PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 5 : POT-POURRI

À RENVOYER AU PLUS TARD LE 28 AVRIL 2023

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe junior est constitué des élèves nés en 2008 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe senior.
- Les exercices classés “Juniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés “Seniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Exercices Juniors

Exercice 1. Trouver toutes les triplets d'entiers positifs (x, y, z) satisfaisant l'équation

$$x! + 2^y = z!.$$

Exercice 2. Soit ABC un triangle equilatéral et P un point sur le cercle circonscrit de ce triangle mais distincs de A, B et C. Les droites passant par P et parallèles à (BC), (CA) et (AB) intersectent les droites (CA), (AB) et (BC) en M, N et Q respectivement. Montrer que les points M, N et Q sont alignés.

Exercice 3. Soit x, y, z trois réels positifs, tel que $x \leqslant 1$. Démontrer que :

$$xy + y + 2z \geqslant 4\sqrt{xyz}.$$

Exercice 4. 2024 élèves, tous de taille différente, doivent se placer en file indienne. Cependant, chaque élève ne souhaite pas avoir à la fois devant lui et derrière lui un élève plus petit que lui. Combien y a-t-il de façons de former une telle file indienne ?

Exercice 5. Soient A, B, C, D et E cinq points dans cet ordre sur un cercle tels que $AE = DE$. Soit P le point d'intersection de (AC) et (BD). Soit Q le point de la demi-droite $[BA)$ tel que $AQ = DP$. Soit R le point de la demi-droite $[CD)$ tel que $DR = AP$. Montrer que les droites (PE) et (QR) sont perpendiculaires.

Exercice 6. Est-il possible de trouver un bloc de 1000 nombres entiers strictement positifs consécutifs qui contient exactement 5 nombres premiers ?

Exercice 7. On dit qu'un entier $k > 1$ est *superbe* s'il existe m, n, a trois entiers strictement positifs tels que

$$5^m + 63n + 49 = a^k.$$

Déterminer le plus petit entier superbe.

Exercice 8. Soit x, y, z trois nombres réels vérifiant $x + y + z = 2$ et $xy + yz + zx = 1$. Déterminer la valeur maximale que peut prendre $x - y$.

Exercice 9. Soit ABC un triangle et I le centre du cercle inscrit. On note D et E les pieds des bissectrices issues de B et C. Soit X l'intersection des symétriques de (AB) et (AC) par rapport à (CE) et (BD). Montrer que les droites (XI) et (BC) sont perpendiculaires.

Exercices Seniors

Exercice 10. Trouver toutes les triplets d'entiers positifs (x, y, z) satisfaisant l'équation

$$x! + 2^y = z!.$$

Exercice 11. Félix souhaite colorier les entiers de 1 à 2023 tels que si a, b sont deux entiers **distincts** entre 1 et 2023 et a divise b, alors a et b sont de couleur différentes. Quel est le nombre minimal de couleur dont Félix a besoin ?

Exercice 12. Soient A, B, C, D et E cinq points dans cet ordre sur un cercle tels que $AE = DE$. Soit P le point d'intersection de (AC) et (BD). Soit Q le point de la demi-droite $[BA)$ tel que $AQ = DP$. Soit R le point de la demi-droite $[CD)$ tel que $DR = AP$. Montrer que les droites (PE) et (QR) sont perpendiculaires.

Exercice 13. On dit qu'un polynôme P est *fantabuleux* s'il existe des réels $a_0, \ldots, a_{2022}$ tel que

$$P(X) = X^{2023} + a_{2022}X^{2022} + \cdots + a_1X + a_0,$$

s'il a 2023 racines $r_1, \ldots, r_{2023}$ (non nécessairement distinctes) dans $[0, 1]$, et si $P(0) + P(1) = 0$. Déterminer la valeur maximale que peut prendre $r_1 \cdot r_2 \cdots r_{2023}$ pour un polynôme fantabuleux.

Exercice 14. Est-il possible de trouver un bloc de 1000 nombres entiers strictement positifs consécutifs qui contient exactement 5 nombres premiers ?

Exercice 15. On dit qu'un nombre rationnel strictement positif q est *magnifique* s'il existe quatre entiers strictement positifs a, b, c, d tels que

$$q = \frac{a^{2021} + b^{2023}}{c^{2022} + d^{2024}}.$$

Existe-t-il un rationnel strictement positif qui n'est pas magnifique ?

Exercice 16. Soit p un nombre premier. Martin la grenouille est situé en position 0 sur la droite réelle. A chaque seconde, Martin effectue un mouvement : il peut rester à sa position, faire un saut de 1 sur la droite, ou faire un saut de 1 sur la gauche. Martin souhaite être revenu au bout de $p-1$ mouvements à sa position initiale : il note alors s_p le nombre de séquences de $p-1$ mouvements lui permettant de revenir à sa position initiale. Quel est le reste de s_p modulo p ?
Par exemple, pour $p = 3$, $s_p = 3$ puisque Martin peut choisit de rester à sa position deux fois, de faire un saut sur la droite puis sur la gauche, ou faire un saut sur la gauche puis sur la droite.

Exercice 17. Déterminer toutes les fonctions f injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que tout polynôme $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$, celui-ci a une racine réelle si et seulement si le polynôme $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^{f(i)}$ a une racine réelle.

Exercice 18. Un quadrilatère convexe $ABCD$ admet un cercle inscrit de centre I. Soit I_a, I_b, I_c et I_d les centres des cercles inscrits de triangles DAB, ABC, BCD et CDA respectivement. On suppose que les tangentes communes aux cercle circonscrits de AI_bI_d et CI_bI_d se rencontrent en X et que les tangentes commune extérieures des cercles circonscrits de BI_aI_c et DI_aI_c se rencontrent en Y. Montrer que $\widehat{XIY} = 90$.