté de s'en servir pour aboutir au 25. Mais aucun n'a justifié l'existence de ces phases, ni pourquoi on pouvait les traiter séparément, alors que celles-ci ne se déroulent pas vraiment successivement ! Pour s'en convaincre, on pourra considérer le cas où les trois bateaux venant de l'ouest et les cinq bateaux venant de l'est sont très proches les uns des autres, mais les deux derniers bateaux venant de l'ouest sont bien plus lointains. D'autres approches ont été tentées, avec des justifications en général insuffisantes. On rappelle que les affirmations, dans un exercice olympique, sont insuffisantes : celles-ci doivent être démontrées. Si l'on ne sait pas les démontrer, c'est un signe d'autant plus sûr qu'une preuve est nécessaire. Une meilleure approche (que quelques rares copies ont trouvée, sous diverses formes) consistait à remarquer, comme dans le corrigé, que du point de vue du nombre de rencontres, l'énoncé produit les mêmes résultats que si les deux bateaux poursuivaient leur chemin après un croisement. Dans ce cas, un croisement doit impliquer deux bateaux de directions opposées, chaque bateau venant de l'ouest doit croiser chaque bateau venant de l'est, d'où $5 \cdot 5 = 25$ croisements.

Exercice 3. Soit $n \geqslant 6$. Prouvez que chaque carré peut être découpé en exactement n carrés (pas nécessairement de même taille).

Solution de l'exercice 3 On peut le montrer par récurrence. Si on a un découpage du carré en n carrés, on peut obtenir un découpage en $n+3$ carrés en subdivisant l'un des carrés en 4. Il suffit donc de montrer que l'on peut découper un carré en $6, 7$ et 8 carrés. Pour 6, on subdivise le carré en une grille 3×3 et on fusionne les 4 carrés en haut-gauche. Pour 7, on subdivise le carré en 4, puis on subdivise l'un des carrés obtenus en 4. Pour 8, on subdivise le carré en une grille 4×4 et on fusionne les 9 carrés en haut-gauche.

Commentaire des correcteurs : Exercice très bien réussi. Deux méthodes sont apparues, soit avec une récurrence, soit une découpe selon la parité, mais elles étaient bien expliquées dans l'ensemble.

Exercice 4. Un certain nombre de diagonales divisent un polygone convexe en triangles. Ces segments ne peuvent s'intersecter que sur un sommet du polygone. Sur chaque sommet du polygone on écrit le nombre de triangles qui touchent ce sommet. Est-il possible de reconstruire les diagonales en connaissant seulement les nombres sur les sommets ?

Solution de l'exercice 4 Il est toujours possible de reconstruire les diagonales en utilisant ce procédé :

— On considère un sommet "visible" v qui ne touche qu'un seul triangle.
— On trace la diagonale qui relie les deux sommets x et y adjacents à v.
— On "cache" v et on retire 1 au nombre de triangles adjacents de x, y.
— On continue jusqu'à ce qu'il ne reste plus que 3 sommets.

On utilise pour cela le fait que dans toute triangulation d'un polygone convexe, il existe un sommet adjacent à un seul triangle. Pour le montrer, on considère la diagonale d qui "saute" le moins de sommets : si v est un sommet sauté, il n'est relié à aucune diagonale sinon elle serait plus courte que d (car elles ne peuvent pas s'intersecter). Il est donc adjacent à un unique triangle.

Commentaire des correcteurs : Exercice bien réussi. Attention, il fallait bien justifier l'existence du sommet avec un 1 qui n'est pas absolument évidente.

Exercice 5. Nimatha et Thanima jouent à un jeu sur un échiquier 8×8. Tour par tour en commençant par Nimatha, chaque joueur choisit une case qui n'a pas encore été choisie et la colorie dans sa couleur (rouge pour Nimatha, bleu pour Thanima). Montrez que Thanima peut toujours faire que Nimatha ne puisse colorier aucun carré 2×2 entièrement en rouge.

Solution de l'exercice 5 On considère le coloriage suivant :

1	1	2	2	3	3	4	4
5	6	6	7	7	8	8	5
9	9	10	10	11	11	12	12
13	14	14	15	15	16	16	13
17	17	18	18	19	19	20	20
21	22	22	23	23	24	24	21
25	25	26	26	27	27	28	28
29	30	30	31	31	32	32	29

Lorsque Nimatha joue sur un nombre X, Thanima réagit en jouant sur la seconde occurrence du nombre X. Tout carré 2×2 contient deux nombres identiques : si l'un est coloré en rouge, l'autre est coloré en bleu. Ainsi, il est impossible pour Nimatha de créer un carré 2×2 entièrement rouge si Thanima suit cette stratégie.

Commentaire des correcteurs : L'exercice est globalement bien réussi. Mais tous les élèves ayant voulu proposer une stratégie sans pavage n'ont pas réussi : en effet, souvent il est difficile de construire une stratégie marchant dasn tous les cas quand il y a 64 coups possibles au tout début.

Exercice 6. Au moins $n(\sqrt{n}+\frac{1}{2})$ carrés d'un échiquier $n \times n$ ont été marqués. Montrer qu'il existe quatre cases marquées qui forment les coins d'un rectangle.

Solution de l'exercice 6 On essaye d'utiliser le principe des tiroirs. S'il y a deux cases marquées aux coordonnées (i,j) et (i,k), on met une chaussette dans le tiroir étiqueté (j,k). Il y a $\frac{n(n-1)}{2}$ tiroirs possibles. S'il y a deux chaussettes dans le même tiroir (j,k), c'est qu'il existe i, i' tels que (i,j), (i,k), (i',j), (i',k) sont toutes marquées, et on a bien trouvé quatre cases marquées qui forment les coins d'un rectangle.
Il ne reste plus qu'à montrer qu'il y a strictement plus de chaussettes de tiroirs. On note d_i le nombre de cases marquées dans la i-ème colonne. On a :

$$\sum_{i=1}^{n} d_i \geqslant n(\sqrt{n}+\frac{1}{2})$$

Le nombre de chaussettes vaut :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d_i^2 - d_i}{2}$$

En utilisant Cauchy-Schwarz, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{d_i^2 - d_i}{2} &\geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} d_i\right)^2}{n} - \sum_{i=1}^{n} d_i\right) \\
&\geqslant \frac{1}{2n}(n(\sqrt{n}+\frac{1}{2}))(n(\sqrt{n}+\frac{1}{2})-n) \\
&= \frac{1}{2}n(\sqrt{n}+\frac{1}{2})(\sqrt{n}-\frac{1}{2}) \\
&= \frac{1}{2}n(n-\frac{1}{4})
\end{aligned}$$

Ce qui est effectivement strictement plus grand que le nombre de tiroirs.

Commentaire des correcteurs : Très peu de copies ont rendu l'exercice. Ici il était naturel d'essayer de regarder les paires de points par colonne : c'était l'idée clé du problème, et elle permettait ensuite d'écrire des inégalités comme dans le corrigé.

Exercice 7. Soit $n \geqslant 3$ un entier. Chaque ligne d'un tableau $(n-2) \times n$ contient les nombres de 1 à n en un exemplaire chacun, on suppose de plus que dans chaque colonne tous les nombres sont différents. Montrer que l'on peut compléter le tableau en un tableau $n \times n$ de telle sorte que dans chaque ligne et dans chaque colonne il y ait tous les nombres de 1 à n.

Solution de l'exercice 7 Notons a_i, b_i les deux nombres qu'il manque dans la colonne i. Chacun des nombres de 1 à n apparaît en deux exemplaires parmi les a_i, b_i. Construisons un multigraphe dont les sommets sont les nombres de 1 à n, et pour chaque $i = 1, \ldots, n$, on ajoute une arête entre a_i et b_i.
Chaque sommet de ce graphe est de degré 2, il s'agit donc d'un ensemble de cycles disjoints. On peut donc orienter les arêtes de chaque cycle dans un sens arbitraire. On obtient alors un multigraphe orienté dont chaque sommet à un degré entrant de 1 et un degré sortant de 1. Imaginons que l'arête de la i-ème colonne pointe de u vers v, alors on écrit u aux coordonnées $(i, n-1)$ et v aux coordonnées (i, n). La propriété des degrés donne que chaque nombre apparaît exactement une fois sur chaque ligne.

Commentaire des correcteurs : Bien dans l'ensemble, tous les élèves ont la construction. Néanmoins, peu proposent une justification complète de celle-ci.

Exercice 8. Dans un tournoi organisé entre 6 équipes, chaque équipe joue contre chaque autre équipe exactement une fois. Lorsqu'une équipe gagne, elle obtient 3 points, et l'équipe perdante reçoit 0 point. Si la partie est nulle, les deux équipes reçoivent un point. Déterminez les a pour lesquels il est possible que les scores finaux des équipes puissent être les six nombres consécutifs $a, a+1, \ldots, a+5$?

<u>*Solution de l'exercice 8*</u> Lors de chaque match, entre deux et trois points sont attribués au total. Étant donné qu'il y a 15 matchs au total, il y a donc eu entre 30 et 45 points de répartis entre les équipes. On doit donc avoir :

$$30 \leqslant a + (a+1) + (a+2) + \cdots + (a+5) \leqslant 45$$
$$30 \leqslant 6a + 15 \leqslant 45$$

Ce qui signifie que a peut seulement être $3, 4$ ou 5.
Si $a = 5$, aucun match n'a pu être nul donc tous les scores sont des multiples de 3. Il n'est donc pas possible d'avoir 6 nombres consécutifs pour les scores, et ce cas n'est pas possible.
Si $a = 3$, les scores sont $3, 4, 5, 6, 7, 8$. Les équipes qui ont 6 et 7 points ont chacune gagné au moins un match, et l'équipe qui a 8 points a gagné au moins 2 matchs, donc au moins 4 matchs n'ont pas fini par une partie nulle. Ainsi, le nombre total de points répartis entre les équipe vaut au moins 34, or $3+4+5+6+7+8 = 33$, ce cas n'est donc pas possible.
Le cas $a = 4$ est possible. Les scores sont $4, 5, 6, 7, 8, 9$. Voici un tableau qui fonctionne :

X	3	1	0	0	0
0	X	1	0	3	1
1	1	X	3	0	1
3	3	0	X	1	0
3	0	3	1	X	1
3	1	1	3	1	X

Le nombre écrit sur la j-ème colonne de la i-ème ligne est le score obtenu par l'équipe i lors de son match contre l'équipe j.

<u>*Commentaire des correcteurs :*</u> L'exercice est très bien réussi par les élèves l'ayant traité.

Exercice 9. Plusieurs nombres sont écrits sur une ligne. Thanima a le droit de choisir deux nombres adjacents de telle sorte que le nombre de gauche soit strictement plus grand que le nombre de droite, elle échange alors ces deux nombres et les multiplie par 2. Montrer que Thanima ne peut effectuer qu'un nombre fini de telles opérations.

Solution de l'exercice 9 On commence par poser un jeton sur le minimum (si égalité, sur le nombre le plus à gauche). On bouge le jeton avec le nombre sur lequel il est posé. On va montrer que le jeton se déplace toujours vers la gauche.
Pour cela, supposons par l'absurde qu'à un moment, le jeton s'est déplacé vers la droite. Alors soit x la position du jeton avant l'échange, i la position initiale du jeton, et j la position initiale du nombre avec qui le jeton est échangé. Si $i < j$, alors comme le jeton n'est jamais allé vers la droite avant, l'autre nombre a dû faire au moins autant de déplacements que le jeton ; il a donc été multiplié par deux au moins autant de fois. Comme le jeton avait été posé sur le minimum, le nombre du jeton est plus petit (ou égal) au nombre à la position $x + 1$. Le déplacement vers la droite n'était donc pas possible. Si $j < i$, alors le jeton et le nombre qui était initialement sur j ont déjà été échangés une fois ; juste après cet échange, le nombre avec le jeton était plus petit que le nombre qui était initialement en j. Le même argument que le cas précédent s'applique : si le nombre initialement en j est à nouveau juste à droite du jeton, il a du être doublé au moins autant de fois ; il est donc resté plus grand et ne peut pas être échangé à nouveau. Ainsi, le jeton se déplace toujours vers la gauche.
Maintenant, on démontre le résultat par récurrence sur le nombre n de nombres écrits sur la ligne. Comme le jeton se déplace toujours vers la gauche, à partir d'un certain nombre de mouvements, il ne bouge plus. On remarque alors que les nombres à gauche et à droite du jeton forment deux instances séparées du problème initial, et on ne peut effectuer qu'un nombre fini d'opérations sur chaque instance par hypothèse de récurrence. On ne peut donc effectuer qu'un nombre fini d'opérations sur l'instance entière. L'initialisation en $n = 0$ est évidente.

Commentaire des correcteurs : Très peu (4) de solutions rendues pour cet exercice difficile. Deux ne font qu'effleurer l'exercice, et les deux autres utilisent une solution ne figurant pas dans la correction, consistant à montrer que deux nombres ne peuvent être échangés qu'au plus une fois. Cependant, aucun ne parvient à développer les arguments de façon convaincante.

Exercices Seniors

Exercice 10. Comptez le nombre de réarrangements $a_1, a_2, \ldots, a_{2023}$ de la séquence $1, 2, \ldots, 2023$ telle que $a_k > k$ pour exactement une valeur de k.

<u>*Solution de l'exercice 10*</u> À un réarrangement valide, on peut lui associer un sous-ensemble de $1, \ldots, 2023$ de cardinal au moins 2 : l'ensemble des k tels que $a_k \neq k$.
On peut montrer qu'à un sous-ensemble de cardinal au moins 2 de $1, \ldots, 2023$, on peut associer un unique réarrangement valide qui lui correspond. Si l'ensemble est $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ avec $e_1 < e_2 < \cdots < e_n$, l'unique réarrangement qui a pour ensemble associé E vérifie : $a_{e_1} = e_n, a_{e_2} = e_1, a_{e_3} = e_2, \ldots, a_{e_n} = e_{n-1}$ et pour tout $k \notin E$, $a_k = k$.
Ainsi, le nombre de réarrangements valides est égal au nombre de sous-ensembles de $1, \ldots, 2023$ de cardinal au moins 2. La réponse est donc :

$$2^{2023} - 2024$$

<u>*Commentaire des correcteurs :*</u> La plupart des copies rendues donnent une solution correcte. Seulement deux ont raisonné comme dans le corrigé. Les autres ont soit raisonné par récurrence en remplaçant 2023 par n, soit omt procédé par sommation (deux copies ont présenté la somme correcte mais n'ont pas su la calculer : peut-être qu'il ne connaissent pas la somme d'une suite géométrique)

Exercice 11. Un terrible groupe de bandits se prépare à se partager un butin. Chaque bandit vise deux autres bandits avec ses pistolets. Les bandits sont appelés dans un certain ordre. Lorsqu'un bandit est appelé, s'il est encore en vie, il tire sur les bandits qu'il visait. Après que tous les bandits ont été appelés, il y a eu 28 victimes. Montrez que quelque soit l'ordre dans lequel on avait appelé les bandits, il y aurait eu au moins 10 victimes.

Solution de l'exercice 11 Supposons par l'absurde qu'il existe un ordre qui cause 9 victimes ou moins. Il y a alors trois catégories de bandits :

— Ceux qui sont morts avant de tirer
— Ceux qui ont pu tirer puis sont morts
— Ceux qui sont encore en vie à la fin

Les bandits de 1ère et 2ème catégorie sont au total au plus 9, car il y a au plus 9 victimes. Les bandits de 2ème et 3ème catégorie ne visent que des bandits de 1ère ou 2ème catégorie (s'ils ont tiré, leurs cibles sont mortes). Ils visent donc un sous-ensemble d'au plus 9 bandits. De plus, les bandits de 1ère catégorie ne visent qu'au plus $2 \times 9 = 18$ bandits : il y a au plus 9 bandits de cette catégorie et chacun vise au plus 2 bandits. Il y a finalement au plus $18 + 9 = 27$ bandits visés : il existe un bandit qui n'est visé par personne. Ce bandit survit quelque soit l'ordre d'appel, ce qui contredit l'énoncé.

Commentaire des correcteurs : Le principe était généralement compris mais il a été difficile pour plusieurs copies de justifier rigoureusement l'intuition. En particulier, certains considèrent les cas optimaux mais sans justifier qu'ils sont optimaux (ils peuvent par ailleurs ne pas être atteignables).

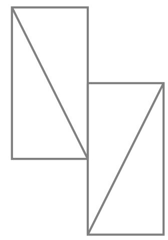
Exercice 12. Les nombres $0, 1, \ldots, n$ sont écrits sur un tableau. À tout moment, Thanima peut effacer un nombre s'il est la moyenne arithmétique de deux nombres encore présents sur le tableau. L'objectif de Thanima est d'effacer le plus de nombre possible, et elle joue de façon optimale. En fonction de n, combien de nombres reste t-il à la fin sur le tableau ?

Solution de l'exercice 12 Si $n \leqslant 2$, la réponse est n.
Sinon, à la fin du procédé, il existe toujours au moins deux nombres : on ne peut effacer ni 0 ni n.
Si $n = 2^k$ est une puissance de 2, il est possible de n'avoir que deux nombres sur le tableau à la fin : on commence par effacer tous les nombres congrus à 1 modulo 2, puis tous les nombres congrus à 2 modulo 4, ..., puis tous les nombres congrus à 2^i modulo 2^{i+1}, ..., puis 2^{k-1}. Il ne reste alors plus que 0 et 2^k.
Si n n'est pas une puissance de 2, on peut toujours obtenir 3 nombres : on écrit $n = 2^k + a$ avec $0 < a < 2^k$. On efface dans l'ordre $n-1, n-2, \ldots, 2^k+1$, puis on efface les nombres entre 1 et $2^k - 1$ en utilisant la même technique qui est utilisée pour $n = 2^k$. À la fin, il reste $0, 2^k$ et n.
Montrons maintenant que lorsque $n > 2$ n'est pas une puissance de 2, on ne peut pas finir avec seulement 0 et n. Supposons par l'absurde qu'il existe une séquence de suppressions qui permet de ne finir qu'avec 0 et n. Soit p un nombre premier impair qui divise n. En prenant la séquence des suppressions à l'envers, on obtient une séquence d'insertions où l'on part de 0 et n, et si x et y sont présents, on peut ajouter $\frac{x+y}{2}$ si c'est un nombre entier. Par récurrence, on démontre alors que tous les nombres obtenus sont divisibles par p, en particulier, on ne peut pas obtenir 1, ce qui est la contradiction recherchée.

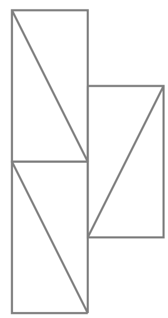
Commentaire des correcteurs : Exercice globalement très réussi par ceux l'ayant traité ; quelques imprécisions, notamment des solutions qui ne précisent pas dans quel ordre enlever les entiers entre 2^k et n, alors que celui-ci est important.

Exercice 13. Un rectangle est divisé en dominos 1×2 et 2×1. Dans chaque domino, une diagonale est tracée. Deux diagonales n'ont jamais d'extrémité commune. Montrez que exactement deux coins du rectangle sont des extrémités de ces diagonales.

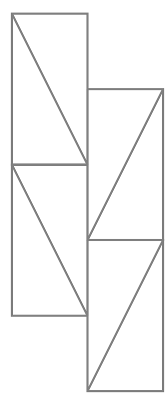
Solution de l'exercice 13 Remarquons que ce motif (ainsi que toutes ses rotations et symétries) est impossible :



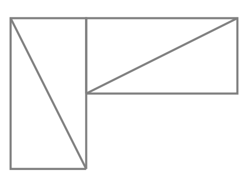
En effet, le seul moyen de compléter le carré bas-gauche est d'ajouter ce domino :



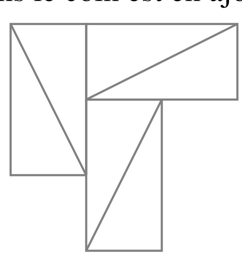
De même, le seul moyen de compléter le carré bas-droite est d'ajouter ce domino :



On ne peut pas continuer pour toujours, car on finit par atteindre le bord du rectangle.
Ce motif aussi est impossible (ainsi que toutes ses rotations et symétries) :



car le seul moyen de compléter le carré dans le coin est en ajoutant ce domino :



ce qui fait apparaître le motif interdit précédent. Grâce à une analyse minutieuse, ces deux cas démontrent qu'il n'est en fait pas possible que deux dominos qui partagent un bord aient leurs diagonales dans des sens différents (montantes ou descendantes). Si on forme le graphe G dont les sommets sont les dominos et où il y a une arête entre deux dominos s'ils partagent un bord en commun, G est connexe. Ainsi, tous les dominos ont leur diagonale dans le même sens ; on en déduit facilement la propriété demandée.

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été peu traité. Ceux qui ont rendu une copie ont en général bien compris l'exercice et bien traité tous les cas et vu le motif du corrigé. Certains ont une argumentation différente en regardant un chemin entre les diagonales opposées, et d'autres utilisent un raisonnement de théorie des graphes.

Exercice 14. Soit G un graphe à n sommets. Une arête e de G est un cul-de-sac s'il est possible de partitionner G en deux ensembles A et B tels que :

— Il y a au plus 2023 arêtes de G ayant une extrémité dans A et une extrémité dans B.

— L'arête e a l'une de ses extrémités dans A et l'autre dans B.

Montrez qu'il y a au plus $2023(n-1)$ culs-de-sac.

Solution de l'exercice 14 On le démontre par récurrence forte sur n. Le cas $n = 1$ est immédiat. S'il n'existe aucun cul-de-sac dans G, la propriété est triviale. Sinon, soit e un cul-de-sac de G. On obtient une partition des sommets de G en deux ensembles A, B telle qu'il y a au plus 2023 arêtes entre A et B. D'après l'hypothèse de récurrence, il y a au plus $2023(|A|-1)$ culs-de-sacs lorsque l'on ne considère que les sommets de A et les arêtes qui relient ces sommets. De même, il y a au plus $2023(|B|-1)$ culs-de-sacs lorsque l'on ne considère que les sommets de B et les arêtes qui les relient. On remarque que si une arête e n'est pas un cul-de-sac dans le graphe restreint à A (de même pour B), alors elle n'est pas non plus un cul-de-sac dans G. Il y a donc au plus :

$$2023 + 2023(|A| - 1) + 2023(|B| - 1) = 2023(|G| - 1)$$

culs-de-sacs dans G, ce qui termine l'hérédité.

Commentaire des correcteurs : L'exercice est globalement bien réussi. Plusieurs élèves oublient de vérifier et même de mentionner qu'un cul-de-sac d'un graphe G appartenant à un sous-graphe A de G est un cul-de-sac pour A, c'est dommage car c'est un argument important de la preuve. En effet, être un cul-de-sac dans deux graphes différents n'est à priori pas lié.

Exercice 15. On place un certain nombre de segments ouverts dans le plan, aucun d'entre eux n'est parallèle aux axes x et y. Ces segments sont **disjoints**. Thanima commence à se déplacer depuis $(0, 0)$ parallèlement à l'axe x. À chaque fois qu'elle rencontre un mur, elle tourne de 90 degrés, et continue à se déplacer sans traverser le mur.
Démontrez qu'il est impossible que Thanima visite les deux côtés de tous les murs.

Solution de l'exercice 15 On commence par démontrer qu'il existe un mur qui est plus bas que tous les autres (c'est à dire que l'ensemble des points sous ce segment n'intersecte aucun segment). Supposons par l'absurde que ce n'est pas le cas. On peut alors construire un cycle $A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots, A_k, B_k$ qui ne s'intersecte pas lui-même, où A_i et B_i sont sur le même mur, et $[B_i, A_{i+1}]$ est un segment vertical où B_i est au dessus de A_{i+1} (on considère les indices modulo k). On considère l, r tel que $[B_l, A_{l+1}]$ soit le plus à gauche et $[B_r, A_{r+1}]$ soit le plus à droite. Le cycle donne une ligne brisée entre B_l et A_{r+1}, et une autre entre B_r et A_{l+1}. Cependant, les lignes brisées ne passent ni à gauche de $[B_l, A_{l+1}]$ ni à droite de $[B_r, A_{r+1}]$, et leurs extrémités sont "croisées", elles doivent donc s'intersecter. C'est une contradiction avec le fait que le cycle ne s'intersecte pas lui-même.
Similairement, il existe un mur plus haut que tous les autres. Si Thanima passe par le côté haut du mur le plus haut, elle continue à marcher vers l'infini en direction des y positifs. Si Thanima passe par le côté bas du mur le plus bas, elle continue à marcher vers l'infini en direction des y négatifs. Ces deux cas ne peuvent pas arriver simultanément, elle ne passe donc que par un seul de ces deux côtés. En particulier, elle ne peux pas passer par tous les côtés de tous les murs.

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été peu traité. La plupart des solutions sont justes et proches de celle proposées dans le corrigé ; néanmoins, elles présentaient un certain nombre d'imprécisions, auxquelles il faut être particulièrement attentif quand il s'agit de quelque chose d'aussi visuel que la géométrie combinatoire.

Exercice 16. Soit $k \geqslant 1$ un entier. Quel est le plus petit entier n tel que, quelque soit la manière de placer n points dans le plan, il est possible de choisir un sous-ensemble S constitué de k de ces points qui vérifie "pour toute paire P, Q de points de S, la distance entre P et Q est inférieure ou égale à 2" ou "pour toute paire P, Q de points de S, la distance entre P et Q est strictement plus grande que 1."

Solution de l'exercice 16 Commençons par montrer que $n = (k-1)^2 + 1$ est possible. Pour cela, considérons le disque de rayon 1 centré sur un point P_1 de l'ensemble. S'il y a au moins k points dans ce disque, on peut prendre pour S ces k points (les distances entre eux sont inférieures ou égales à 2). On peut donc supposer qu'il y a au plus $(k-1)$ points dans le disque.
Considérons alors un disque de rayon 1 centré sur un P_2 de l'ensemble qui n'est pas dans le disque précédent. Par le même argument, on peut supposer qu'il y a au plus $(k-1)$ points dans ce disque.
En continuant à choisir des points en dehors des disques précédents, et comme on exclut au plus $(k-1)$ points à chaque étape, on arrive à construire $S = \{P_1, \ldots, P_k\}$ de telle manière à ce que les distances entre ces points soient toutes strictement supérieures à 1.
Pour montrer que $n = (k-1)^2$ n'est pas possible, on place à distance très grande les uns des autres $k-1$ groupes, ou chaque groupe est constitué de $k-1$ points à distance très petite.

Commentaire des correcteurs : Exercice très bien réussi par ceux qui l'ont traité, avec des méthodes très variées : certains ont utilisé la même technique que la correction, d'autres ont recouru à la théorie des graphes par exemples.

Exercice 17. Soit $k, n \geqslant 1$ deux entiers fixés. Thanima possédait $2n$ bonbons de chaque couleur. Elle a donné deux bonbons de couleurs différentes à chacun des enfants de sa famille. Sachant que quelque soit la manière de choisir $k+1$ enfants, il y en a deux parmi eux qui ont reçu une couleur de bonbon en commun, trouvez le nombre maximum possible d'enfants.

Solution de l'exercice 17 On peut modéliser le problème par un graphe : chaque sommet de ce graphe est une couleur. Si Thanima a donné un bonbon d'une couleur c_1 et un bonbon d'une couleur c_2 à un enfant de sa famille, on ajoute une arête entre c_1 et c_2.
Comme Thanima n'a que $2n$ bonbons de chaque couleur, le degré maximal de chaque sommet est $2n$. On sait de plus qu'il est impossible de choisir $k+1$ arêtes disjointes. On cherche le nombre maximal d'arêtes.
On voit qu'il est possible d'obtenir $3kn$ arêtes. Pour cela, on crée un graphe dans lequel on met k fois la structure suivante : on crée trois sommets, et entre chaque paire de ces trois sommets, on ajoute n arêtes.
Montrons qu'il n'est pas possible de faire plus que $3kn$. Pour cela, on considère un ensemble C d'arêtes disjointes de plus grand cardinal. D'après l'énoncé, on a $|C| \leqslant k$. Ainsi, chaque arête du graphe doit intersecter l'une des arêtes de C, sinon cela contredirait la maximalité de C. Notons V_C l'ensemble des sommets qui apparaissent dans l'une des arêtes de C. Le nombre d'arêtes du graphe vaut :

$$\sum_{v \in V_C} d_{ext}(v) + \frac{d_{int}(v)}{2}$$

où $d_{ext}(v)$ est le nombre d'arêtes qui relient v à des sommets qui ne sont pas dans V_C, et $d_{int}(v)$ est le nombre d'arêtes qui relient v à des sommets de V_C. Soit (a, b) une arête de C, et soient x, y deux sommets différents qui ne sont pas dans V_C, on ne peut pas à la fois avoir d'arêtes entre a et x et entre b et y, sinon remplacer (a, b) par (a, x) et (b, y) dans C donnerait un ensemble d'arêtes disjointes plus grand. Deux cas peuvent arriver :
— À la fois a et b ont des arêtes vers le complémentaire de V_C, dans ce cas, toutes ces arêtes vont vers le même sommet, et la borne de degré sur ce sommet donnent $d_{ext}(a) + d_{ext}(b) \leqslant 2n$.
— Soit il y a au plus un sommet parmi a et b qui a des arêtes vers le complémentaire de V_C, dans ce cas on a aussi $d_{ext}(a) + d_{ext}(b) \leqslant 2n$.

Comme $d_{int}(v) \leqslant 2n - d_{ext}(v)$ pour tout sommet v, on a :

$$\begin{aligned} d_{ext}(a) + d_{ext}(b) + \frac{d_{int}(a) + d_{int}(b)}{2} &\leqslant d_{ext}(a) + d_{ext}(b) + \frac{4n - d_{ext}(a) + d_{ext}(b)}{2} \\ &= 2n + \frac{d_{ext}(a) + d_{ext}(b)}{2} \\ &\leqslant 3n \end{aligned}$$

Ainsi, en groupant les termes deux à deux, on obtient que le nombre d'arête dans le graphe est :

$$\sum_{v \in V_C} d_{ext}(v) + \frac{d_{int}(v)}{2} \leqslant 3kn$$

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été très peu abordé.

Exercice 18. Thanima possède un magnifique collier constitué de rubis, d'émeraudes et de saphirs, que l'on représente par une suite de R, E et S. En une opération magique, elle peut faire l'une des actions suivantes :

— Remplacer un motif RR dans le collier par un motif ES (ou ES par RR).
— Remplacer un motif EEE par un motif SR (ou SR par EEE).
— Supprimer un motif SS, ou ajouter un motif SS n'importe où.
— Supprimer un motif RES, ou ajouter un motif RES n'importe où.

Il n'est pas possible de déplacer les lettres cycliquement à cause du fermoir. Elle ne peut pas non plus retourner le collier.
Est-il possible de passer d'un collier contenant uniquement un saphir à un collier contenant uniquement une émeraude avec des opérations magiques ?

Solution de l'exercice 18 Supposons que Thanima dispose de trois objets numérotés $1, 2$ et 3 sur trois supports numérotés $1, 2$ et 3. Au début, chaque objet se trouve sur le support qui porte le même numéro. Thanima peut lire les lettres du collier une par une de gauche à droite et faire les opérations suivantes :

— Si elle voit un E, elle échange les objets qui se trouvent sur les supports 1 et 2.
— Si elle voit un S, elle échange les objets qui se trouvent sur les supports 2 et 3.
— Si elle voit un R, elle déplace l'objet sur le support 1 sur le support 2, l'objet sur le support 2 sur le support 3, et l'objet sur le support 3 sur le support 1.

On remarque que :

— Lorsque l'on ajoute un motif SS quelque part, on échange deux fois de suite les objets sur les supports 2 et 3, ce qui ne change pas la position finale des objets.
— Lorsque l'on ajoute un motif RES quelque part, l'objet qui était sur le support 1 à ce moment est déplacé sur le support 2 par R, puis sur le support 1 par E. L'objet qui était sur le support 2 est déplacé sur le support 3 par R, puis sur le support 2 par S. L'objet sur le support 3 est déplacé sur le support 1 par R, puis sur le support 2 par E puis à nouveau sur le support 3 par S. On ne change donc pas la position finale des objets.
— Lorsque l'on applique RR, l'objet sur le support 1 est déplacé sur le support 3, l'objet sur le support 2 est déplacé sur le support 1, et l'objet sur le support 3 est déplacé sur le support 2. Lorsque l'on applique ES, l'objet sur le support 1 est déplacé sur le support 3, l'objet sur le support 2 est déplacé sur le support 1, et l'objet sur le support 3 est déplacé sur le support 2. On ne change donc pas la position finale des objets en remplaçant un motif RR par un motif RES.
— Lorsque l'on applique EEE, cela revient à échanger les objets sur les supports 1 et 2. Lorsque l'on applique SR, l'objet sur le support 1 est envoyé sur le support 2, l'objet 2 est envoyé sur le support 1 et l'objet sur le support 3 reste sur le support 3. On ne change donc pas la position finale des objets en remplaçant un motif EEE par un motif SR.

On conclut qu'aucune opération magique ne permet de changer la position finale des objets. Or les colliers "S" et "E" ne donnent pas les mêmes positions finales des objets, il est donc impossible de passer de l'un à l'autre par des opérations magiques.

Commentaire des correcteurs : Très peu (3) de solutions rendues pour cet exercice très difficile ; aucune n'a été concluante, mais les élèves ont eu de bonnes idées, ce qui est très encourageant. L'idée était effectivement de trouver un invariant, qui consistait ici en une interprétation des lettres R, E et S en tant qu'opérations sur un ensemble. Une fois cette idée en tête, une stratégie raisonnable consistait alors à chercher des simplifications produisant des mots que l'on pouvait identifier à l'opération identité.