Pot Pourri : Groupe C.

12 mars 2023

1 Exercices

1.1 Transformations du plan

Exercice 1. Soient un cercle Γ et une droite D. Construire une droite parallèle à D coupant le cercle Γ en deux points situés à une distance a donnée.

Exercice 2. On considère trois droites parallèles D_1, D_2 et D_3. Construire un triangle équilatéral $A_1A_2A_3$ appartenant respectivement à D_1, D_2,D_3.

Exercice 3. Soit $A_0A_1A_2$ un triangle et P_0 un point du plan. On construit une suite P_1, P_2, P_3 de telle sorte que P_k soit l'image de P_{k-1} par la rotation de centre $A_{k+1 \mod 3}$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. Montrer que si $P_{1986} = P_0$ alors le triangle $A_0A_1A_2$ est équilatéral.

1.2 Inegalités.

Exercice 4. Soient a, b, c et d quatre réels strictement positifs tels que $a+b+c+d=1$. Montrer que

$$\frac{bcd}{(1-a)^2} + \frac{acd}{(1-b)^2} + \frac{abd}{(1-c)^2} + \frac{abc}{(1-d)^2} \leq \frac{1}{9}$$

Exercice 5. Soit x, y et z des réels positifs vérifiant $x^3y^2z = 1$. Quelle est la valeur minimale de $x + 2y + 3z$?

Exercice 6. Montrer que pour tout entier n,

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1} \geq n(\sqrt[n]{2} - 1)$$

1.3 Polynomes.

Exercice 7. Déterminer tous les polynômes P à coefficients réels de degré k possédant k zéros réels distincts et tels que $P(a+1) = 1$ pour tout a zéro de P.

Exercice 8. Trouver tous les réels a, b tels que $(X-1)^2$ divise $aX^4 + bX^3 + 1$.

Exercice 9. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que P est de degré n tel que pour tout entier $k \in [1, n+1]$ $P(k) = \frac{1}{k}$. Calculer $P(-1)$.

1.4 Ordres.

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ premier avec 10. Montrer qu'il existe un multiple de n qui ne s'écrit qu'avec des 1.

Exercice 11. Trouver tous les $n \in \mathbb{N}^*$ impairs tels que n divise $3^n + 1$.

Exercice 12. Soit k un entier premier avec 6. Montrer qu'il existe un entier $n > 0$ tel que k divise $2^n + 3^n + 6^n - 1$.

1.5 Invariant et monovariants.

Exercice 13. Dans l'espace, on part de l'ensemble de 7 sommets d'un cube. On s'autorise à remplacer un point par son symétrique par rapport à un autre point. Peut-on atteindre le huitième sommet de cette façon ?

Exercice 14. La Reine d'Angleterre veut partager la Chambre des Lords de façon originale : chaque Lord ayant au plus trois ennemis (l'inimité est réciproque), elle veut partager la Chambre en deux groupes, chaque Lord ayant au plus un ennemi dans son groupe. Est-ce possible ?

Exercice 15. Sur un tableau, on écrit n fois le chiffre 1. Une opération consiste à choisir deux nombres a et b écrits au tableau, à les effacer et à écrire $\frac{a+b}{4}$ à la place. Montrer que le nombre écrit au tableau au bout de $n - 1$ étapes est supérieur ou égal à $\frac{1}{n}$.