# Progresser en géométrie - Solutions

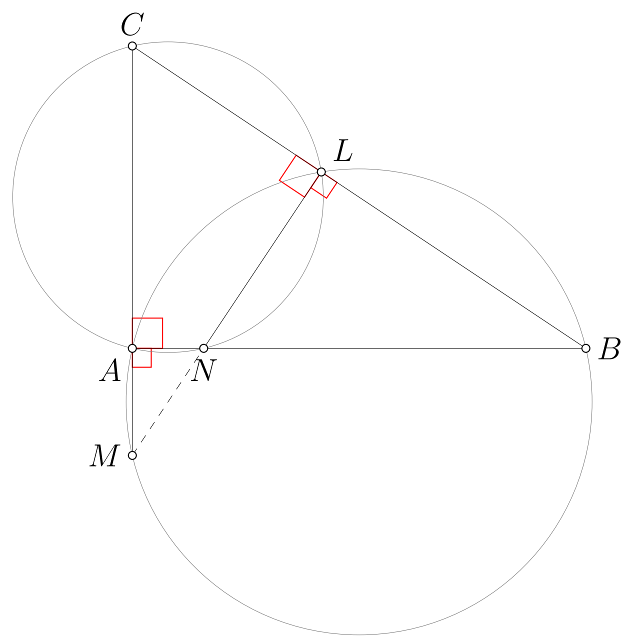
Martin Rakovsky

# 1 Renforcer les bases

## 1.1 Le monde des angles

**Exercice 1.** Soit $ABC$ un triangle rectangle en $A$. Soit $L$ un point sur le segment $[BC]$. Le cercle circonscrit au triangle $ABL$ recoupe la droite $(AC)$ au point $M$ et le cercle circonscrit au triangle $ACL$ recoupe la droite $(AB)$ au point $N$. Montrer que les points $L, M$ et $N$ sont alignés.

*Solution de l'exercice 1*



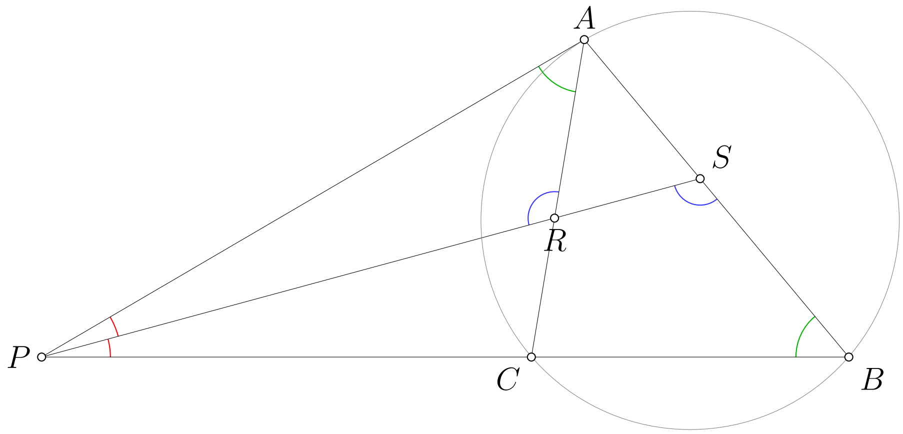

Puisque les points $C, L, N$ et $A$ sont cocycliques, on a $\widehat{CLN} = 90°$. Puisque les points $M, A, L$ et $B$ sont cocycliques, $\widehat{MLB} = \widehat{MAB} = 90°$. On déduit que

$$\widehat{MLB} = 90° = 180° - \widehat{NLC} = \widehat{NLB}$$

donc les points $M, L$ et $N$ sont bien alignés.

**Exercice 2.** Soit $ABC$ un triangle avec $AB < AC$, $\Gamma$ sont cercle circonscrit. La tangente au cercle $\gamma$ en le point $A$ coupe la droite $(BC)$ en le point $P$. La bissectrice de l'angle $\widehat{APB}$ coupe la droite $(AB)$ en le point $R$ et la droite $(AC)$ en le point $S$. Montrer que le triangle $ARS$ est isocèle en $A$.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u>



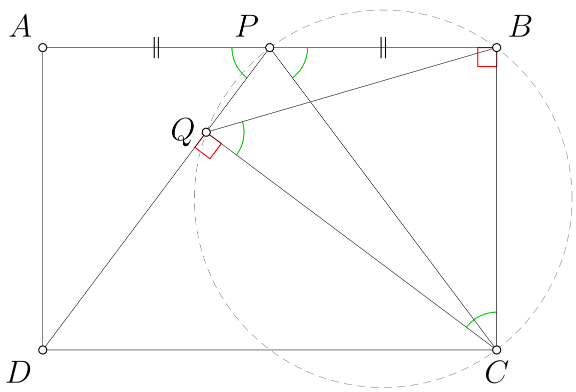

On montre que $\widehat{ARS} = \widehat{ASR}$, ce qui est équivalent à montrer que $180° - \widehat{ARS} = 180° - \widehat{ASR}$, ou encore que $\widehat{PRA} = \widehat{PSC}$.
Or $\widehat{RPA} = \widehat{SPC}$ car la droite $(RS)$ est bissectrice de l'angle $\widehat{APC}$. De plus, par le théorème de l'angle tangentiel, $\widehat{PAR} = \widehat{BCA} = \widehat{PCS}$. On déduit

$$\widehat{PRA} = 180° - \widehat{PAR} - \widehat{RPA} = 180° - \widehat{SBP} - \widehat{BPS} = \widehat{PSC}$$

donc le triangle $ARS$ est bien isocèle en $A$.

**Exercice 3.** Soit $ABCD$ un rectangle, $P$ le milieu de $[AB]$ et $Q$ le point de $[PD]$ tel que les droites $(CQ)$ et $(PD)$ sont perpendiculaires. Montrer que le triangle $BQC$ est isocèle.

*Solution de l'exercice 3*



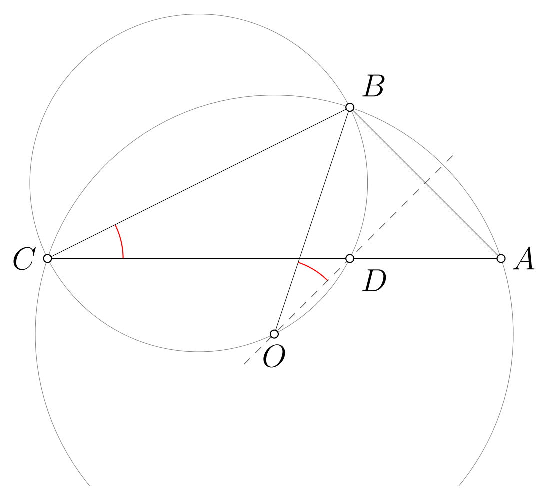

Puisque $\widehat{PQC} = 90° = 180° - 90° = 180° - \widehat{PBC}$, les points $Q, P, B$ et $C$ sont cocycliques. Il vient que $\widehat{CQB} = \widehat{CPB}$.

Les points $B$ et $C$ sont les symétriques respectifs des points $A$ et $D$ par rapport à la médiatrice du segment $[AB]$. On déduit que $\widehat{CPB} = \widehat{DPA}$.

Les points $Q, P, B$ et $C$ sont cocycliques, donc $\widehat{DPA} = 180° - \widehat{QPB} = \widehat{QCB}$. On a donc finalement $\widehat{QCB} = \widehat{BQC}$ et le triangle $BQC$ est isocèle en $B$.

**Exercice 5.** (Tour préliminaire Suisse 2019) Soit $k$ un cercle de centre $O$ et soit $A, B$ et $C$ trois points sur le cercle $k$ tels que $\widehat{ABC} > 90$. La bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$ recoupe le cercle circonscrit au triangle $BOC$ en un point $D$. Montrer que $D$ appartient à la droite $(AC)$.

*Solution de l'exercice 5*




Il suffit de montrer que $\widehat{DCB} = \widehat{ACB}$.

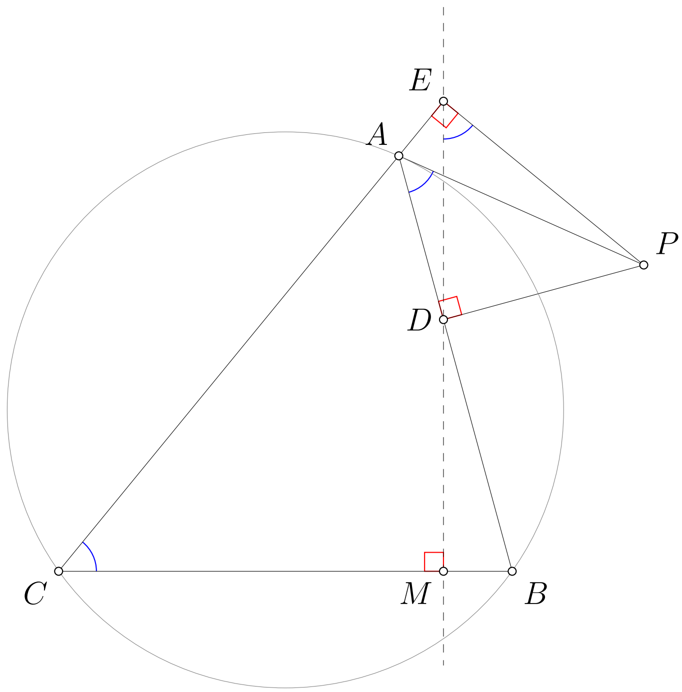
Or, d'après le théorème de l'angle inscrit dans le cercle passant par $B, C, O$ et $D$, on a :

$$\widehat{DCB} = \widehat{DOB} = \frac{1}{2}\widehat{BOA} = \widehat{ACB}$$

où la dernière égalité provient du théorème de l'angle au centre.

**Exercice 6.** (Envoi Géométrie 2020-2021 P4) Soit $ABC$ un triangle et soit $\Omega$ son cercle circonscrit. Soit $P$ un point sur la tangente en $A$ au cercle $\Omega$. On note $E$ et $D$ les projections orthogonales de $P$ sur les côtés $AC$ et $AB$. Montrer que la droite $(ED)$ est perpendiculaire à la droite $(BC)$.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u>




Supposons sans perte de généralité que $AB < AC$.

Tout d'abord, puisque les points $D$ et $E$ sont les projetés orthogonaux du point $P$ sur les droites $(AB)$ et $(AC)$, on a $\widehat{AEP}+\widehat{ADP} = 90° + 90° = 180°$ donc les points $E, A, D$ et $P$ sont cocycliques. On en déduit notamment que $\widehat{DEP} = \widehat{DAP}$.

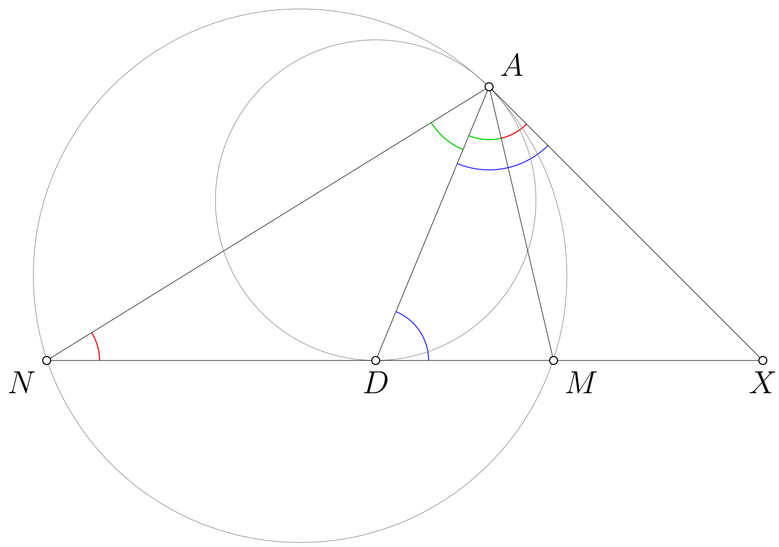
Puisque la droite $(AP)$ est tangente au cercle circonscrit au triangle $ABC$, $\widehat{DAP} = \widehat{BAP} = \widehat{BCA}$. Si on note $M$ le point d'intersection des droites $(BC)$ et $(DE)$, on trouve

$$\begin{aligned}
\widehat{MEC} &= \widehat{DEA} \\
&= 90° - \widehat{DEP} \\
&= 90° - \widehat{DAP} \\
&= 90° - \widehat{BCA} \\
&= 90° - \widehat{MCE}
\end{aligned}$$

donc $\widehat{CME} = 90°$ est les droites $(DE)$ et $(BC)$ sont perpendiculaires.

**Exercice 7.** Soient $\Gamma$ et $\Gamma'$ deux cercles tangents en $A$, $\Gamma'$ étant à l'intérieur de $\Gamma$. Soit $D$ un point du cercle $\Gamma'$ autre que $A$, on note $M$ et $N$ les points d'intersection de la tangente au cercle $\Gamma'$ en $D$ avec le cercle $\Gamma$. Montrer que : $\widehat{NAD} = \widehat{MAD}$.

*Solution de l'exercice 7*




Si la droite $(MN)$ est parallèle à la tangente commune aux cercles $\Gamma$ et $\Gamma'$, alors $A$ et $D$ sont alignés avec les centres de $\Gamma$ et $\Gamma'$ et $M$ et $N$ sont symétriques par rapport à la droite $(AD)$ donc on a bien l'égalité d'angle voulue.

Sinon, on note $X$ le point d'intersection de la tangente commune aux deux cercles avec la droite $(MN)$ et on suppose quitte à échanger $M$ et $N$ que $XM < XN$. Puisque les tangentes à $\Gamma'$ en $D$ et $A$ se coupent en $X$, le triangle $AXD$ est isocèle en $X$, donc $\widehat{XDA} = \widehat{XAD}$. Puisque la somme des angles du triangle $ADN$ vaut $180°$, on a $\widehat{XDA} = 180° - \widehat{ADN} = \widehat{DAN} + \widehat{DNA}$.

Par le théorème de l'angle tangentiel, $\widehat{DNA} = \widehat{MNA} = \widehat{XAM}$, on déduit que

$$\widehat{DAN} = \widehat{XDA} - \widehat{XAM}.$$

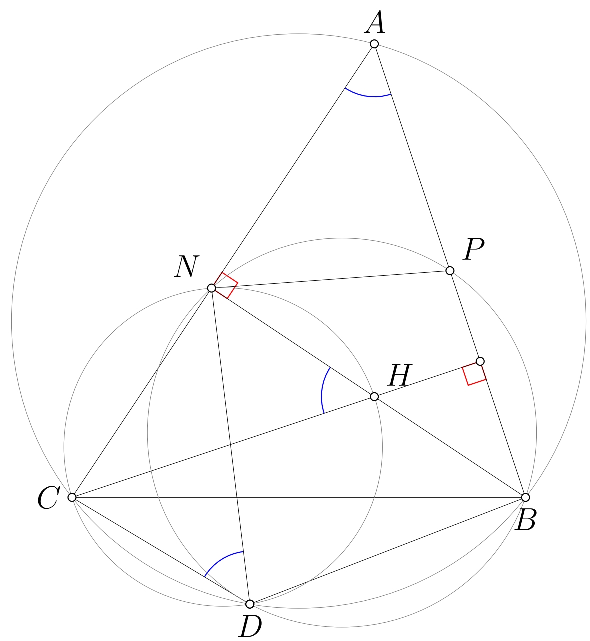
D'autre part, $\widehat{XAD} = \widehat{XAM} + \widehat{MAD}$ donc

$$\widehat{MAD} = \widehat{XAD} - \widehat{XAM}.$$

On retrouve bien, comme $\widehat{XAD} = \widehat{XDA}$, que $\widehat{MAD} = \widehat{NAD}$.

**Exercice 8.** (Envoi Géométrie 2020/2021 P12) Soit $ABC$ un triangle acutangle tel que $|AC| > |BC|$. Soit $H$ l'orthocentre du triangle $ABC$, $N$ le pied de la hauteur issue du sommet $B$ et $P$ le milieu du segment $[AB]$. Les cercles circonscrits aux triangles $ABC$ et $CNH$ se recoupent au point $D$. Montrer que les points $D, N, P$ et $B$ sont cocycliques.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u>




On procède à une chasse aux angles, encore faut-il savoir quels angles on souhaite calculer.

Nous n'avons pas forcément de façon de relier les points $P$ et $D$ (ils sont en fait alignés avec le point $H$, mais nous n'en avons pas besoin pour l'exercice), nous ne pouvons donc calculer un angle qui concerne ces deux points. La seule possibilité est donc de montrer que $\widehat{NDB} = 180° - \widehat{NPB}$.

On peut calculer l'angle $\widehat{NPB}$ à l'aide du théorème de l'angle au centre : en effet, puisque $\widehat{ANB} = 90°$, le milieu $P$ du segment $[AB]$ est le centre du cercle circonscrit au triangle $ANB$ et donc $\widehat{NPB} = 2\widehat{NAB} = 2\widehat{BAC}$.

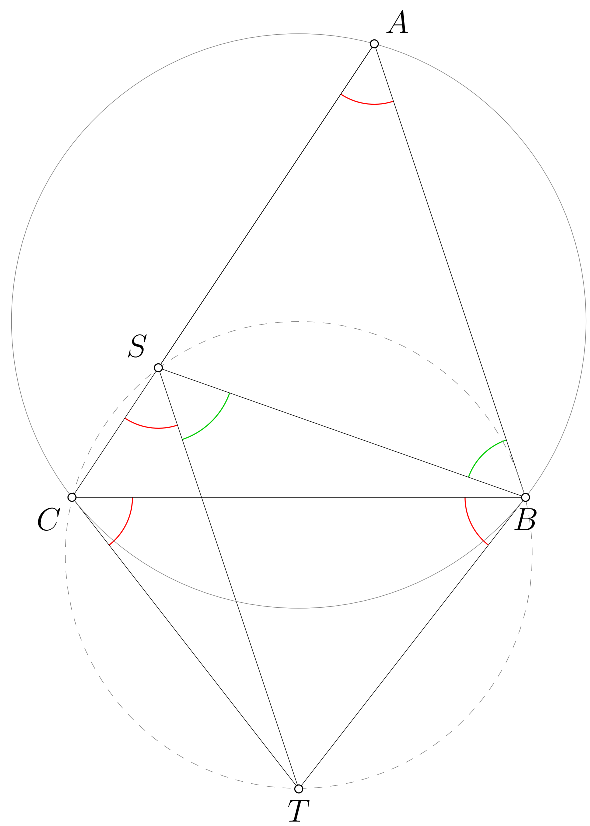
On calcule désormais l'angle $\widehat{NDB}$, qu'on décompose en deux angles plus faciles à calculer :

$$\begin{aligned}
\widehat{NDB} &= \widehat{CDB} - \widehat{CDN} \\
&= 180° - \widehat{CAB} - \widehat{CDN} && \text{car les points } A, B, D \text{ et } C \text{ sont cocycliques} \\
&= 180° - \widehat{CAB} - \widehat{CHN} && \text{car les points } N, H, D \text{ et } C \text{ sont cocycliques} \\
&= 180° - \widehat{CAB} - (90° - \widehat{HCA}) && \text{car les droites } (NH) \text{ et } (AC) \text{ sont perpendiculaires} \\
&= 180° - \widehat{CAB} - (90° - (90° - \widehat{CAB})) && \text{car les droites } (CH) \text{ et } (AB) \text{ sont perpendiculaires} \\
&= 180° - 2\widehat{CAB}
\end{aligned}$$

donc on a bien $\widehat{NDB} = 180° - \widehat{NPB}$.

**Exercice 9.** (TST belge 2021) Soit $ABC$ un triangle. Les tangentes au cercle $(ABC)$ en $B$ et $C$ se coupent en $T$. La parallèle à $(AB)$ passant par $T$ coupe $(AC)$ au point $S$. Montrer que $AS = BS$.

<u>*Solution de l'exercice 9*</u>



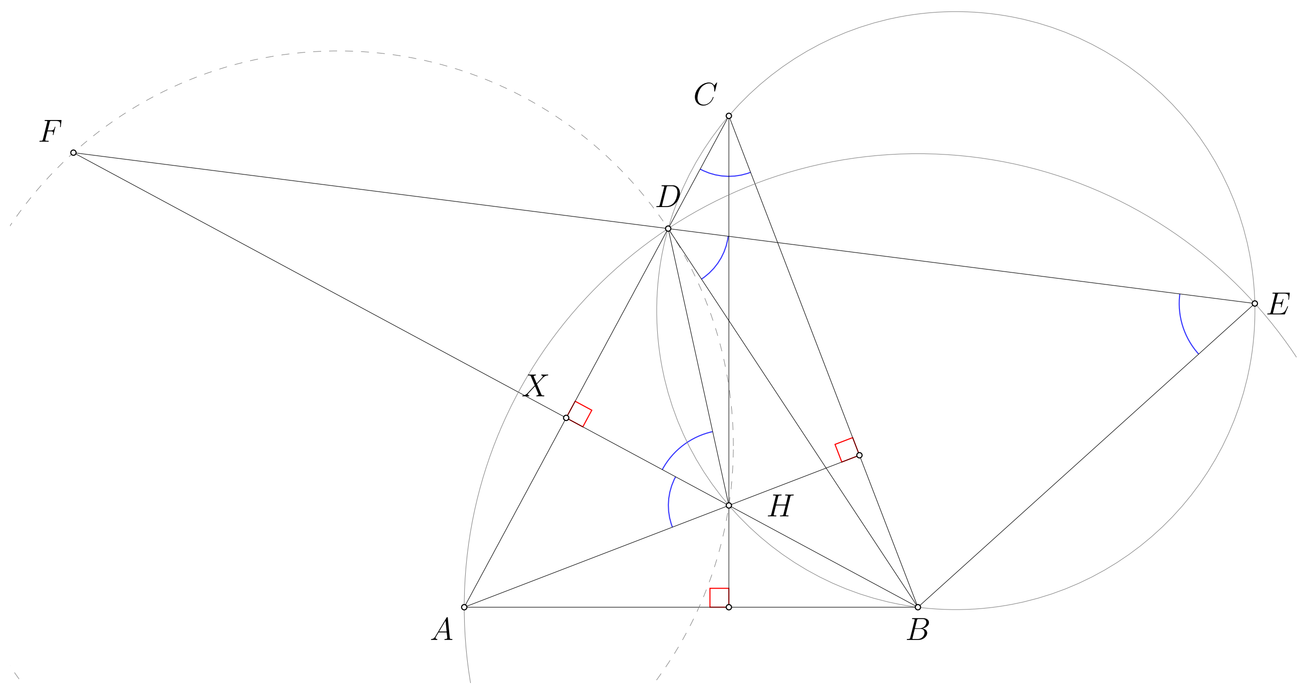

Nous allons montrer que $\widehat{SAB} = \widehat{SBA}$. Or d'une part, $\widehat{SAB} = \widehat{TCB}$ par angle tangentiel, d'autre part $\widehat{ABS} = \widehat{TSB}$ d'après l'hypothèse que les droites $(TS)$ et $(AB)$ sont parallèles. On doit donc montrer que $\widehat{TCB} = \widehat{TSB}$, c'est-à-dire que le point $S$ appartient au cercle circonscrit au triangle $TCB$.

Or, on a $\widehat{TBC} = \widehat{BAC} = \widehat{TSB}$ en utilisant l'angle tangentiel en $B$ et les angles correspondants en $A$ et en $S$. Les points sont donc cocycliques et on peut conclure.

**Exercice 11.** (PAMO 2022 P1) Soit $ABC$ un triangle tel que $\widehat{ABC} \neq 90°$ et tel que $AB < BC, AC$. Soit $H$ l'orthocentre du triangle $ABC$. Soit $\Gamma$ le cercle de centre $B$ et de rayon $AB$. Soit $D$ le second point d'intersection de la droite $(AC)$ avec le cercle $\Gamma$.Soit $E$ le second point d'intersection du cercle $\Gamma$ avec le cercle circonscrit au triangle $BCD$. Soit $F$ le point d'intersection des droites $(DE)$ et $(BH)$.

Montrer que la droite $(BD)$ est tangente au cercle circonscrit au triangle $DFH$.

<u>*Solution de l'exercice 11*</u>




Pour montrer que la droite $(BD)$ est tangente à $\mathcal{C}_{DFH}$ en $D$, on peut montrer que $\widehat{HFD} = \widehat{HDB}$, ou encore que $\widehat{HFD}+\widehat{FDH} = \widehat{HDB}+\widehat{FDH}$. Cette relation se réécrit $180°-\widehat{FHD} = 180°-\widehat{FDB}$. Autrement dit, il suffit de montrer que $\widehat{DHF} = \widehat{BDE}$.

Pour cela, on note $X$ le pied de la hauteur issue de $B$, et on remarque que la droite $(BX)$ est la médiatrice du segment $[AD]$, puisque le triangle $ADB$ est isocèle en $B$. Comme le point $H$ appartient à $(BX)$, le triangle $ADH$ est isocèle en $H$. La droite $(HX)$ est donc la bissectrice de l'angle $\widehat{DHA}$, si bien que $\widehat{DHF} = \widehat{DHX} = \widehat{XHA}$. Or

$$\widehat{XHA} = 90° - \widehat{XAH} = 90° - \widehat{CAH} = \widehat{ACB}$$

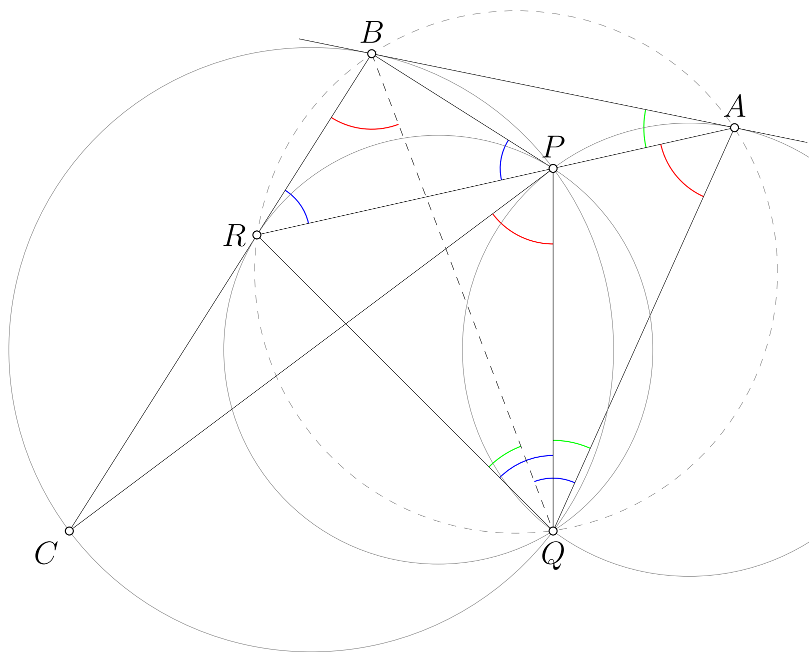
Notons ensuite que le triangle $EDB$ est isocèle en $B$, puisque $D$ et $E$ sont sur le cercle $\Gamma$ qui est de centre $B$. D'après le théorème de l'angle inscrit dans le cercle $\mathcal{C}_{BCDE}$, on a donc

$$\widehat{ACB} = \widehat{DCB} = \widehat{DEB} = \widehat{EDB}$$

On trouve bien $\widehat{DHF} = \widehat{XHA} = \widehat{EDB}$, comme voulu.

**Exercice 12.** (Envoi géométrie 2020-2021 P7) Soit $\omega_1$ et $\omega_2$ deux cercles qui se coupent en deux points qu'on note $P$ et $Q$. Soit $t$ une tangente commune aux cercles $\omega_1$ et $\omega_2$, de telle sorte que la droite $t$ est tangente au cercle $\omega_1$ au point $A$ et au cercle $\omega_2$ au point $B$ et on suppose que le point $P$ est plus proche de la droite $t$ que le point $Q$. On note $C$ le second point d'intersection de la tangente en $P$ au cercle $\omega_1$ avec le cercle $\omega_2$. La droite $(AP)$ et la droite $(BC)$ se coupent au point $R$. Montrer que le cercle circonscrit au triangle $PRQ$ est tangent aux droites $(BP)$ et $(BC)$.

*Solution de l'exercice 12*




Pour montrer que les droites $(BP)$ et $(BC)$ sont tangentes au cercle circonscrit au triangle $PRQ$, il suffit de montrer que $\widehat{BPR} = \widehat{PQR} = \widehat{BRP}$, d'après le théorème de l'angle tangentiel.

Commençons par utiliser les hypothèses que nous avons à notre disposition. La droite $(PC)$ est tangente en $P$ au cercle $\omega_1$ donc $\widehat{PAQ} = \widehat{CPQ}$ d'après le théorème de l'angle tangentiel. Les points $B, P, Q$ et $C$ appartiennent tous au cercle $\omega_2$, si bien que par le théorème de l'angle inscrit, $\widehat{CPQ} = \widehat{CBQ}$. Ainsi

$$\widehat{RAQ} = \widehat{PAQ} = \widehat{CPQ} = \widehat{CBQ} = \widehat{RBQ}$$

et les points $A, Q, R$ et $B$ sont cocycliques.

Nous n'avons pas encore utilisé l'hypothèse que la droite $t$ est tangente aux deux cercles $\omega_1$ et $\omega_2$ en $A$ et $B$.

On a en effet, en utilisant que les points $A, Q, R$ et $B$ sont cocycliques :

$$\widehat{PQA} = \widehat{BAP} = \widehat{BAR} = \widehat{BQR}$$

Ainsi

$$\widehat{PQR} = \widehat{BQR} + \widehat{BPQ} = \widehat{PQA} + \widehat{BPQ} = \widehat{BQA} = \widehat{BRA} = \widehat{BRP}$$

Ceci nous donne la première égalité recherchée.

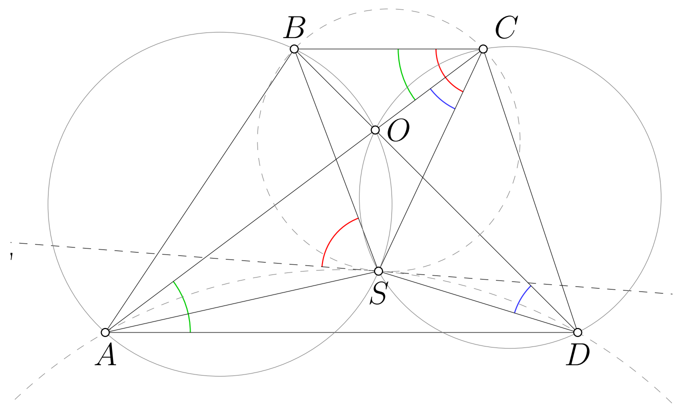
Pour la deuxième égalité, notons que :

$$\begin{array}{rcll}
\widehat{BPR} & = & 180^\circ - \widehat{BPA} & \\
 & = & \widehat{PAB} + \widehat{PBA} & \text{car la somme des angles du triangle } ABP \text{ fait } 180^\circ \\
 & = & \widehat{PQA} + \widehat{PBA} & \text{car la droite } (BA) \text{ est tangente au cercle } \omega_1 \\
 & = & \widehat{PQA} + \widehat{PQB} & \text{car la droite } (BA) \text{ est tangente au cercle } \omega_2 \\
 & = & \widehat{BQA} & \\
 & = & \widehat{PRQ} & \text{comme on l'a établi précédemment}
\end{array}$$

ce qui donne la deuxième égalité et permet de conclure que les droites $(BP)$ et $(BC)$ sont tangentes au cercle circonscrit au triangle $PQR$.

**Exercice 15.** (PAMO 2021 P6) Soit $ABCD$ un trapèze qui n'est pas un parallélogramme et tel que $(AD) \parallel (BC)$. Soit $O$ le point d'intersection des droites $(BD)$ et $(AC)$ et soit $S$ le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles $AOB$ et $COD$. Montrer que les cercles circonscrits aux triangles $ASD$ et $BSC$ sont tangents.

*Solution de l'exercice 15*



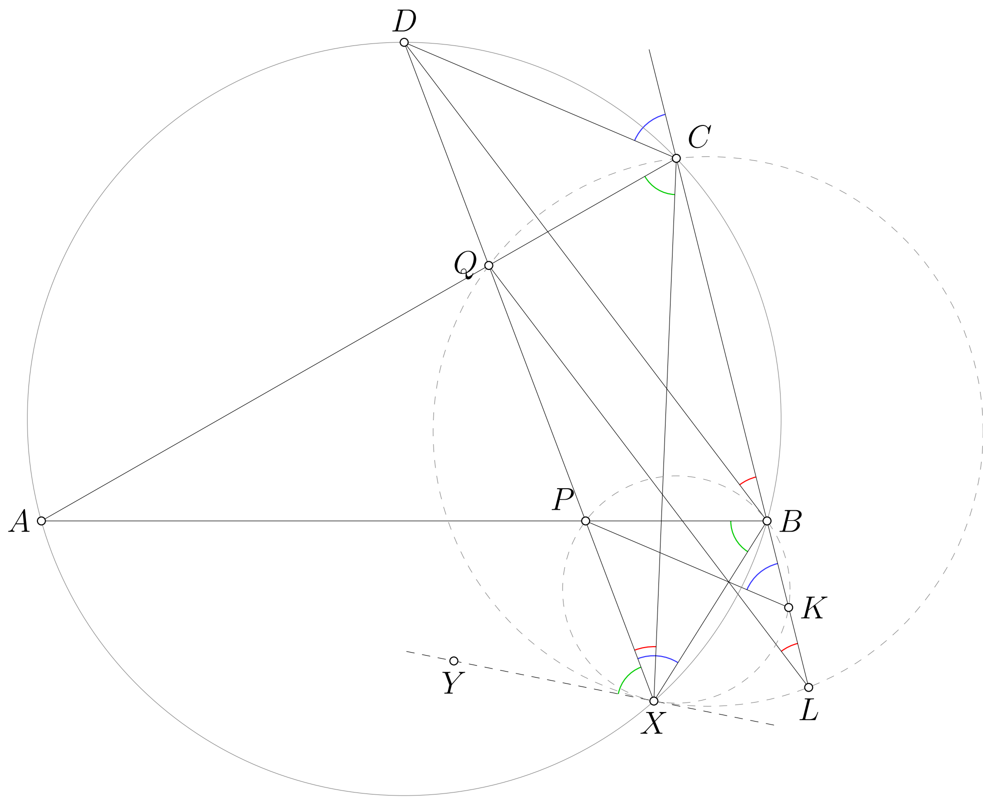

Soit $d$ la tangente à $\mathcal{C}_{BCS}$ en $S$ et $T$ un point de $d$ tel que $C$ et $T$ sont de part et d'autre de la droite $(BS)$. On désire montrer que $d$ est tangente à $\mathcal{C}_{ADS}$ en $S$, c'est-à-dire que $\widehat{AST} = \widehat{SDA}$. Il s'agit alors d'une calcul où l'on chercher à exploiter toutes les hypothèses à notre disposition :

$$\begin{aligned}
\widehat{AST} &= \widehat{ASB} - \widehat{TSB} \\
&= \widehat{AOB} - \widehat{TSB} && \text{car A, B, O et S sont cocycliques} \\
&= \widehat{COD} - \widehat{BCS} && \text{car d est tangente à } \mathcal{C}_{BCS} \text{ en S} \\
&= \widehat{COD} - \widehat{BCA} - \widehat{OCS} \\
&= \widehat{COD} - \widehat{OAD} - \widehat{OCS} && \text{car } (BC) \parallel (AD) \\
&= 180° - \widehat{AOD} - \widehat{OAD} - \widehat{ODS} && \text{car C, D, S et O sont cocycliques} \\
&= \widehat{ODA} - \widehat{ODS} \\
&= \widehat{SDA}
\end{aligned}$$

comme voulu.

**Exercice 17.** (RMM 2018 P1) Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique et soit $P$ un point sur le segment $[AB]$. La diagonale $(AC)$ coupe le segment $[DP]$ au point $Q$. La parallèle à $(CD)$ passant par $P$ coupe la demi-droite $[CB)$ au point $K$. La parallèle à $(BD)$ passant par $Q$ coupe la demi-droite $[CB)$ au point $L$. Montrer que les cercles circonscrits aux triangles $BKP$ et $CLQ$ sont tangents.

<u>*Solution de l'exercice 17*</u>




La première chose à faire pour montrer que deux cercles sont tangents est d'identifier le point de tangence. Lorsque l'on trace la figure, on remarque que ce point de tangence appartient au cercle $\mathcal{C}_{ABCD}$. Si l'on y prête un peu plus attention, on remarque que ce point de tangence semble appartenir à la droite $(DP)$.

On note donc $X$ le second point d'intersection de la droite $(DP)$ avec le cercle passant par $A, B, C$ et $D$, et l'on va montrer successivement que $X$ appartient à $\mathcal{C}_{BKP}$, au cercle $\mathcal{C}_{CLQ}$ et que la tangente à $\mathcal{C}_{BKP}$ en $X$ est tangente à $\mathcal{C}_{CLQ}$ en $X$.

Tout d'abord, puisque $X \in \mathcal{C}_{BCD}$ et puisque $(PK) \parallel (CD)$, d'après le théorème de l'angle inscrit on a :

$$\widehat{PXB} = \widehat{DXB} = 180° - \widehat{DCB} = \widehat{PKB}$$

donc $X \in \mathcal{C}_{BKP}$.

Ensuite, toujours avec le théorème de l'angle inscrit appliqué à $\mathcal{C}_{BCDX}$ et puisque $(QL) \parallel (DB)$ :

$$\widehat{QXC} = \widehat{DXC} = \widehat{DBC} = \widehat{QLC}$$

donc $X \in \mathcal{C}_{CLQ}$.

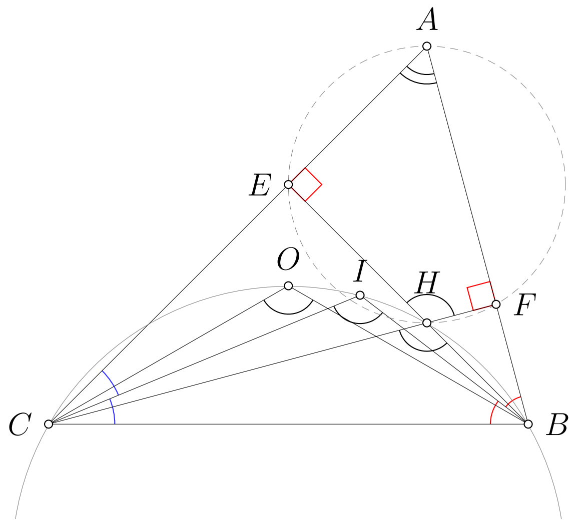
Soit maintenant $d$ la tangente au cercle $\mathcal{C}_{BKP}$ en $X$ et soit $Y$ un point de cette tangente tel que $Y$ et $K$ sont de part et d'autre de $(DX)$.
D'après le théorème de l'angle tangentiel dans $\mathcal{BKP}$ puis le théorème de l'angle inscrit dans le cercle $\mathcal{C}_{ABCX}$ :

$$\widehat{QXY} = \widehat{PXY} = \widehat{PBX} = \widehat{ABX} = \widehat{ACX} = \widehat{QCX}$$

et d'après la réciproque du théorème de l'angle tangentiel, on a bien que $d$ est tangente à $\mathcal{C}_{CLQ}$, ce qui achève de démontrer que $\mathcal{C}_{BKP}$ et $\mathcal{C}_{CLQ}$ sont tangents en $X$.

**Exercice 19.** Soit $ABC$ un triangle aux angles aigus tel que $\widehat{BAC} = 60°$. On note $O$ le centre du cercle circonscrit, $H$ l'orthocentre et $I$ le centre du cercle inscrit du triangle $ABC$. Montrer que $B, I, O, H$ et $C$ sont cocycliques.

*Solution de l'exercice 19*




On va montrer que $\widehat{BOC} = \widehat{BHC} = \widehat{BIC}$.

Tout d'abord, d'après le théorème de l'angle inscrit, $\widehat{BOC} = 2 \cdot \widehat{BAC} = 120°$. On sait donc que nous allons devoir montrer successivement $\widehat{BHC} = 120°$ et $\widehat{BIC} = 120°$.

Pour calculer $\widehat{BHC}$, on introduit $D, E$ et $F$ les pieds des hauteurs respectivement issues des sommets $A, B$ et $C$. Puisque $\widehat{HEA} = 180° - \widehat{HFA} = 90°$, les points $A, E, H$ et $F$ sont cocycliques. Ainsi $\widehat{FHE} = 180° - \widehat{EAF} = 120°$ donc $\widehat{BHC} = \widehat{EHF} = 120°$

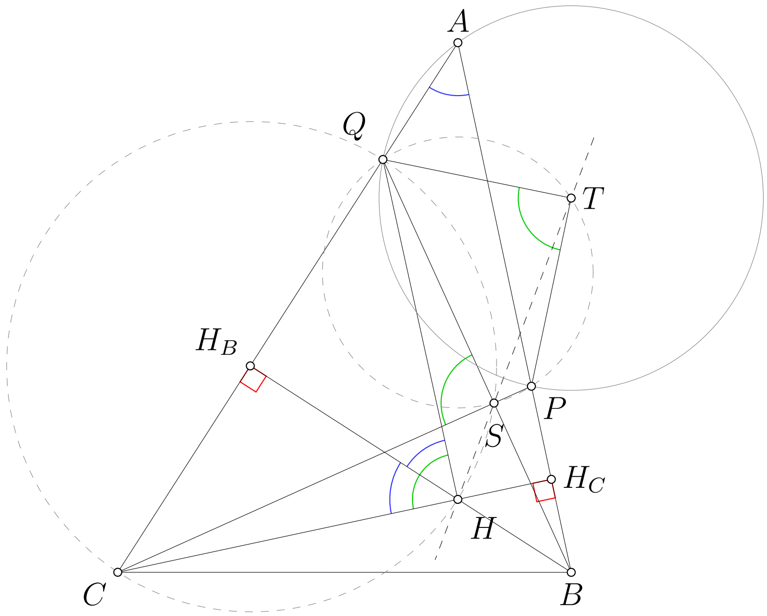
Enfin, pour montrer que $\widehat{BIC} = 120°$, on se sert du fait que le point $I$ est le point d'intersection des bissectrices du triangle. Cette définition nous donne en effet accès aux angles $\widehat{BCI}$ et $\widehat{BCI}$ en fonction des angles du triangle. On a donc :

$$\widehat{BIC} = 180° - \widehat{IBC} - \widehat{ICB} = 180° - \frac{1}{2}\widehat{ABC} - \frac{1}{2}\widehat{ACB} = 180° - \frac{1}{2}(180° - \widehat{BAC}) = 180° - 60° = 120°$$

En conclusion, $\widehat{BOC} = \widehat{BHC} = \widehat{BIC} = 120°$ donc les 5 points $B, O, H, I$ et $C$ sont cocycliques.
On peut traiter de façon similaire le cas où un des angles du triangle $ABC$ est obtus.

**Exercice 25.** (EGMO 2022 P1) Soit $ABC$ un triangle dans lequel $BC < AB$. Soit $P$ un point distinct de $B$ sur le segment $[AB]$ et $Q$ un point distinct de $C$ sur le segment $[AC]$ tels que $BQ = BC = CP$. Soit $T$ le centre du cercle circonscrit au triangle $APQ$, $H$ l'orthocentre du triangle $ABC$ et $S$ le point d'intersection des droites $(BQ)$ et $(CP)$. Montrer que les points $T, H$ et $S$ sont alignés.

<u>*Solution de l'exercice 25*</u>




En l'absence d'idées, on peut chercher à exprimer les différents angles de la figure en fonction des angles du triangle.

On note $H_B$ et $H_C$ les pieds des hauteurs issues de $B$ et $C$ respectivement.

Par exemple, on peut calculer l'angle $\widehat{CSB}$ en fonction de $\alpha, \beta$ et $\gamma$. Pour cela, on remarque que le triangle $PCB$ est isocèle en $P$ et que la médiatrice du segment $[PB]$ est la droite $(HC)$, de sorte que la droite $(HC)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{PCB}$. De même, la droite $(HB)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{QBC}$. On a alors :

$$\widehat{CSB} = 180° - \widehat{QBC} - \widehat{PCB} = 180° - 2\widehat{HCB} - 2\widehat{HBC} = 180° - 2(90° - \beta) - 2(90° - \beta) = 180° - 2\alpha$$

Cela signifie que $\widehat{QSP} = 180° - 2\alpha = 180° - \widehat{QTP}$ d'après le théorème de l'angle au centre dans le cercle $\mathcal{C}_{APQ}$. Les points $T, P, S$ et $Q$ sont donc cocycliques.

D'autre part, puisque $H$ est sur la médiatrice du segment $[QC]$, le triangle $QHC$ est isocèle en $H$ et la droite $(HH_B)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{QHC}$. On a donc

$$\widehat{QHC} = 2\widehat{H_BHC} = 2(90° - \widehat{HCA}) = 2(90° - (90° - \alpha)) = 2\alpha = 180° - \widehat{CSQ}$$

Les points $Q, S, H$ et $C$ sont donc cocycliques.

Il ne nous reste plus qu'à montrer que $\widehat{HST} = \widehat{HSQ} + \widehat{QST} = 180°$.

Tout d'abord, d'après le théorème de l'angle inscrit dans $\mathcal{C}_{QTPS}$ et en calculant dans le triangle $QPT$ isocèle en $T$, on trouve :

$$\widehat{QST} = \widehat{QPT} = \frac{180° - \widehat{PTQ}}{2} = 90° - \alpha$$

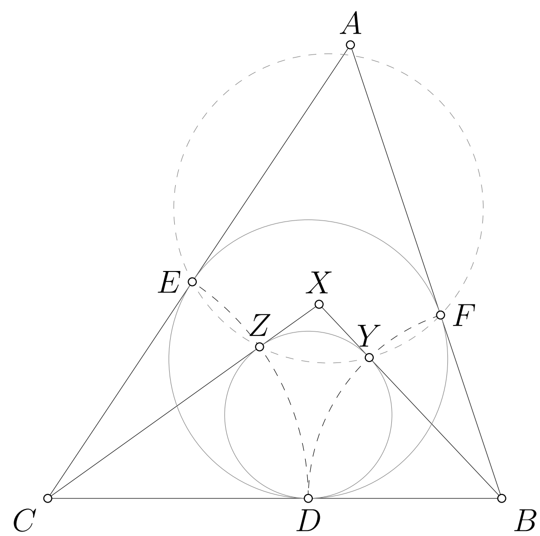
D'autre part, d'après le théorème de l'angle inscrit dans $\mathcal{C}_{QSHC}$ :

$$\widehat{HSQ} = 180° - \widehat{QCH} = 180° - (90° - \alpha) = 90° + \alpha$$

ce qui conclut bien que $\widehat{HSQ} + \widehat{QST} = 180°$.

**Exercice 26.** (IMO SL 1995 G3) Soit $ABC$ un triangle et $D, E$ et $F$ les points de contact du cercle inscrit respectivement aux côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Soit $X$ un point à l'intérieur du triangle $ABC$ tel que le cercle inscrit $\omega$ au triangle $XBC$ soit tangent au segment $[BC]$ au point $D$. Soient $Y$ et $Z$ les points de contact du cercle $\omega$ respectivement avec les côtés $[XB]$ et $[XC]$. Montrer que les points $E, Y, X$ et $F$ sont cocycliques.

*Solution de l'exercice 26*




Il s'agit de montrer que $\widehat{ZEF} + \widehat{ZYF} = 180°$.

Notons que $CD = CE = CZ$ et $BD = BF = BY$.

Or d'une part :

$$\widehat{ZEF} = 180° - \widehat{FEA} - \widehat{CEZ} = 90° + \frac{1}{2}\widehat{BAC} - \widehat{CEZ}$$

et d'autre part :

$$\widehat{ZYF} = 360° - \widehat{DYF} - \widehat{ZYD} = 180° + \frac{1}{2}\widehat{ABC} - \widehat{ZYD}$$

Par angle tangentiel, $\widehat{ZYD} = \widehat{ZDC}$. Dans le quadrilatère $EZDC$ on trouve

$$\widehat{ZDC} + \widehat{CEZ} = 360° - \widehat{DCE} - \widehat{EZD} = 180° - \frac{1}{2}\widehat{BCA}$$

On déduit que

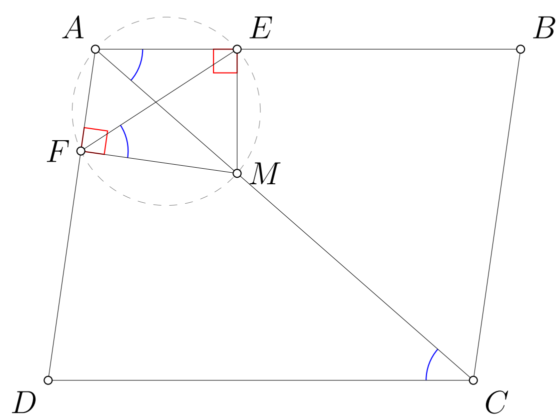
$$\widehat{ZEF}+\widehat{ZYF} = 90°+\frac{1}{2}\widehat{BAC}+180°+\frac{1}{2}\widehat{ABC}-(\widehat{ZDC}+\widehat{CEZ}) = 90°+\frac{1}{2}(\widehat{ABC}+\widehat{BAC}+\widehat{ACB}) = 180°$$

et c'est gagné.

## 1.2 Le monde des longueurs

**Exercice 27.** Soit $ABCD$ un parallèlogramme, $M$ un point du segment $[AC]$. Soit $E$ le projeté orhtogonal de $M$ sur le segment $[AB]$ et $F$ le projeté orhtogonal sur le segment $[AD]$. Montrer que $\frac{ME}{MF} = \frac{AD}{AB}$.

*Solution de l'exercice 27*



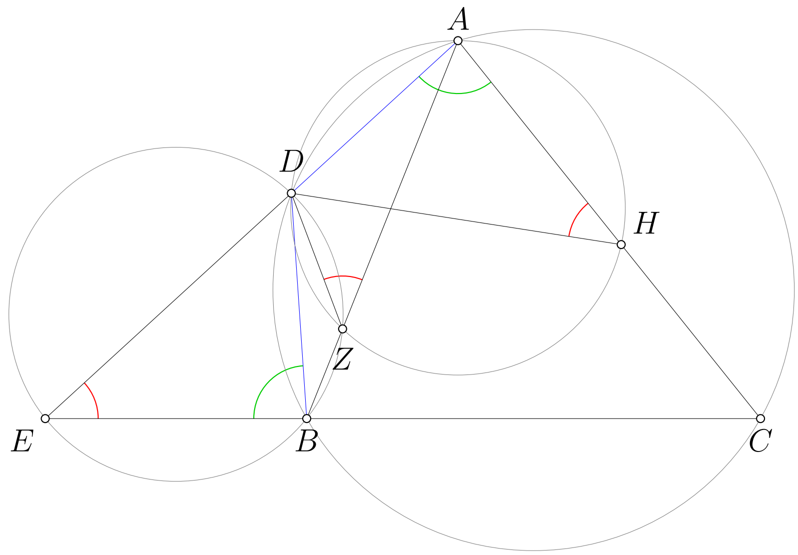

**Rappel :** Les triangles semblables sont un portail entre le monde des angles et le monde des rapports. Si l'on veut obtenir une égalité de rapports par le fait que deux triangles sont semblables, il y a fort à parier que la preuve que les deux triangles sont semblables passera par une chasse aux angles. Cet exercice illustre ce principe.

Puisque $\widehat{AEM} = 90° = 180 - \widehat{AFM}$, les points $A, E, M$ et $F$ sont cocycliques. D'après le théorème de l'angle inscrit, on a donc que $\widehat{MFE} = \widehat{MAE} = \widehat{CAB}$ et $\widehat{MEF} = \widehat{MAF} = \widehat{CAD} = \widehat{ACB}$. Les triangles $MFE$ et $BAC$ sont donc semblables.
Dans le parallélogramme $ABCD$, $CD = AB$ donc on déduit l'égalité de rapport

$$\frac{ME}{MF} = \frac{BC}{AB} = \frac{AD}{AB}$$

**Exercice 28.** (Grèce MO 2019) Soit $ABC$ un triangle avec $AB < AC < BC$. Soit $O$ le centre de son cercle circonscrit et $D$ le milieu de l'arc $AB$ ne contenant pas le point $C$. Soit $E$ le points d'intersection des droites $(AD)$ et $(BC)$. Le cercle circonscrit au triangle $BDE$ recoupe la droite $(AB)$ au point $Z$. Le cercle circonscrit au triangle $ADZ$ recoupe la droite $(AC)$ au point $H$. Montrer que $BE = AH$.

<u>*Solution de l'exercice 28*</u>




En utilisant le théorème de l'angle inscrit dans les cercles circonscrits aux triangles $DBE$ et $ADH$, on a

$$\widehat{BED} = 180° - \widehat{DZB} = \widehat{DZA} = \widehat{DHA}$$

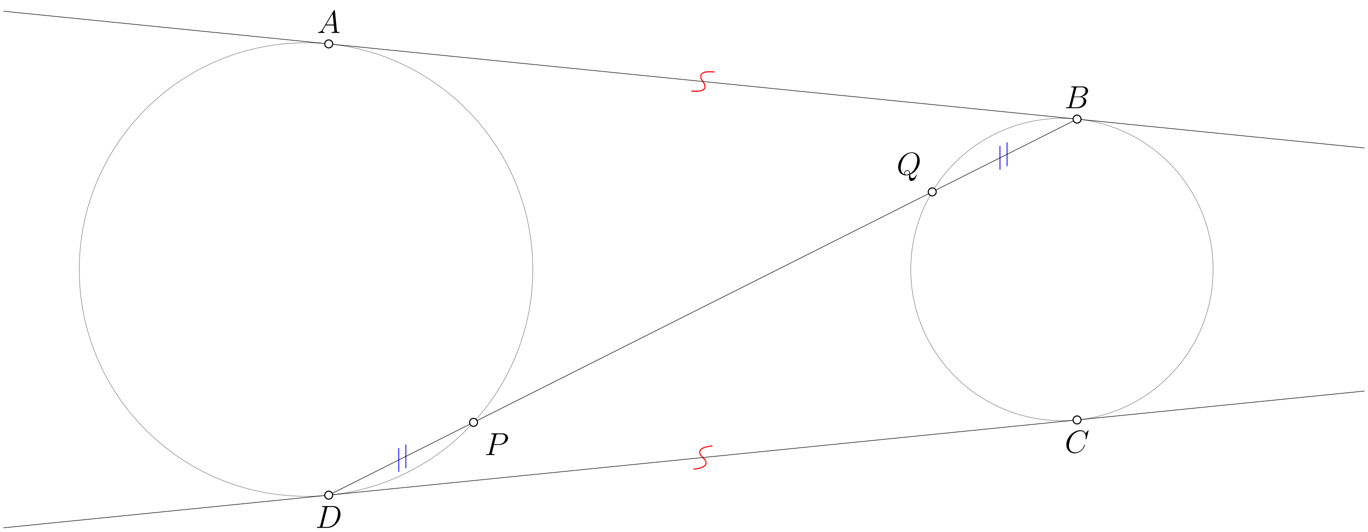
et

$$\widehat{DBE} = 180° - \widehat{DBC} = \widehat{DAH}$$

Ainsi les triangles $DAH$ et $DBE$ sont semblables. Puisque $D$ est le milieu de l'arc $AB$, on a également $DB = DA$, donc les triangles sont isométriques. On a donc bien $BE = AH$.

**Exercice 29.** (Envoi Géométrie 2022-2023 P4) Soient $\omega_1$ et $\omega_2$ deux cercles disjoints. Une tangente commune extérieure à ces deux cercles coupe $\omega_1$ en $A$ et $\omega_2$ en $B$. La deuxième tangente commune extérieure à ces deux cercles coupe $\omega_1$ en $D$ et $\omega_2$ en $C$. La droite $(BD)$ coupe $\omega_1$ en le point $P$ autre que $D$ et $\omega_2$ en le point $Q$ autre que $B$. Montrer que $BQ = DP$.

<u>*Solution de l'exercice 29*</u>




Une symétrie axiale par rapport à la droite joignant les centres des deux cercles échange $A$ et $D$ ainsi que $B$ et $C$. Donc, $AB = DC$. On pense alors à appliquer la puissance d'un point, on a alors :

$$DQ \cdot DB = DC^2 = AB^2 = BP \cdot BD,$$

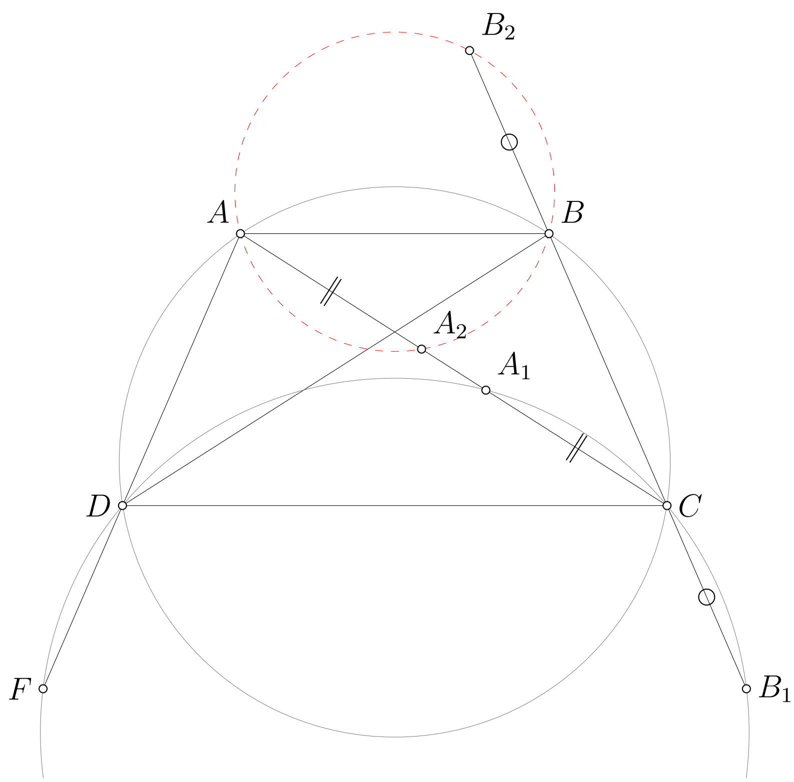
où la première égalité vient de la puissance du point depuis $D$ par rapport à $\omega_2$ et la troisième égalité vient de la puissance du point depuis $B$ par rapport au cercle $\omega_1$. On peut réécrire cette identité de la manière suivante :

$$(BP - DQ)BD = 0.$$

Cela implique que $BP = DQ$ et donc que $DP = BQ$, d'où la conclusion.

**Exercice 32.** (Envoi Géométrie 2021/2022 P13) Soit $ABCD$ un trapèze dans lequel les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont parallèles. On suppose que les points $A, B, C$ et $D$ sont cocycliques et on note $\Omega$ leur cercle circonscrit. Soit $\omega$ un cercle qui passe par les points $C$ et $D$. Soient $A_1$ et $B_1$ les points d'intersection, autres que $C$, du cercle $\omega$ avec les droites $(CA)$ et $(CB)$ respectivement. Soit $A_2$ le symétrique du point $A_1$ par rapport au milieu du segment $[CA]$. Soit $B_2$ le symétrique du point $B_1$ par rapport au milieu du segment $[CB]$. Montrer que les points $A, B, A_2$ et $B_2$ sont cocycliques.

_Solution de l'exercice 32_




Faisons appel à la puissance d'un point. L'exercice est résolu si on montre que

$$CB \cdot CB_2 = CA_2 \cdot CA.$$

Par symétrie, on a

$$CB \cdot CB_2 = BC \cdot BB_1$$

et

$$CA_2 \cdot CA = AC \cdot AA_1.$$

Puis, en notant $F$ le point d'intersection de $(AD)$ et $\omega$

$$AC \cdot AA_1 = AD \cdot AF.$$

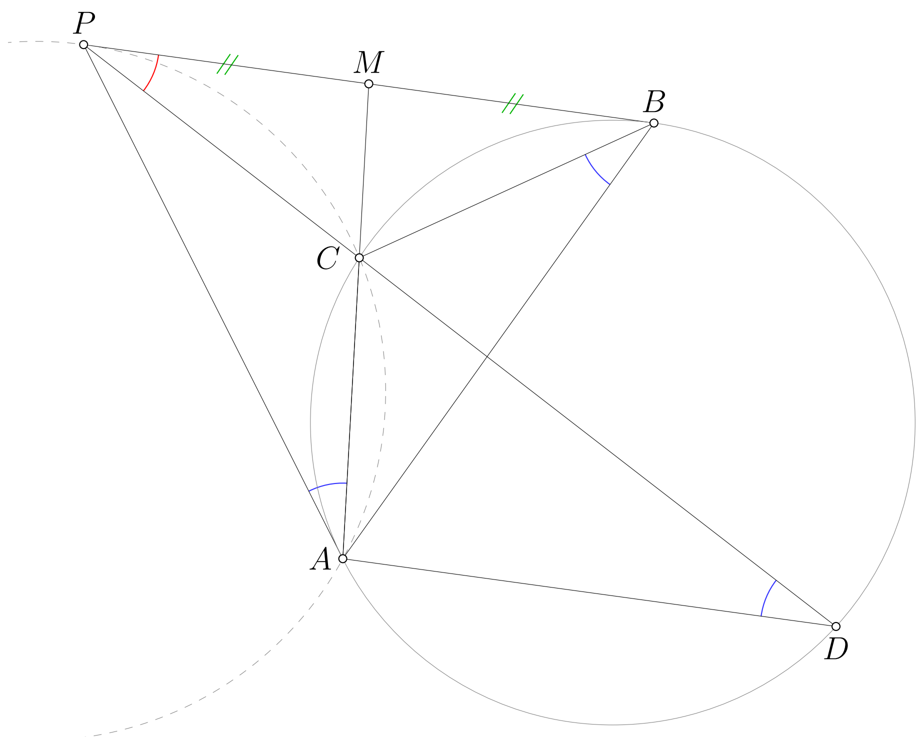
Or, puisque le trapèze $ABCD$ est cyclique, il est isocèle.
Donc, par symétrie axiale de la figure, $AD = BC$ et $AF = BB_1$. Par conséquent,

$$CB \cdot CB_2 = CA_2 \cdot CA,$$

comme désiré.

**Exercice 33.** (JBMO SL 2015 G2) Soit $k$ un cercle et soit $P$ un point à l'extérieur du cercle. Les tangentes au cerlce $k$ passant par le point $P$ touchent le cercle $k$ en les points $A$ et $B$. Soit $M$ le milieu du segment $[BP]$. Soit $C$ le second point d'intersection de la droite $(AM)$ avec le cercle $k$. Soit $D$ le second point d'intersection de la droite $(PC)$ avec le cercle $k$. Montrer que les droites $(AD)$ et $(BP)$ sont parallèles.

<u>*Solution de l'exercice 33*</u>




On commence par effectuer un chasse aux angles, avec pour objectif de montrer que $\widehat{PCA} = \widehat{CPB}$. On a

$$\widehat{PCA} = \widehat{DCA} = \widehat{DBA} = \widehat{DAP}$$

en utilisant successivement le théorème de l'angl inscrit puis le théorème de l'angle tangentiel. Autrement dit, il suffit de montrer que $\widehat{DAp} = \widehat{CPB}$, c'est-à-dire de montrer que la droite $(PB)$ est tangente au cercle circonscrit au triangle $PDA$. Or par puissance d'un point, en utilisant que $PM = MB$ :

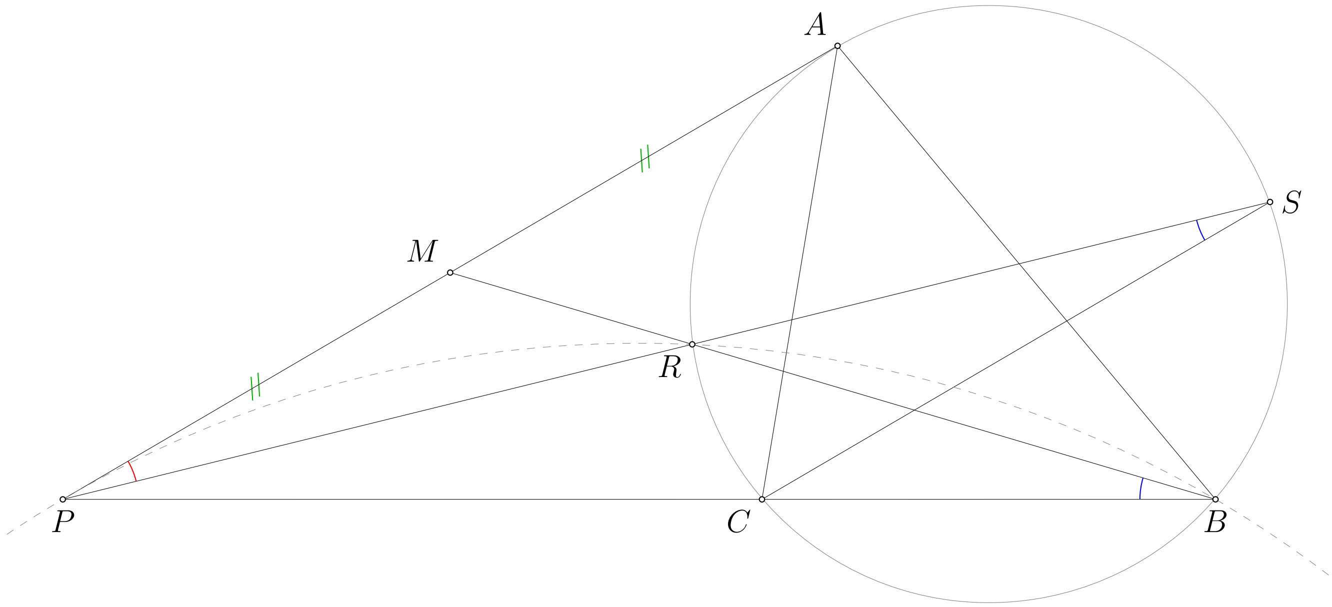
$$MP^2 = MB^2 = MD \cdot MA$$

ce qui est le résultat voulu.
**Remarque :** Les amateurs de géométrie projective pourront voir que l'énoncé vient de l'égalité de birapports suivante :

$$(P, B; M, \infty) = -1 = (A, B; C, D) \underset{(A)}{=} ((AA), (AB); (AC), (AD)) \underset{\text{projection sur } (PB)}{=} (P, B; M, (AC) \cap (PB))$$

**Exercice 34.** (JBMO 2005) Soit $ABC$ un triangle aux angles aigus avec $AC < AB$ et soit $k$ son cercle circonscrit. Soit $P$ la point d'intersection de la tangente au cercle $k$ en $A$ et de la droite $(BC)$. Soit $M$ le milieu du segment $[PA]$ soit $R$ le second point d'intersection de la droite $(MB)$ avec le cercle $k$. La droite $(PR)$ recoupe le cercle $k$ en un point $S$. Montrer que les droites $(CS)$ et $(AP)$ sont parallèles.

<u>*Solution de l'exercice 34*</u>



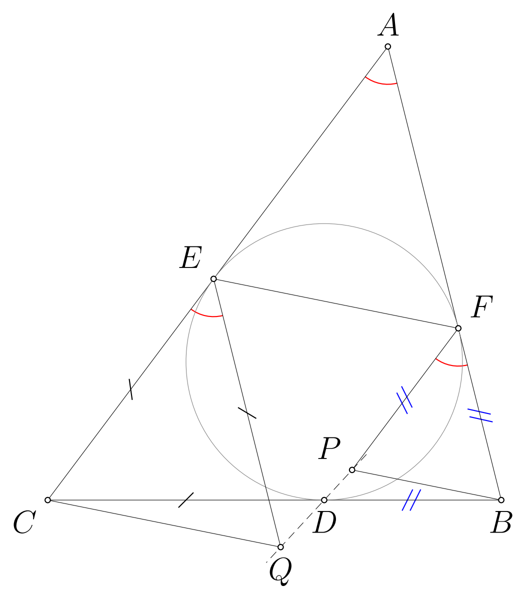

On désire montrer que $\widehat{RSC} = \widehat{RPA}$ pour conclure par angles alternes-internes. Or par angles inscrit, $\widehat{RSC} = \widehat{RSB}$. on veut donc montrer que $\widehat{RPA} = \widehat{RBC} = \widehat{RBP}$, c'est-à-dire que la droite $(AP)$ est tangente au cercle circonscrit au triangle $PRB$. Mais par puissance d'un point, puisque $M$ est le milieu de $[AP]$ et que $(AP)$ est tangente au cercle circonscrit au triangle $ABC$ :

$$MP^2 = AM^2 = MR \cdot MB$$

ce qui donne le résultat voulu.

**Exercice 35.** (Iran MO 2018 Round 3 ) Soit $ABC$ un triangle et soient $D, E$ et $F$ les points de contact du cercle inscrit respectivement avec les côtés $[BC], [CA]$ et $[AB]$. Soit $P$ un point tel que $PF = FB$, les droites $(FP)$ et $(AC)$ sont parallèles et les points $P$ et $C$ sont dans le même demi-plan délimité par la droite $(AB)$. Soit $Q$ un point tel que $QE = EC$, les droites $(EQ)$ et $(AB)$ sont parallèles et les points $Q$ et $B$ sont dans le même demi-plan délimité par la droite $(AC)$. Montrer que les points $P, D$ et $Q$ sont alignés.

<u>*Solution de l'exercice 35*</u>




Le triangle $PFB$ est isocèle en $F$ et $\widehat{PFB} = \widehat{EAF}$ car les droites $(FP)$ et $(AC)$ sont parallèles. Donc les triangles $AEF$ et $PFB$ sont semblables. De même, on trouve que les triangles $QEC, EAF$ et $FPB$ sont semblables. On déduit que $\widehat{PBF} = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{BAC} = \widehat{QCE}$
Passons maintenant à l'exercice. Il n'y a pas d'angles en vue pour relier les points $P, D$ et $Q$, on va donc procéder à l'aide de la réciproque du théorème de Thalès. Pour cela, il nous faut des droites parallèles. Les droites $(BP)$ et $(CQ)$ semblent de bonnes candidates pour cela.
Par chasse aux angles, on a en effet :

$$\widehat{PBC} = \widehat{CBA} - \widehat{PBF} = \widehat{CBA} - 90^\circ + \frac{1}{2}\widehat{BAC} = -\widehat{BCA} + 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{BAC} = \widehat{QCE} - \widehat{BCA} = \widehat{QCB}$$

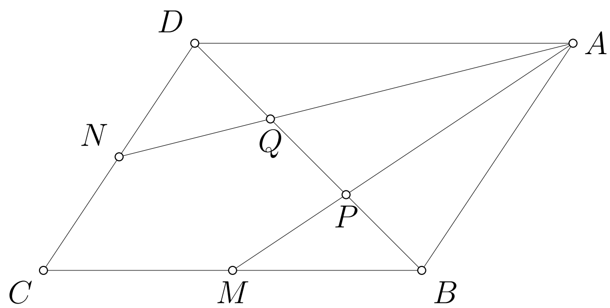
donc les droites $(PB)$ et $(CQ)$ sont parallèles. Pour conclure, il nous faudrait montrer que $\dfrac{PB}{CQ} = \dfrac{BD}{CD}$, puisque cela implique bien, par la réciproque du théorème de Thalès, que les points $P, D$ et $Q$ sont alignés.
Or on a

$$\frac{PB}{CQ} \underset{\Delta PBF \simeq \Delta QCE}{=} \frac{BF}{CE} \underset{BF=BD}{=} \frac{BD}{CE} \underset{CE=CD}{=} \frac{BD}{CD}$$

où, dans les deux dernières égalités, on a utilisé les propriétés des points de contact du cercle inscrit avec les côtés de $ABC$. On a l'égalité de rapport voulue, donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, les points $P, Q$ et $D$ sont bien alignés.

**Exercice 36.** Soit $ABCD$ un parallélogramme. Soit $M$ le milieu du segment $[BC]$ et $N$ le milieu du segment $[CD]$. Les droites $(AN)$ et $(BD)$ se coupent en $Q$ et les droites $(AM)$ et $(BD)$ se coupent en $P$. Montrer que $BP = PQ = QD$.

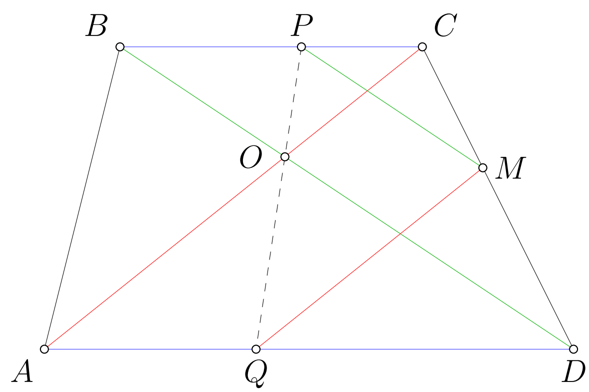
*Solution de l'exercice 36*




D'après le théorème de Thalès dans le "papillon" $DNQAB$, $\dfrac{DQ}{QB} = \dfrac{DN}{AB} = \dfrac{1}{2}$. Donc $QB = 2DQ$ et $DQ = \frac{1}{3}DB$.
D'après le théorème de Thalès dans le "papillon" $BMPAD$, $\dfrac{PB}{PD} = \dfrac{MB}{AD} = \dfrac{1}{2}$ et donc $PB = \frac{1}{3}DB$.
En conséquence, on a aussi $QP = \frac{1}{3}DB$ donc on a les égalités de longueurs voulues.

**Exercice 37.** (Sharygin 2011) Soit $ABCD$ un trapèze dans lequel $(AD)$ et $(BC)$ sont parallèles. Soit $O$ le point d'intersection des diagonales $(AC)$ et $(BD)$. Soit $M$ un point du segment $[CD]$. La parallèle à $(BD)$ passant par $M$ coupe le segment $[BC]$ en $P$. La parallèle à $(AC)$ passant par $M$ coupe le segment $[AD]$ en $Q$. Montrer que les points $P, O$ et $Q$ sont alignés.

*Solution de l'exercice 37*




Il suffit de montrer que $\frac{AQ}{AO} = \frac{CP}{CO}$.
On a trois paires de droites parallèles, dont on écrit les égalités de rapports de Thalès :

$$\frac{CM}{CP} = \frac{CD}{CB}$$

$$\frac{AQ}{CM} = \frac{AD}{CD}$$

$$\frac{BC}{AD} = \frac{CO}{AO}$$

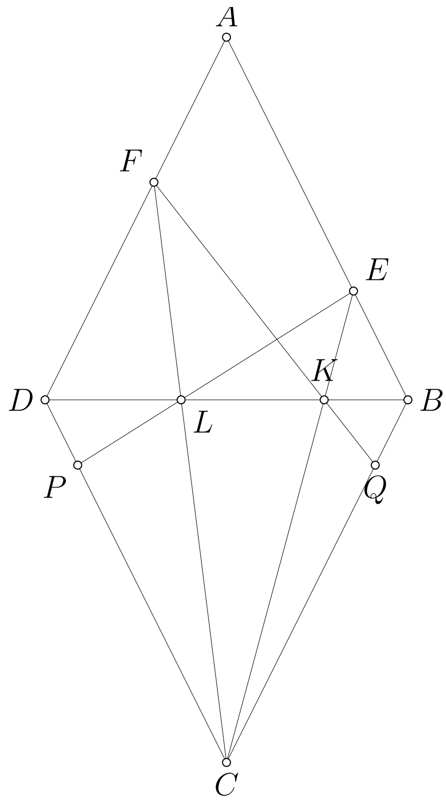
En combinant ces trois égalités, on obtient :

$$\frac{AQ}{CP} = \frac{AQ}{CM} \cdot \frac{CM}{CP} = \frac{AD}{CD} \cdot \frac{CD}{BC} = \frac{AD}{BC} = \frac{AO}{CO}$$

ce qui est l'égalité voulue.

**Exercice 38.** Soit $ABCD$ un losange. Soit $F$ un point du segment $[AD]$ et $E$ un point du segment $[AB]$. Les droites $(FC)$ et $(BD)$ se coupent en $L$, les droites $(EC)$ et $(BD)$ se coupent en $K$. Les droites $(FK)$ et $(BC)$ se coupent en $Q$ et les droites $(EL)$ et $(DC)$ se coupent en $P$. Montrer que $CP = CQ$.

_Solution de l'exercice 38_



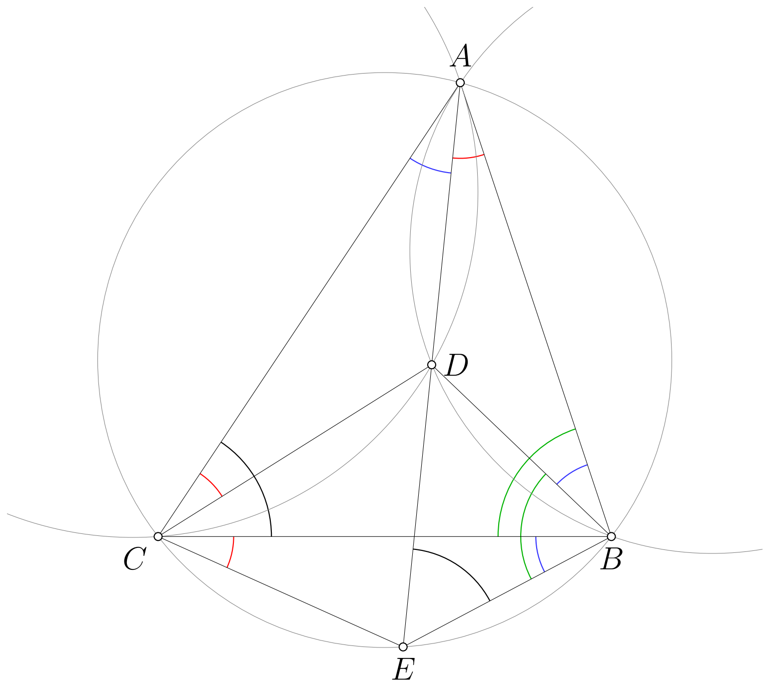

On dispose de plusieurs configurations "papillons", on va donc les examiner chacun et tirer les informations utiles.
D'après le théorème de Thalès dans le papillon $QBKDF$, $\dfrac{QB}{DF} = \dfrac{BK}{DK}$.
D'après le théorème de Thalès dans le papillon $EBKDC$, $\dfrac{EB}{DC} = \dfrac{BK}{DK}$ et ainsi, en combinant les deux égalités $\dfrac{QB}{DF} = \dfrac{EB}{DC}$.
D'après le théorème de Thalès dans le papillon $DPLEB$, $\dfrac{DP}{EB} = \dfrac{DL}{LB}$.
D'après le théorème de thalès dans le papillon $DFLCB$, $\dfrac{DF}{CB} = \dfrac{DL}{LB}$. Ainsi, en combinant les deux égalités, $\dfrac{DP}{EB} = \dfrac{DF}{CB}$.
On voit que les calculs concernent plutôt les longueurs $DP$ et $QB$, et que l'énoncé est équivalent à montrer que $DP = QB$.
On utilise alors les égalités de rapport que l'on a établies :

$$DP = \frac{DF \cdot EB}{BC} = \frac{DF \cdot EB}{CD} = QB$$

On a donc bien $CP = CQ$.

**Exercice 39.** (British MO 2012/2013 Round 1) Soit $ABC$ un triangle. Soit $\mathcal{C}_B$ le cercle passant par $B$ et tangent au segment $[AC]$ en $A$ et soit $\mathcal{C}_C$ le cercle passant par $C$ et tangent au segment $[AB]$ en $A$. Les cercles $\mathcal{C}_B$ et $\mathcal{C}_C$ se recoupent au point $D$. La droite $(AD)$ recoupe le cercle circonscrit au triangle $ABC$ au point $E$. Montrer que $D$ est le milieu du segment $[AE]$.

<u>*Solution de l'exercice 39*</u>




On traduit les hypothèses sous formes d'égalités d'angles. Ainsi, on observe que, par angle tangentiel pour $\mathcal{C}_B$ puis par angle inscrit dans le cercle $(ABC)$ :

$$\widehat{DBA} = \widehat{CAD} = \widehat{CAE} = \widehat{CBE}$$

De même on obtient que $\widehat{BCE} = \widehat{DCA}$. Ainsi on a

$$\Delta DBA \simeq \Delta DAC \simeq EBC$$

D'autre part, puisque $\widehat{DBA} = \widehat{CBE}$, on a

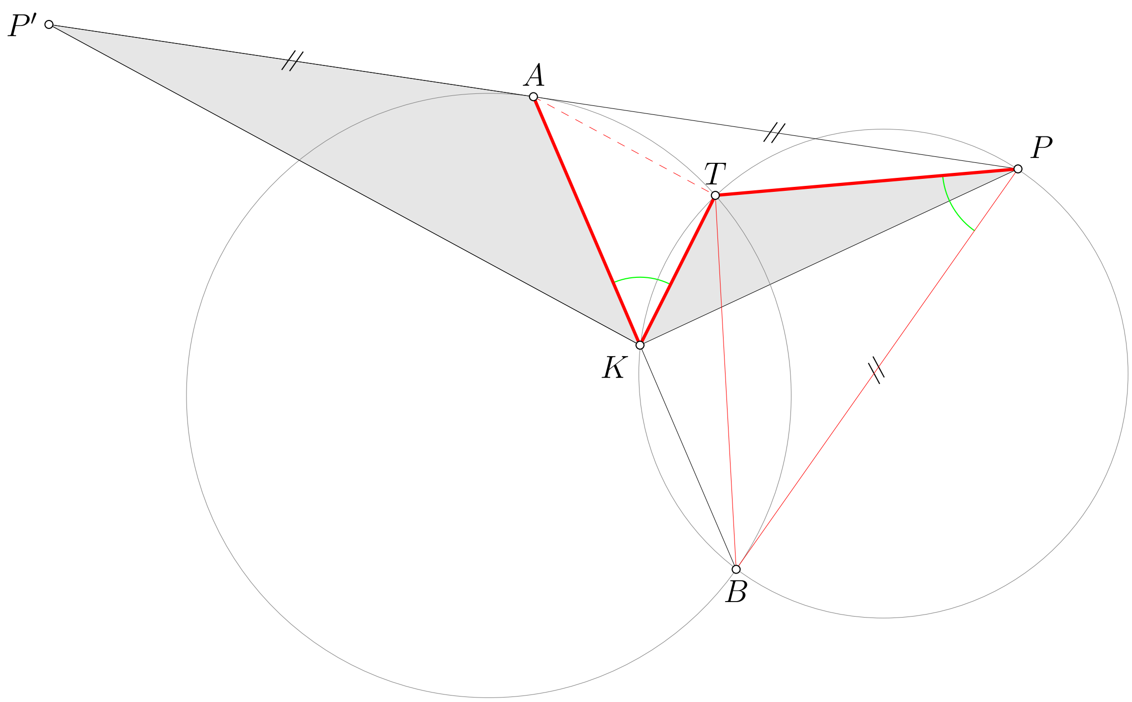
$$\widehat{DBE} = \widehat{DBC} + \widehat{CBE} = \widehat{DBC} + \widehat{DBA} = \widehat{CBA}$$

et par angle inscrit $\widehat{DEB} = \widehat{AEB} = \widehat{BCA}$. Ainsi on a $\Delta DBE \simeq \Delta ABC$. On a alors toutes les égalités de rapports qu'il faut pour conclure :

$$DA \underset{\Delta DBA \simeq \Delta DAC}{=} DB \cdot \frac{AB}{AC} \underset{\Delta DBE \simeq \Delta ABC}{=} DE \cdot \frac{AC}{AB} \cdot \frac{AB}{AC} = DE$$

**Exercice 40.** (PAMO 2021 P2) Soit $\Gamma$ un cercle et $P$ un point à l'extérieur de $\Gamma$. Les tangentes à $\Gamma$ issues de $P$ touchent $\Gamma$ en $A$ et $B$. Soit $K$ un point distinct de $A$ et $B$ sur le segment $[AB]$. Le cercle circonscrit au triangle $PBK$ recoupe le cercle $\Gamma$ au point $T$. Soit $P'$ le symétrique du point $P$ par rapport au point $K$. Montrer que $\widehat{PBT} = \widehat{P'KA}$.

*Solution de l'exercice 40*




Commençons par remarquer que si l'énoncé est vrai, alors $\widehat{BAT} = \widehat{PBT} = \widehat{P'KA}$. Ainsi, il est équivalent de montrer que les droites $(P'K)$ et $(AT)$ sont parallèles. Mais si c'est le cas, alors $\widehat{KP'T} = \widehat{TAP} = \widehat{ABT} = \widehat{KPT}$. Comme on aurait $\widehat{PKT} = \widehat{PBT} = \widehat{KP'A}$, les triangles $PKT$ et $P'KA$ seraient semblables. Réciproquement, il suffit de montrer que les triangles $PKT$ et $P'KA$ sont semblables pour avoir le résultat voulu.

Pour montrer que $\Delta P'KA \simeq \Delta PKT$, on peut essayer de montrer que leurs angles sont deux à deux égaux. Mais on a vu que montrer $\widehat{PKT} = \widehat{P'KA}$ et $\widehat{TPK} = \widehat{KP'A}$ était équivalent à l'énoncé. Il est donc plus raisonnable d'essayer de montrer une égaltié d'angle et une égalité de rapports. Or on a par angle inscrit :

$$\widehat{KTP} = 180^\circ - \widehat{KBP} = 180^\circ - \widehat{ABP} = 180^\circ - \widehat{BAP} = \widehat{PAK'}$$

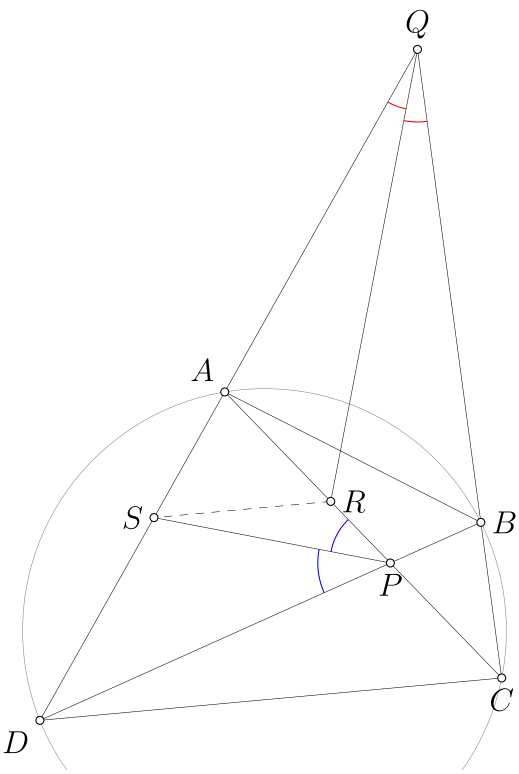
Donc il suffit de montrer que $\dfrac{KT}{KA} = \dfrac{TP}{AP'}$. Comme $AP' = AP = BP$, il suffit de montrer que $\dfrac{KT}{KA} = \dfrac{TP}{BP}$. Il suffit donc de montrer que les triangles $AKT$ et $BPT$ sont semblables. On veut obtenir une égalité de rapport d'une similitude, donc on va montrer cette similitude par chasse aux angles.

D'une part, par angle inscrit, $\widehat{AKT} = 180^\circ - \widehat{BKT} = \widehat{TPB}$ et d'autre part par angle tangentiel, $\widehat{TAK} = \widehat{TAB} = \widehat{TBP}$.

Donc les triangles $AKT$ et $BPT$ sont semblables comme voulu.

**Exercice 41.** (S) (British MO 2016/2017 round 2) Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique dans lequel $AB < CD$, $P$ le point d'intersection des diagonales $(AC)$ et $(BD)$ et $Q$ le point d'intersection des droites $(AD)$ et $(BC)$. La bissectrice de l'angle $\widehat{AQB}$ coupe $[AC]$ en $R$ et la bissectrice de l'angle $\widehat{APD}$ coupe $(AD)$ en $S$. Montrer que les droites $(RS)$ et $(CD)$ sont parallèles.

<u>*Solution de l'exercice 41*</u>




On procède par chasse aux rapports. On désire montrer une égalité de rapports pour appliquer le théorème de Thalès, encore faut-il choisir l'égalité à montrer. Pour cela, regardons les hypothèses à disposition. Le théorème de la bissectrice nous indique que

$$\frac{AS}{DS} = \frac{AP}{DP} \text{ et } \frac{AR}{CR} = \frac{AQ}{CQ}$$

On va donc chercher à montrer que $\frac{AS}{DS} = \frac{AR}{CR}$, puisque ces rapports sont déjà présents dans nos hypothèses. On vérifie que cela correspond bien au théorème de Thalès.

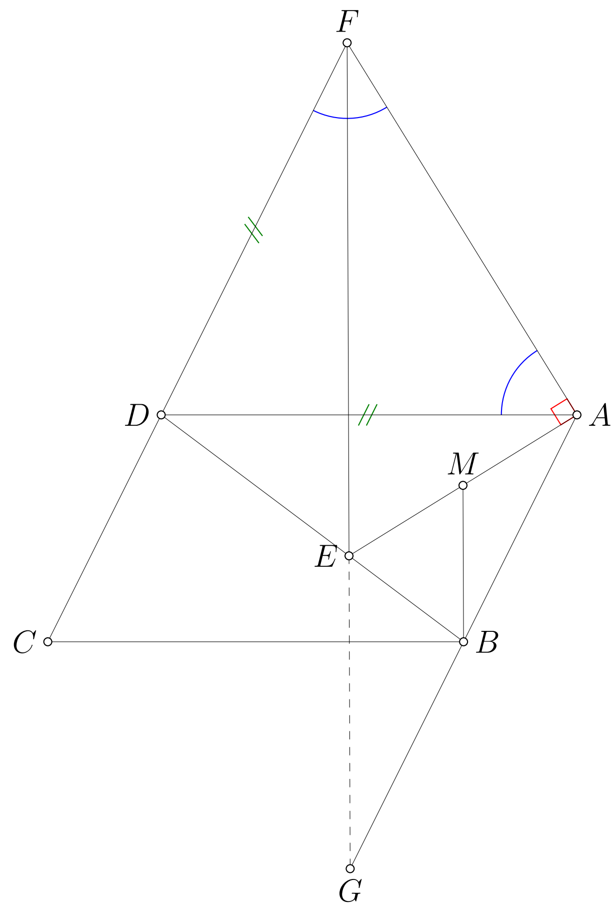
Pour récupérer les rapports $\dfrac{AP}{DP}$ et $\dfrac{AQ}{CQ}$, on utilise que les triangles $QAB$ et $QCD$ sont semblables, ainsi que les triangles $PCD$ et $PBA$. En effet, on vérifie que $\widehat{AQB} = \widehat{DQC}$ et que $\widehat{ABQ} = 180° - \widehat{ABC} = \widehat{ADC} = \widehat{QDC}$, donc les triangles $AQB$ et $CQD$ sont semblables. De même, on vérifie que $\widehat{ABP} = \widehat{PCD}$ et que $\widehat{APB} = \widehat{CPD}$, de sorte que les triangles $APB$ et $DPC$ sont semblables. On a alors

$$\frac{AS}{DS} = \frac{AP}{DP} \underset{\Delta APB \simeq \Delta DPC}{=} \frac{AB}{DC} \underset{\Delta AQB \simeq \Delta CQD}{=} \frac{AQ}{CQ} = \frac{AR}{CR}$$

comme voulu.

**Exercice 42.** (S) (France TST 2021/2022) Soit $ABCD$ un parallélogramme. La bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{BAC}$ coupe le segment $[BC]$ en $E$ tandis que sa bissectrice extérieure coupe la droite $(CD)$ en $F$. Soit $M$ le milieu du segment $[AE]$. Montrer que les droites $(EF)$ et $(BM)$ sont parallèles.

<u>*Solution de l'exercice 42*</u>




Plusieurs solutions sont possibles, on en propose une qui utilise le théorème de la bissectrice. On renvoie au site de la POFM pour voir d'autres solutions.

Soit $G$ le point d'intersection des droites $(AB)$ et $(EF)$. Il suffit de montrer que $GB = BA$. On aura alors que $(MB)$ est une droite des milieux pour le triangle $AEG$ et donc que les droites $(EF)$ et $(BM)$ sont parallèles.

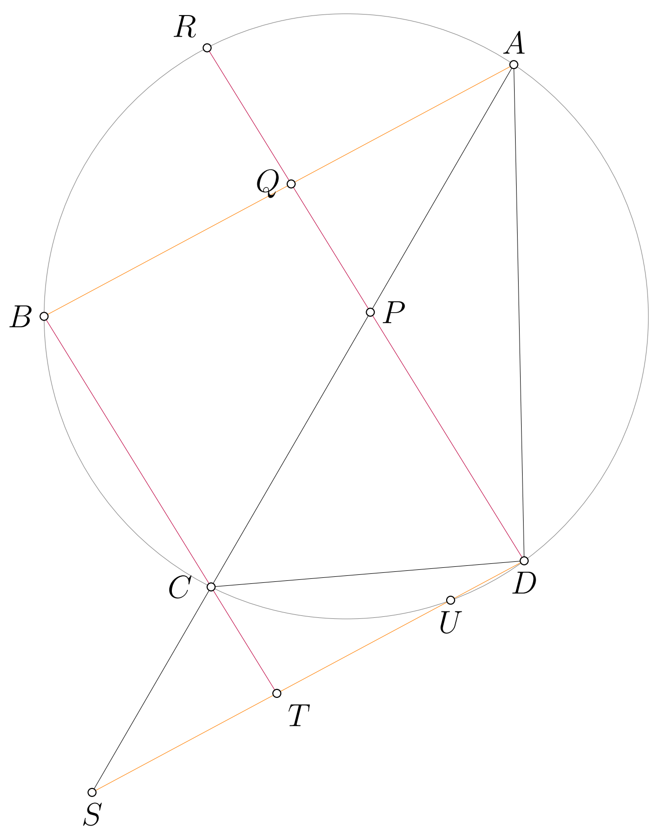
Puisque les droites $(AB)$ et $(FD)$ sont parallèles, d'après le théorème de Thalès on a $\dfrac{EB}{ED} = \frac{BG}{DF}$.
D'autre part, d'après le théorème de la bissectrice, on a $\dfrac{EB}{ED} = \dfrac{AB}{AD}$. On a donc $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{BG}{DF}$.
Si l'on veut que $AB = BG$, il suffit de montrer que $DF = AD$. Or, par angle correspondant, $\widehat{DFA} = 180° - \widehat{FAB}$. On utilise alors que $(AF)$ est la bissectrice extérieure de $\widehat{DAB}$ pour voir que

$$180° - \widehat{FAB} = 180° - \left(90° + \frac{1}{2}\widehat{DAB}\right) = 90° - \frac{1}{2}\widehat{DAB} = \widehat{DAF}$$

comme voulu.

**Exercice 43.** Soit $ABCD$ un quadrilatère inscrit dans un cercle $\Gamma$. La parallèle à $(BC)$ passant par $D$ coupe $(AC)$ en $P$, $(AB)$ en $Q$ et recoupe $\Gamma$ en $R$. La parallèle à $(AB)$ passant par $D$ coupe $(AC)$ en $S$, $(BC)$ en $T$ et recoupe $\Gamma$ en $U$. Montrer que $\frac{ST}{TU} = \frac{QR}{PQ}$.

<u>*Solution de l'exercice 43*</u>




On traduit les différentes hypothèses sous formes d'égalités de longueurs, à l'aide du théorème de Thalès et de la puissance d'un point par rapport à un cercle.

Tout d'abord, le quadrilatère $QBTD$ possède des côtés parallèles deux à deux, il s'agit donc d'un parallélogramme, et l'on obtient que $BQ = DT$ et $QD = BT$.

Puisque les droites $(BA)$ et $(SD)$ sont parallèles, on a $\Delta STC \simeq \Delta ABC$. Puisque les droites $(DR)$ et $(BT)$ sont parallèles, on a $\Delta AQP \simeq \Delta ABC$, si bien que $\Delta AQP \simeq \Delta STC$.

Occupons nous des points $R$ et $U$. La puissance d'un point par rapport à un cercle nous permet d'écrire

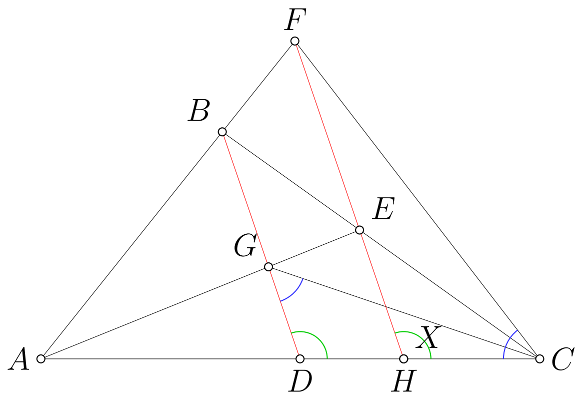
$$QD \cdot QR = QB \cdot QA \quad \text{et} \quad TD \cdot TU = TB \cdot TC$$

On a désormais tout ce qu'il nous faut pour faire le calcul, et l'on cherche à faire apparaître les rapports de longueurs que l'on a obtenus :

$$\frac{RQ}{PQ} = \frac{RQ}{AQ} \cdot \frac{AQ}{PQ} = \frac{BQ}{DQ} \cdot \frac{ST}{TC} = \frac{TD}{BT} \cdot \frac{ST}{TC} = \frac{TC}{TU} \cdot \frac{ST}{TC} = \frac{ST}{TU}$$

**Exercice 44.** Soit $ABC$ un triangle, soit $D$ un point du segment $[AC]$ tel que $BD = DC$. Une droite parallèle à la droite $(BD)$ coupe le segment $[BC]$ en le point $E$ et coupe la droite $(AB)$ en le point $F$. Soit $G$ le point d'intersection des droites $(AE)$ et $(BD)$. Montrer que les angles $\widehat{BCG}$ et $\widehat{BCF}$ ont même amplitude.

*Solution de l'exercice 44*




On commence naturellement par une chasse aux angles. Notons que puisque $BD = DC$, on a $\widehat{DBC} = \widehat{DCB}$. Ainsi, d'une part

$$\widehat{BCF} = \widehat{FCA} - \widehat{BCD} = \widehat{FCA} - \widehat{DBC}$$

D'autre part, en essayer de faire intervenir les mêmes angles :

$$\widehat{BCG} = 180° - \widehat{BGC} - \widehat{GBC} = \widehat{DGC} - \widehat{DBC}$$

Ainsi, pour montrer que $\widehat{BCG} = \widehat{BCF}$, il suffit de montrer que $\widehat{BGC} = \widehat{FCA}$.
Une chasse aux angles du même goût indique que d'une part (en utilisant que $(FE)$ et $(BG)$ sont parallèles :

$$\widehat{BCF} = 180° - \widehat{FEC} - \widehat{EFC} = \widehat{BEF} - \widehat{EFC} = \widehat{DBC} - \widehat{EFC}$$

et d'autre part

$$\widehat{BCG} = \widehat{BCD} - \widehat{GCD} = \widehat{DBC} - \widehat{GCD}$$

et l'énoncé est encore équivalent au fait de montrer que $\widehat{GCD} = \widehat{EFC}$.
A ce stade, on introduit donc le point $H$, point d'intersection des droites $(FE)$ et $(AC)$. Nos calculs montrent qu'il suffit de montrer que les triangles $GDC$ et $CHF$ sont semblables. On a déjà que $\widehat{GDC} = \widehat{CHF}$ par parallélisme, et on a vu qu'il est sans espoir de montrer que une autre égalité d'angle sans résoudre d'abord l'exercice. On va donc montrer que les triangles sont semblables par chasse aux rapports. On désire montrer que $\dfrac{FH}{CH} = \dfrac{CD}{GD}$.

Cela est commode puisque l'on dispose de nombreuses égalités de rapports grâce à la paire de droites parallèles $((BD), (FH))$. Notamment, les triangles $EHC$ et $BDC$ sont semblables donc $EH = HC$. On a alors

$$\frac{FH \cdot GD}{CH \cdot CD} = \frac{FH \cdot GD}{EH \cdot BD} = \frac{FH}{BD} \cdot \frac{GD}{EH} \underset{(GD)||(EH)}{=} \frac{AD}{AH} \cdot \frac{GD}{EH} \underset{(BD)||(FH)}{=} \frac{AD}{AH} \cdot \frac{AH}{AD} = 1$$

ce qui est l'égalité de rapports voulue. Les triangles $FHC$ et $CDG$ sont donc semblables, ce qui permet de conclure l'exercice.

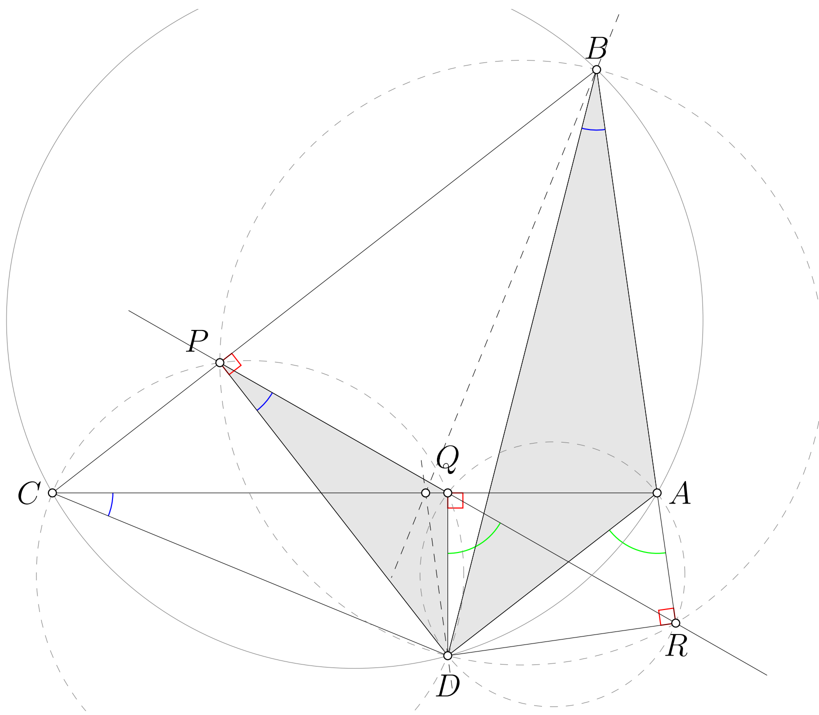
**Remarque :** Une autre façon de se ramener au fait que les triangles $GDC$ et $CHF$ sont semblables est d'utiliser le théorème de la bissectrice. Soit $X$ le point d'intersection des droites $(GC)$ et $(FH)$. L'énoncé est équivalent à l'égalité $\dfrac{EX}{EF} = \dfrac{CX}{CF}$. Or on a

$$\frac{EX}{CX} \cdot \frac{CF}{EF} = \frac{BG}{CG} \cdot \frac{CF}{EF} = \frac{CG}{CF} \cdot \frac{AG}{AE} = \frac{CG}{CF} \cdot \frac{GD}{EH} = \frac{CG}{CF} \cdot \frac{GD}{HC}$$

Donc l'égalité $\dfrac{EX}{EF} = \dfrac{CX}{CF}$ est équivalente à l'égalité $\frac{CG}{CF} = \frac{HC}{GD}$, c'est-à-dire au fait que les triangles $FHC$ et $CDG$ sont semblables.

**Exercice 45.** (S) (IMO 2003 P4) Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique. Les projetés orthogonaux de $D$ sur les droites $(BC), (CA)$ et $(AB)$ sont notés respectivement $P, Q$ et $R$. Montrer que $PQ = QR$ si et seulement si les bissectrices des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$ se coupent sur le segment $[AC]$.

*Solution de l'exercice 45*




L'énoncé indique que les points $P, Q$ et $R$ sont alignés sur la droite de Simson du point $D$ pour le triangle $ABC$. Du fait des divers angles droits, les quadrilatères $CDQP$, $ARDQ$ et $PDRB$ sont cycliques. Observons quelques propriétés additionnelles :
Tout d'abord, par le théorème de l'angle inscrit dans le cercle $DPBR$, on a $\widehat{DPQ} = \widehat{DPR} = \widehat{DBR} = \widehat{DBA}$. Ensuite, d'après le théorème de l'angle inscrit dans le quadrilatère $DQAR$, on a $\widehat{DQR} = \widehat{DAR}$, ce qui implique

$$\widehat{PQD} = 180° - \widehat{DQR} = 180° - \widehat{DAR} = \widehat{DAB}$$

Ainsi, on a $\Delta DPQ \simeq \Delta DBA$. De la même façon, on a $\Delta DQR \simeq \Delta DCB$.
On déduit notamment que

$$\frac{PQ}{RQ} = \frac{PQ}{DQ} \cdot \frac{DQ}{RQ} = \frac{BA}{DA} \cdot \frac{DC}{BC}$$

On montre désormais l'équivalence voulue, par double implication.

On suppose que les bissectrices des angles $\widehat{CBA}$ et $\widehat{CDA}$ se coupent sur la droite $(AC)$ et on note $X$ ce point d'intersection. Alors d'après le théorème de la bissectrice :

$$\frac{CD}{AD} = \frac{CX}{AX} = \frac{CB}{AB}$$

si bien que $\dfrac{PQ}{RQ} = \dfrac{BA \cdot CD}{DA \cdot BC} = 1$ et $PQ = QR$.

Supposons maintenant que $PQ = QR$. Alors $\dfrac{BA \cdot CD}{DA \cdot BC} = \dfrac{PQ}{RQ} = 1$, si bien que $\dfrac{AB}{CB} = \dfrac{AD}{CD}$. Soit maintenant $X_B$ le pied de la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ sur le segment $[AC]$ et $X_D$ le pied de la bissectrice de l'angle $\widehat{ADC}$ sur le segment $[AC]$. D'après le théorème de la bissectrice, on a donc

$$\frac{AX_B}{CX_B} = \frac{AB}{CB} = \frac{AD}{CD} = \frac{AX_D}{CX_D}$$

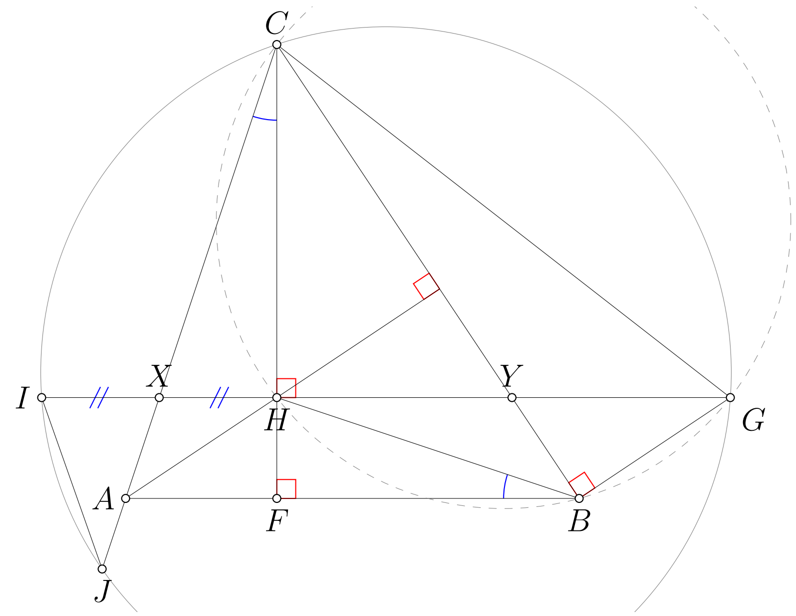
et puisque $X_B$ et $X_D$ sont tous les deux à l'intérieur du segment $[AC]$, on trouve $X_B = X_D$ et les bissectrices se coupent bien sur le segment $[AC]$.

**Remarque n°1 :** Attention, ici il est bien nécessaire de procéder par double implication. On est dans un cas (rare) de la géométrie ou montrer une implication ne permet pas d'avoir l'équivalence en remontant le raisonnement. Il est nécessaire de détailler les deux étapes.

**Remarque n°2 :** La condition que les bissectrices de $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$ se coupent sur le segment $[AC]$ est équivalente au fait que $D$ est sur la symmédiane issue du sommet $A$ dans le triangle $ABC$.

**Exercice 46.** (IMO SL 2015 G1) Soit $ABC$ un triangle d'orthocentre $H$ et soit $G$ le point tel que le quadrilatère $ABGH$ est un parallélogramme. Soit $I$ le point de la droite $(GH)$ tel que la droite $(AC)$ coupe le segment $[HI]$ en son milieu. La droite $(AC)$ recoupe le cercle circonscrit du triangle $GCI$ au point $J$. Montrer que $IJ = AH$.

<u>*Solution de l'exercice 46*</u>




On utilise que la droite $(AC)$ coupe le segment $[HI]$ en son milieu uniquement pour obtenir une égalité de longueurs. En effet, on a des triangles semblables dûs aux diverses propriétés de l'orthocentre et, nous allons le voir, grâce à des points cocycliques cachés dans la figure.

Avant d'attaquer, analysons les diverses hypothèses. On dispose d'un parallèlogramme donc de droites parallèles. Les droites $(BG)$ et $(AH)$ sont parallèles donc les droites $(BG)$ et $(BC)$ sont perpendiculaires. Les droites $(HG)$ et $(AB)$ sont parallèles donc les droite $(HG)$ et $(CH)$ sont perpendiculaires. Les points $G, B, H$ et $C$ sont donc cocycliques.

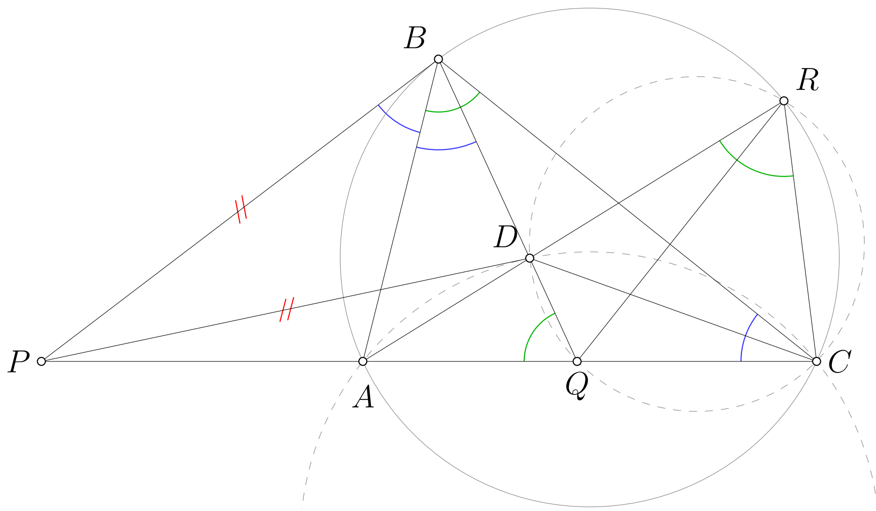
Maintenant, on va chercher à calculer des égalités de rapports et obtenir $\frac{IJ}{x} = \frac{AH}{x}$, avec $x$ une certaine longueur. Pour cela, on a besoin d'identifier différents triangles semblables. Cela tombe bien, on dispose de deux quadrilatères cycliques, qui induisent des triangles semblables. Ainsi, on introduit $X$ le point d'intersection des droites $(IG)$ et $(CJ)$ et $Y$ le point d'intersection des droites $(BC)$ et $(GH)$. On obtient les paires de triangles semblables suivantes : les triangles $IXJ$ et $CXG$, les triangles $CYH$ et $GYB$ et les triangles $CYG$ et $HYB$.
Rappelons aussi que par hypothèse, on a également $XH = XI$ et $BG = AH$. Ainsi, on va calculer $\frac{IJ}{CG}$ et espérer tomber après divers calculs sur $\frac{BG}{CG}$. La corde $CG$ est pribilégiée ici car c'est la corde commune aux deux cercles présents sur la figure.
Enfin, on a les différentes égalités d'angles induites par l'orthocentre, impliquant que les triangles $CXH$ et $BHF$ sont semblables, où le point $F$ est le pied de la hauteur issue du sommet $C$. On peut désormais calculer :

$$\frac{IJ}{CG} = \frac{IX}{XC} = \frac{XH}{XC} = \frac{HF}{HB} = \frac{HF}{YB} \cdot \frac{YB}{HB} = \frac{CH}{CY} \cdot \frac{YG}{CG} = \frac{BG}{YG} \cdot \frac{YG}{CG} = \frac{BG}{CG} = \frac{AH}{CG}$$

et on déduit l'égalité $IJ = AH$.

**Exercice 47.** (IMO SL 2013 G4) Soit $ABC$ un triangle tel que $\widehat{ABC} > \widehat{ACB}$. Soient $P$ et $Q$ deux points distincts sur la droite $(AC)$ tels que $\widehat{PBA} = \widehat{QBA} = \widehat{ACB}$ et $A$ appartient au segment $[PC]$. On suppose qu'il existe un point $D$ sur le segment $[BQ]$ tel que $PD = PB$. La droite $(AD)$ recoupe le cercle circonscrit au triangle $ABC$ au point $R$. Montrer que $QB = QR$.

*Solution de l'exercice 47*




Les hypothèses d'angles nous donnent que la droite $(PB)$ est tangente en $B$ au cercle circonscrit au triangle $ABC$, de même que la droite $(AB)$ est tangente au cercle circonscrit au triangle $BQC$. Par puissance d'un point, on a alors $PD^2 = PB^2 = PA \cdot PC$, de sorte que la droite $(PD)$ est tangente au cercle cirsconscrit au triangle $ADC$. On a donc en résumé :

$$\Delta PBA \simeq \Delta PCB \quad , \quad \Delta ABQ \simeq \Delta ACB \quad , \quad \Delta PAD \simeq \Delta PDC$$

Aucune de ces relations n'implique la longueur $QR$, on va donc s'intéresser de plus près au point $R$.
Par chasse aux angles, on a notamment que

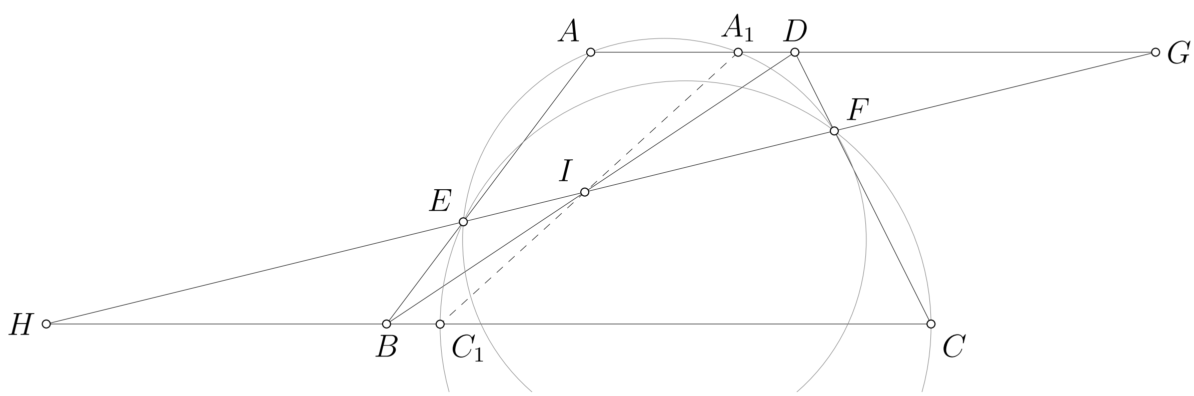
$$\widehat{ARC} = \widehat{ABC} = \widehat{AQB}$$

du fait que $\Delta ABQ \simeq \Delta ACB$. Les points $Q, D, R$ et $C$ sont donc cocycliques. Ceci entraîne que $\Delta AQR \simeq \Delta ADC$. On a désormais tous les éléments pour calculer le rapport $\dfrac{QR}{BQ}$ et montrer qu'il vaut 1.

$$\begin{aligned}
\frac{QR}{BQ} &= \frac{DC \cdot \frac{AQ}{AD}}{BQ} \quad (\Delta AQR \simeq \Delta ADC) \\
&= \frac{AQ}{BQ} \cdot \frac{DC}{AD} \\
&= \frac{AB}{AC} \cdot \frac{PA}{PD} \quad (\Delta ABQ \simeq \Delta ACB \text{ et } \Delta PAD \simeq \Delta PDC) \\
&= \frac{PB}{PA} \cdot \frac{PA}{PD} \quad (\Delta PBA \simeq \Delta PCB) \\
&= 1
\end{aligned}$$

**Exercice 48.** (RMM SL 2017 G1) Soit $ABCD$ un trapèze dans lequel les droites $(AD)$ et $(BC)$ sont parallèles. Soient $E$ un point sur le segment $[AB]$ et $F$ un point sur le segment $[DC]$. Soit $A_1$ le point d'intersection, autre que $A$, de la droite $(AD)$ avec le cercle circonscrit au triangle $AEF$. Soit $C_1$ le point d'intersection, autre que $C$, de la droite $(BC)$ avec le cercle circonscrit au triangle $CEF$. Montrer que les droites $(BD), (EF)$ et $(A_1C_1)$ sont concourantes.

*Solution de l'exercice 48*




On est invité à considérer les points d'intersection de la droite $(EF)$ avec les deux droites parallèles. Ceci nous impose de distinguer deux cas :

**Cas n°1 :** La droite $(EF)$ n'est pas parallèle à la droite $(AD)$.

On introduit alors $G$ le point d'intersection des droites $(AD)$ et $(EF)$ et $H$ le point d'intersection des droites $(BC)$ et $(EF)$.
Pour montrer que les droites sont concourantes, on va introduire $I$ le point d'intersection des droites $(EF)$ et $(BD)$ et nous allons montrer que les points $I, A_1$ et $C_1$ sont alignés à l'aide de la réciproque du théorème de Thalès. On cherche notamment à montrer que $\frac{HI}{HC_1} = \frac{GI}{GA_1}$.
Faisons donc l'état des différentes égalités de rapport dont on dispose déjà.

Tout d'abord, d'après le théorème de Thalès, on a

$$\frac{HB}{AG} = \frac{HE}{GE} = \frac{EB}{EA} \quad ; \quad \frac{HC}{DG} = \frac{HF}{GF} = \frac{FC}{FD} \quad ; \quad \frac{HB}{GD} = \frac{IH}{IG} = \frac{BI}{DI}$$

Ensuite, en utilisant la puissance d'un point dans les différents cercles, notamment pour le point $H$ par rapport au cercle passant par $C, E$ et $F$ et pour le point $G$ par rapport au cercle passant par $A, E$ et $F$ :

$$HC_1 \cdot HC = HE \cdot HF \quad ; \quad GA_1 \cdot GA = GF \cdot GE$$

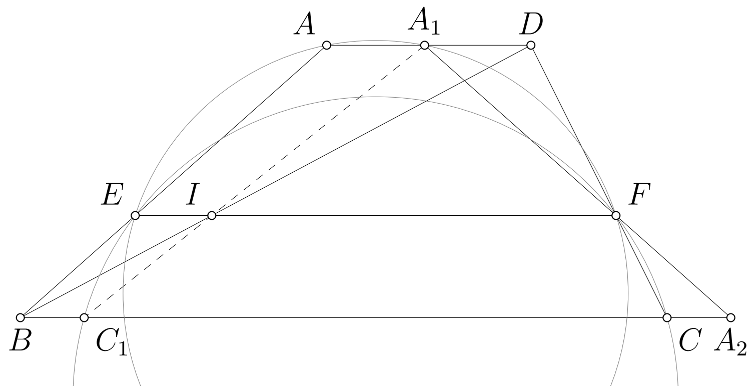
On peut désormais entamer notre chasse aux rapports, en cherchant à faire apparaître les diverses égalités établies :

$$\frac{HI}{HC_1} = \frac{HI}{BH} \cdot \frac{BH}{EH} \cdot \frac{EH}{HC_1} = \frac{GI}{GD} \cdot \frac{GA}{GE} \cdot \frac{HC}{HF} = \frac{GI}{GD} \cdot \frac{GA}{GE} \cdot \frac{HC}{HF}$$
$$= \frac{GI}{GD} \cdot \frac{GA}{GE} \cdot \frac{GD}{GF} = \frac{GI}{GF} \cdot \frac{GA}{GE} = \frac{GI}{GF} \cdot \frac{GF}{GA_1} = \frac{GI}{GA_1}$$

ce qui est bien l'égalité de rapports voulue.

**Cas n°2 :** Les droites $(EF)$ et $(AD)$ sont parallèles.

Certains arguments très courts mais conceptuels permettent de couvrir ce cas particulier. Par exemple une phrase telle que "Le cas où les droites $(EF)$ et $(AD)$ sont parallèles s'obtient par continuité" pourrait suffir. C'est un bon exercice cependant de chercher une preuve "à la main" de ce cas particulier.




Le principe est le même que pour le cas général : on note $I$ le point d'intersection des droites $(BD)$ et $(EF)$ et on désire montrer que $\dfrac{BC_1}{A_1D} = \dfrac{BI}{DI}$ afin d'appliquer la réciproque du théorème de Thalès et de conclure que le point $I$ appartient à la droite $(A_1C_1)$. Pour tirer parti de l'hypothèse supplémentaire que les droites $(AD)$ et $(EF)$ sont parallèles, il faut remarquer que les quadrilatères $AA_1FE$ et $EFCC_1$ sont des trapèzes inscrits dans un cercle et donc isocèles. Les segments $[AA_1], [EF]$ et $[CC_1]$ partagent donc la même médiatrice, qui constitue donc un axe de symétrie pour notre figure, que l'on va donc compléter.

On introduit le point $A_2$, point d'intersection des droites $(A_1F)$ et $(BC)$. La symétrie évoquée plus haut échange les droites $(AE)$ et $(A_1F)$, donc le point $A_2$ est le symétrique du point $B$ par rapport à la médiatrice de $[CC_1]$, ce qui donne $BC_1 = CA_2$. Il suffit donc de montrer que $\dfrac{CA_2}{A_1D} = \dfrac{BI}{DI}$. Or, d'après le théorème de Thalès, d'abord pour les paires de droites parallèles $(BC)$ et $(IF)$, puis pour les paires de droites parallèles $(A_1D)$ et $(CA_1)$, on a

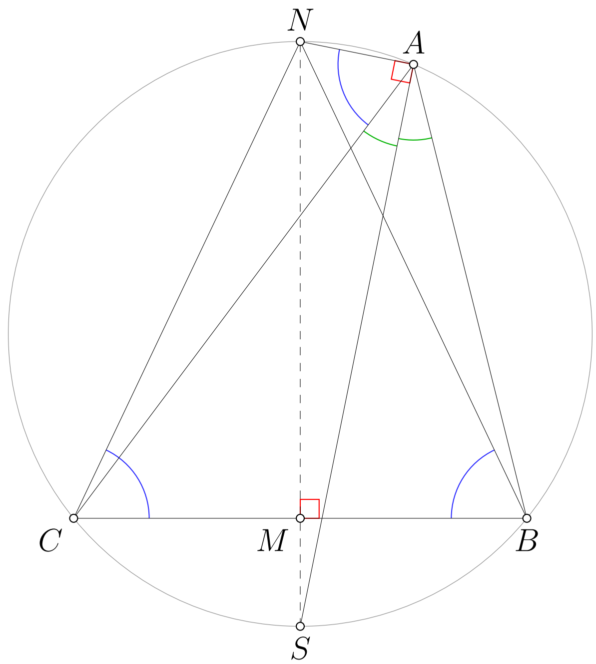
$$\frac{BI}{DI} = \frac{FC}{FD} = \frac{CA_2}{DA_1}$$

qui est bien l'égalité voulue, et on l'on peut conclure aussi dans le cas où les droites $(EF)$ et $(BC)$ sont parallèles.

## La méthode du point fantôme

**Exercice 50.** (Existence du pôle Nord) Soit $ABC$ un triangle. Soit $\ell$ la perpendiculaire à la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ passant par $A$. Montrer que la médiatrice du segment $[BC]$ et la droite $\ell$ se coupent sur le cercle $\mathcal{C}$.

<u>*Solution de l'exercice 50*</u>



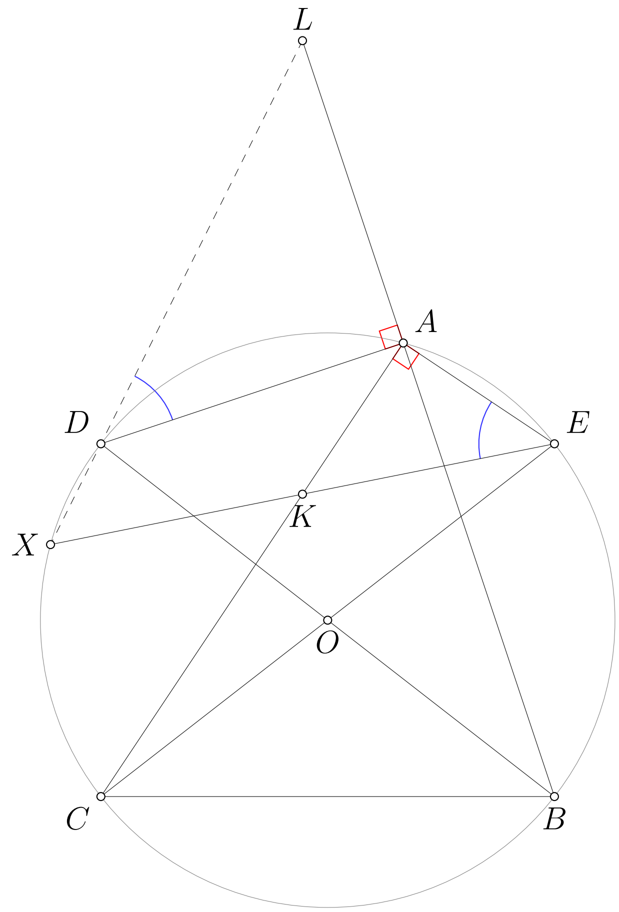

Soit $N$ le point d'intersection de $\ell$ avec $\mathcal{C}$. Nous allons montrer que $\widehat{NBC} = \widehat{NCB}$, ce qui impliquera que $NB = NC$ et que le point $N$ est sur la médiatrice du segment $[BC]$.
Pour cela, on observe que $\widehat{NAC} = \widehat{NBC}$ d'après le théorème de l'angle inscrit. D'autre part :

$$\widehat{NCB} = 180° - \widehat{NAB} = 180° - (90° + \frac{1}{2}\widehat{CAB}) = 90° - \frac{1}{2}\widehat{CAB} = \widehat{NAC}$$

On a donc $\widehat{NCB} = \widehat{NAC} = \widehat{NBC}$, comme voulu.

**Exercice 51.** (JBMO SL 2014 G2) Soit $ABC$ un triangle aux angles aigus dans lequel $AB < AC < BC$ et soit $\mathcal{C}$ sont cercle circonscrit. Soit $D$ le point diamétralement opposé à $B$ et soit $E$ le point diamétralement opposé à $C$. Le cercle de centre $A$ de rayon $AE$ recoupe le segment $[AC]$ en $K$. Le cercle de centre $A$ et rayon $AD$ recoupe le segment $[AB]$ en $L$. Montrer que les droites $(EK)$ et $(DL)$ se coupent de le cercle $\mathcal{C}$.

<u>*Solution de l'exercice 51*</u>



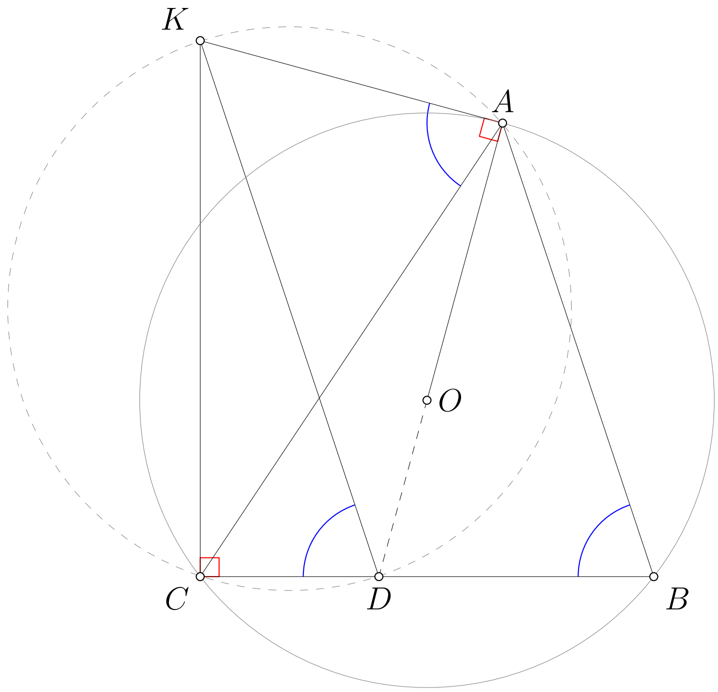

Soit $\mathcal{C}$ le cercle passant par $A, B$ et $C$.
On note $X$ le second point d'intersection de la droite $(EK)$ avec le cercle $\mathcal{C}$. On montre que $X$ est sur la droite $(LD)$.
Notons que, puisque $[CE]$ est un diamètre de $\mathcal{C}$, $\widehat{CAE} = 90°$. De même, $\widehat{LAD} = 90°$. Les triangles $AKE$ et $ADL$ sont donc rectangles isocèles en $A$. On a donc

$$\widehat{XDA} = 180° - \widehat{AEX} = 180° - \widehat{AEK} = 180° - 45° = 180° - \widehat{ADL}$$

de sorte que $\widehat{XDL} = \widehat{XDA} + \widehat{ADL} = 180°$ et le point $X$ est bien sur la droite $(DL)$, comme voulu.

**Exercice 52.** Soit $ABC$ un triangle aux angles aigus et soit $O$ le centre de son cercle circonscrit. La perpendiculaire à la droite $(BC)$ en $C$ coupe la tangente en $A$ au cercle circonscrit au triangle $ABC$ au point $K$. La parallèle à la droite $(AB)$ passant par $K$ coupe la droite $(BC)$ au point $D$. Montrer que les points $A, O$ et $D$ sont alignés.

<u>*Solution de l'exercice 52*</u>



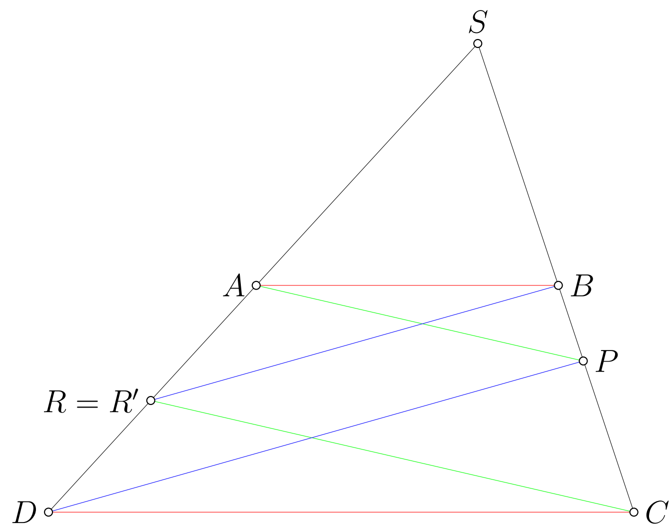

On montre que $\widehat{KAO} = \widehat{KAD}$. Or, puisque $(AK)$ est tangente au cercle passant par $A, B$ et $C$, on a que $\widehat{KAO} = 90°$. Il suffit donc de montrer $\widehat{KAD} = 90°$. Comme on a $\widehat{KCD} = 90°$, cela revient à montrer que les points $K, A, D$ et $C$ sont cocycliques par le théorème de l'angle inscrit. On n'a pas encore utilisé que les droites $(KD)$ et $(AB)$ sont parallèles. Or on a, d'abord par égalité d'angles correspondants puis par théorème de l'angle tangentiel :

$$\widehat{KDC} = \widehat{ABC} = \widehat{KAC}$$

ce qui prouve bien que les points $K, A, D$ et $C$ sont cocycliques et conclut.

**Exercice 53.** Soit $ABCD$ un trapèze avec $AB < CD$ et les droites $(AB)$ et $(CD)$ parallèles. Soit $P$ un point appartenant au segment $[CB]$. La parallèle à le droite $(AP)$ passant par le point $C$ coupe le segment $[AD]$ en le point $R$ et la parallèle à la droite $(DP)$ passant par le point $B$ coupe le segment $[AD]$ en le point $R'$. Montrer que $R = R'$.

*Solution de l'exercice 53*




Soit $S$ le point d'intersection des droites $(CB)$ et $(AD)$. Comme les droites $(AP)$ et $(RC)$ sont parallèles, d'après le théorème de Thalès on a

$$\frac{AS}{RS} = \frac{PS}{CS}$$

soit $RS \cdot PS = AS \cdot CS$.
Comme les droites $(DP)$ et $(BR')$ sont parallèles, d'après le théorème de Thalès

$$\frac{DS}{R'S} = \frac{PS}{BS}$$

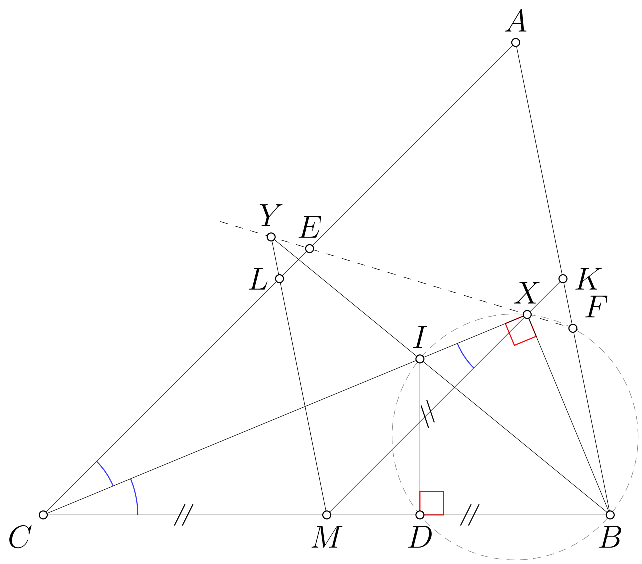
soit $DS \cdot BS = PS \cdot R'S$.
Enfin, les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont parallèles donc d'après le théorème de Thalès,

$$\frac{AS}{DS} = \frac{BS}{CS}$$

soit $AS \cdot CS = BS \cdot DS$. On conclut que $PS \cdot RS = PS \cdot R'S$ donc $RS = R'S$ et comme les points $S, R$ et $R'$ sont sur la même droite, on trouve bien $R = R'$.

**Exercice 54.** (Lemme utile) Soit $ABC$ un triangle, $I$ le centre de son cercle inscrit et soient $D, E$ et $F$ les points de contact du cercle inscrit avec les côtés $[BC], [CA]$ et $[AB]$ respectivement. Soient $M, L$ et $K$ les milieux des côtés $[BC], [CA]$ et $[AB]$. Soit $X$ le point d'intersection des droites $(CI)$ et $(MK)$ et soit $Y$ le point d'intersection des droites $(BI)$ et $(ML)$. Montrer que les points $Y, E, F$ et $X$ sont alignés.

*Solution de l'exercice 54*



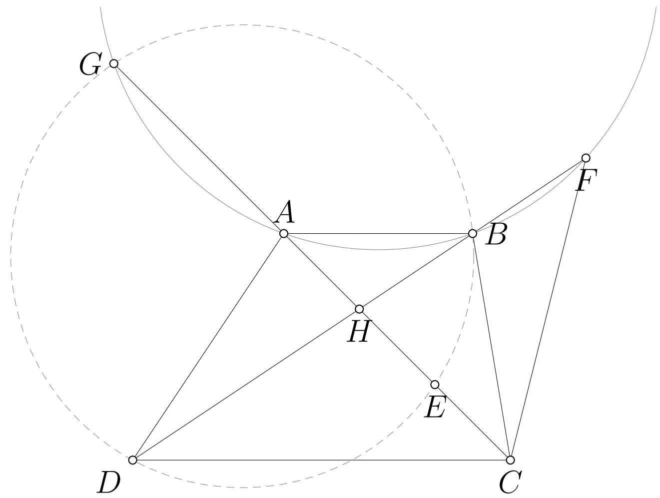

On montre que les points $E, F$ et $X$ sont alignés, la démontrstation du fait que les points $Y, E$ et $F$ sont alignés s'effectue de manière similaire. Puisque les droites $(MK)$ et $(AC)$ sont parallèles, $\widehat{CXM} = \widehat{XCA} = \widehat{MCX}$ car le point $X$ appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{BCA}$. On déduit que le triangle $MCX$ est isocèle en $M$. Ainsi, $MB = MC = MX$ et la point $X$ appartient au cercle de diamètre $[BC]$. On obtient que $\widehat{CXB} = 90°$, donc $\widehat{IXB} = 90°$. Puisque $\widehat{IDB} = \widehat{IFB} = 90°$, les points $I, X, F, B$ et $D$ sont cocycliques.
Nous allons désormais que $\widehat{DFX} = \widehat{DFE}$.
Puisque les droites $(DC)$ et $(CE)$ sont tangentes au cercle inscrit du triangle $ABC$ en les points $D$ et $E$, le triangle $CDE$ est isocèle en $C$ et

$$\widehat{EFD} = \widehat{CDE} = 90° - \frac{1}{2}\widehat{BCA} = 90° - \widehat{BCX} = \widehat{DBX} = \widehat{DFX}$$

où on a utilisé successivement que le triangle $BCX$ est rectangle en $X$ et que les points $D, F, B$ et $X$ sont sur un même cercle. On a obtenu l'éaglité d'angle désirée, qui montrer bien que les points $E, X$ et $F$ sont alignés.

**Exercice 55.** (Iran MO 2015 Round 3) Soit $ABCD$ un trapèze dans lequel les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont parallèles. Soit $E$ un point appartenant au segment $[AC]$. La parallèle à la droite $(BE)$ passant par $C$ coupe la droite $(BD)$ en $F$. Montrer que le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles $ABF$ et $BED$ appartient à la droite $(AC)$.

Solution de l'exercice 55




La présence de nombreuses droites parallèes nous encourage à essyaer une chasse aux rapports et donc à utiliser la puissance d'un point.

Soit $G$ le second point d'intersection de la droite $(AC)$ avec le cercle circonscrit au triangle $ABF$. Plutôt que de montrer que deux cercles se coupent sur la droite $(AC)$, nous aloons montrer que le point $G$ appartient au cercle circonscrit au triangle $BED$.

Soit $H$ le point d'intersection des droites $(AC)$ et $(BD)$. D'après la puissance du point $H$ par rapport au cercle circonscrit au triangle $ABF$, $HG \cdot HA = HB \cdot HF$. De plus le fait que les droites $(BE)$ et $(CF)$ soient parallèles se traduit, d'après le théorème de Thalès, par $HE \cdot HF = HB \cdot HC$. N'oublions par que les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont parallèles, donc par le théorème de Thalès, on sait aussi que $\frac{HC}{HA} = \frac{HD}{HB}$. Nous avons désormais tous les outils pour démontrer que $HG \cdot HE = HB \cdot HD$ :

$$HG \cdot HE = \frac{HB \cdot HF \cdot HE}{HA} = HB \cdot HB \cdot \frac{HC}{HA} = HB^2 \cdot \frac{HD}{HB} = HD \cdot HB$$

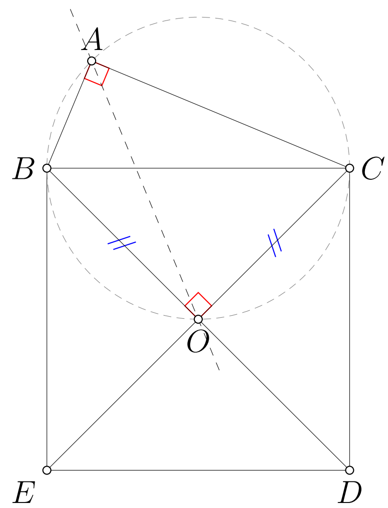
ce qui signifie, par la réciproque de la puissance d'un point, que les points $G, B, E$ et $F$ sont cocycliques.

# 2 Maitriser de nouvelles techniques

## Le Pôle Sud

**Exercice 61.** Soit $BCDE$ un carré et soit $O$ son centre. Soit $A$ un point situé à l'extérieur du carré $BCDE$ tel que le triangle $ABC$ est rectangle en $A$. Montrer que le point $O$ appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

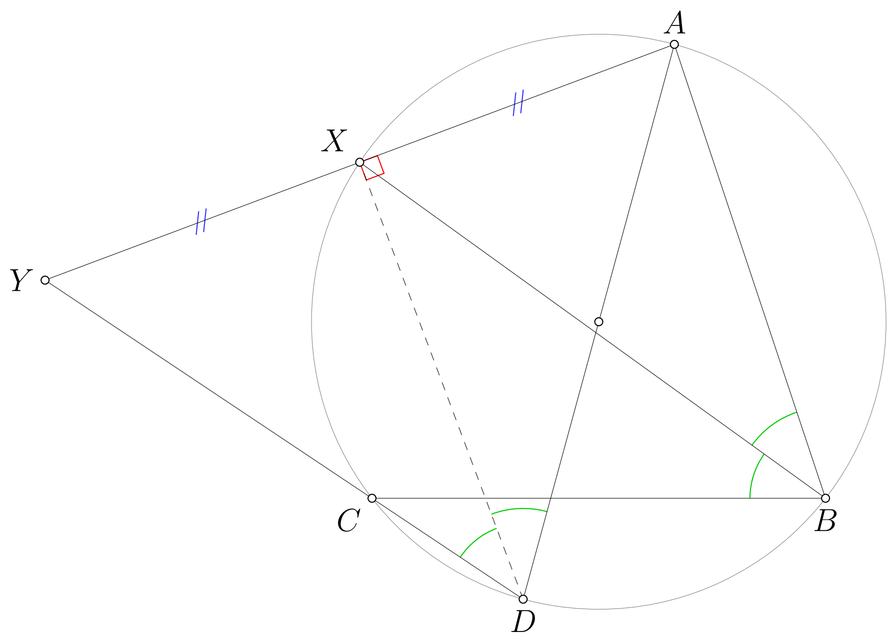
Solution de l'exercice 61




Puisque $\widehat{BAC} = 90° = \widehat{BOC}$, les points $B, A, C$ et $O$ sont cocycliques. Puisque le triangle $BOC$ est isocèle en $O$, le point $O$ est sur la médiatrice du segment $[BC]$, il s'agit donc du pôle Sud du point $A$ dans le triangle $ABC$. Le point $O$ appartient donc à la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

**Exercice 63.** (Tour final Suisse 2019) Soit $k$ un cercle et $A$ un point sur ce cercle. Soient $B$ et $C$ deux autres points sur le cercle $k$. Soit $X$ le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ avec le cercle $k$. Soit $Y$ le symétrique du point $A$ par rapport au point $X$. Soit $D$ le point d'intersection de la droite $(YC)$ avec le cercle $k$. Montrer que le point $D$ obtenu ne dépend pas du choix des points $B$ et $C$ sur le cercle $k$.

<u>*Solution de l'exercice 63*</u>

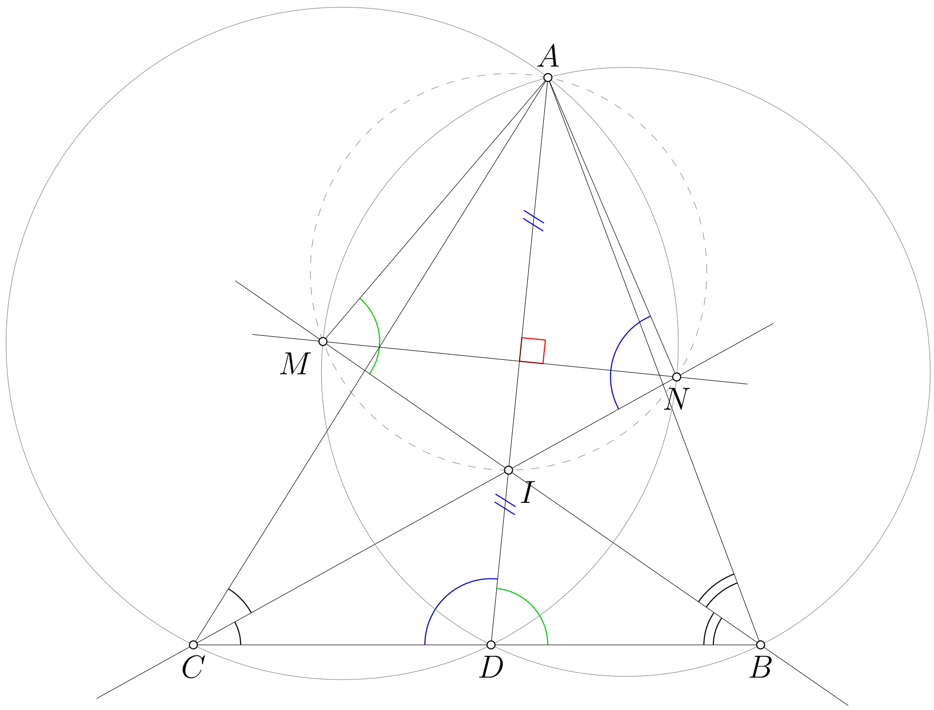



Le point $X$ est identifié comme le pôle Sud du sommet $B$ dans le triangle $ABC$. Il s'agit donc du milieu de l'arc $\widehat{AC}$. Il s'agit donc aussi du pôle Sud du sommet $D$ dans le triangle $ADC$. La droite $(XD)$ est donc la bissectrice de l'angle $\widehat{ADC}$.

Dans le triangle $AYD$, la médiane et la bissectrice sont donc confondues. on déduit que le triangle $AYD$ est isocèle en $D$ et le point $X$ est le pied de la hauteur issue du sommet $D$ dans le triangle $ADY$. L'angle $\widehat{AXD}$ est donc droit. Cela signifie que le point $D$ est le point diamétralement opposé à $A$ dans le cercle $k$. Cette position ne dépend pas des points $B$ et $C$ choisis, ce qui conclut l'exercice.

**Exercice 65.** (BXMO 2011) Soit $ABC$ un triangle soit $I$ le centre de son cercle inscrit. Les bissectrices $(AI),(BI)$ et $(CI)$ coupent les côtés opposés en $D,E$ et $F$ respectivement. La médiatrice du segment $[AD]$ coupe les droites $(BI)$ et $(CI)$ en $M$ et $N$ respectivement. Montrer que les points $A,I,M$ et $N$ sont cocycliques.

*Solution de l'exercice 65*



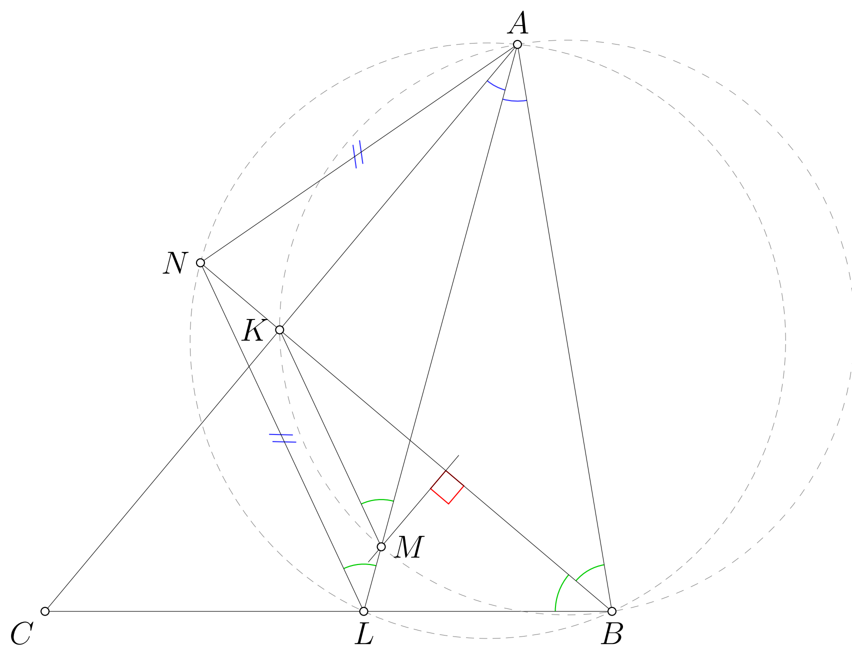

Des bissectrices et des médiatrices s'intersectent, c'est donc qu'il y a des pôles sud cachés. Le point $M$ est en effet par définition le pôle sud du point $B$ dans le triangle $BAD$ donc le quadrilatère $BAMD$ est cyclique. De même, le quadrilatère $CAND$ est cyclique. Il vient que

$$\widehat{IMA}+\widehat{INA}=\widehat{BMA}+\widehat{CNA}=\widehat{BDA}+\widehat{CDA}=180^\circ$$

ce qui montre bien que les points $A,I,M$ et $N$ sont cocycliques.

**Exercice 66.** (JBMO 2010) Soit $ABC$ un triangle et soit $L$ le pied de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ et soit $K$ le pied de la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$. La médiatrice du segment $[BK]$ coupe la droite $(AL)$ en un point $M$. La parallèle à la droite $(KM)$ passant par le point $M$ coupe la droite $(BK)$ au point $N$. Montrer que $LN = NA$.

<u>*Solution de l'exercice 66*</u>



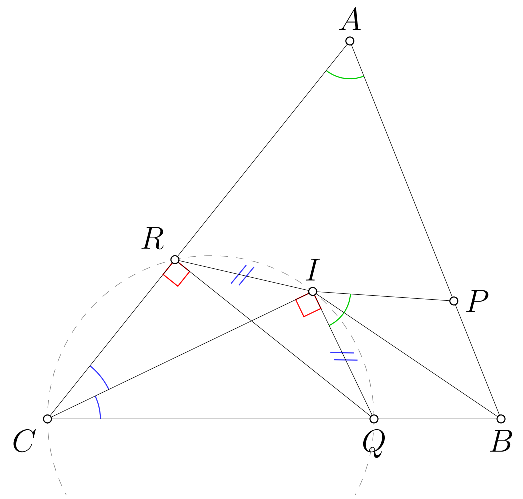

Des bissectrices et des médiatrices qui s'intersectent, c'est donc qu'il y a des pôles sud cachés. En effet, le point $M$ est le pôle Sud du point $A$ dans le triangle $KBA$ par hypothèse donc le quadrilatère $MKAB$ est cyclique. On a alors

$$\widehat{NLA} = \widehat{KMA} = \widehat{KBA} = \widehat{NBA}$$

donc le quadrilatère $NLBA$ est cyclique. Puisque le point $N$ est le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{LBA}$ et du cercle circonscrit au triangle $LBA$, le point $N$ est le pôle Sud du sommet $B$ dans le triangle $LBA$. Il appartient donc à la médiatrice du segment $[AL]$. Ainsi $NL = NA$.

**Exercice 67.** (Caucase MO 2018 Senior P2) Soit $ABC$ un triangle, $P, Q$ et $R$ sur les côtés $AB, BC$ et $CA$ tels que $AP = AR$, $BP = BQ$ et $\widehat{PIQ} = \widehat{BAC}$. Montrer que les droites $(QR)$ et $(AC)$ sont perpendiculaires.

<u>*Solution de l'exercice 67*</u>




Le point $I$ appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{RAP}$. puisque le triangle $APR$ est isocèle en $A$, cette bissectrice est la médiatrice du segment $[PR]$. Cela implique que $IR = IP$. On obtient de même en considérant la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ que $IP = IQ$. Il vient que $IR = IQ$. Le point $I$ est dont sur la bissectrice de l'angle $\widehat{QCR}$ et sur la médiatrice du segment $[RQ]$. Il s'agit donc du pôle Sud du sommet $C$ dans le triangle $RQC$ donc les points $I, R, Q$ et $C$ sont cocycliques.

Pour montrer que les droites $(RQ)$ et $(AC)$ sont perpendiculaires, il suffit donc, d'après le théorème de l'angle inscrit, de montrer que $\widehat{CIQ} = 90°$.

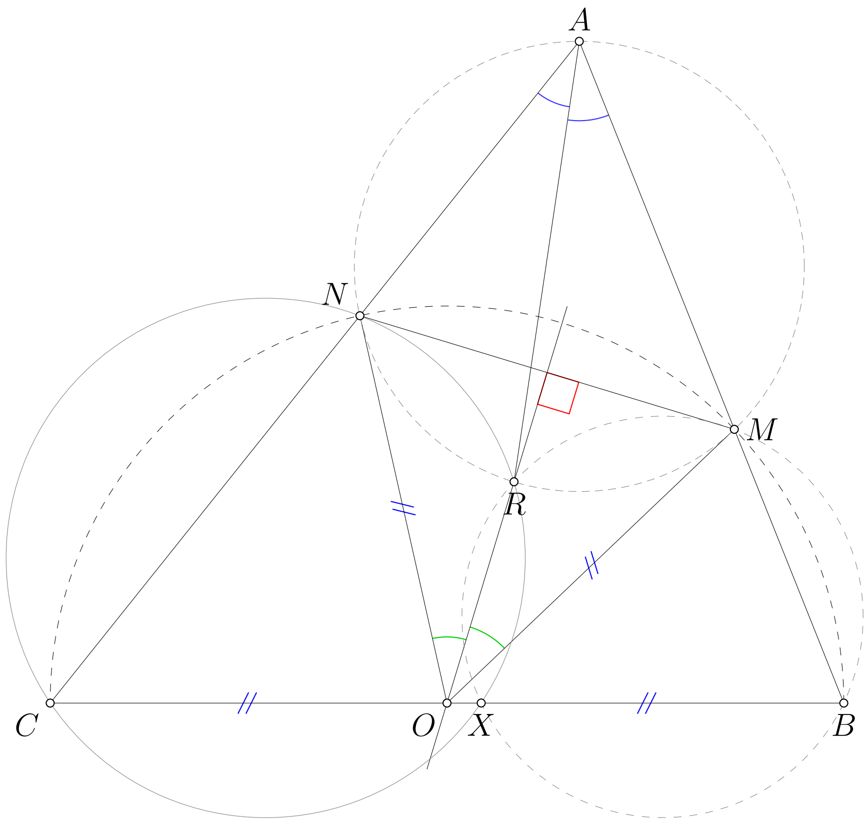
La droite $(IB)$ étant un axe de symétrie du quadrilatère $IPBQ$, on obtient que $\widehat{QIB} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$ et $\widehat{QBI} = \frac{1}{2}\widehat{ABC}$. On déduit que

$$\widehat{IQC} = 180° - \widehat{IQB} = \widehat{QIB} + \widehat{IBQ} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} + \frac{1}{2}\widehat{ABC} = 90° - \frac{1}{2}\widehat{BCA} = 90° - \widehat{QCI}$$

On a donc bien que $\widehat{CIQ} = 90°$, ce qui conclut.

**Exercice 68.** (IMO 2004 P1) Soit $ABC$ un triangle acutangle non isocèle en $A$. Le cercle de diamètre $[BC]$ coupe $[AB]$ et $[AC]$ en $M$ et $N$ respectivement. Soit $O$ le milieu de $[BC]$. Les bissectrices de $\widehat{BAC}$ et $\widehat{MON}$ se coupent en $R$. Montrer que les cercles circonscrits de $BMR$ et $CNR$ se coupent sur $[BC]$.

<u>*Solution de l'exercice 68*</u>




Le triangle $MON$ est, par définition, isocèle en $O$. Ainsi, la bissectrice de l'angle $\widehat{MON}$ est aussi la médiatrice du segment $[MN]$. Le point $R$ est donc le point d'intersection de la médiatrice du segment $[MN]$ et de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$. il s'agit donc du pôle Sud du sommet $A$ dans le triangle $AMN$. On en déduit que le quadrilatère $RMAN$ est cyclique.
Soit désormais $X$ est le point d'intersection du cercle circonscrit au triangle $CNR$ et du segment $[BC]$. Par chasse aux angles dans les divers quadrilatères cyclciques, on a

$$180 - \widehat{RXB} = \widehat{RXC} = 180° - \widehat{RNC} = \widehat{RNA} = 180° - \widehat{RMA} = \widehat{RMB}$$

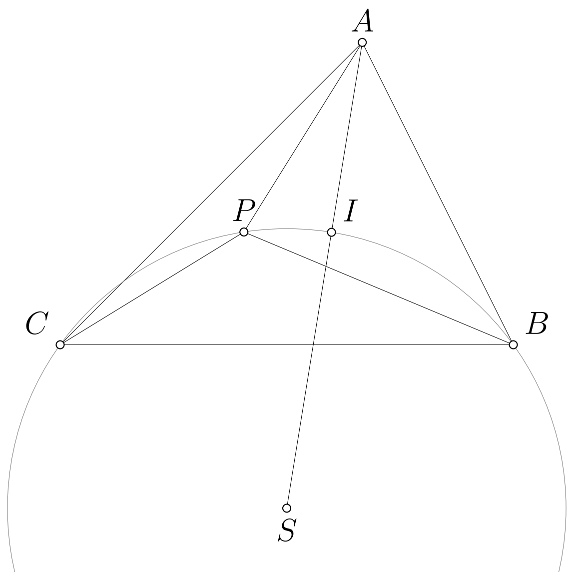
Cela signifie que le point $X$ est sur le cercle circonscrit au triangle $BMR$. On a donc montré que le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles $CNR$ et $BMR$ appartient au segment $[BC]$. (La dernière étape du raisonnement est connue comme le premier théorème de Miquel.)

**Exercice 69.** (IMO 2006 P1) Soit $ABC$ un triangle et $I$ le centre de son cercle inscrit. Soit $P$ un point un point à l'intérieur du triangle $ABC$ vérifiant

$$\widehat{PBA}+\widehat{PCA}=\widehat{PBC}+\widehat{PCB}$$

Montrer que $AP \geqslant AI$ avec égalité ssi $P = I$

<u>*Solution de l'exercice 69*</u>




Ici, il est bien sûr très difficile de placer le point $P$ sur la figure, pourtant c'est en trouvant comment le placer que l'on va effectivement résoudre l'exercice. On commence par réfléchir à main levée. Tout d'abord, le membre de droite de l'inégalité s'écrit $180° - \widehat{BPC}$. On calcule donc $180° - \widehat{PBA} - \widehat{PCA}$ :

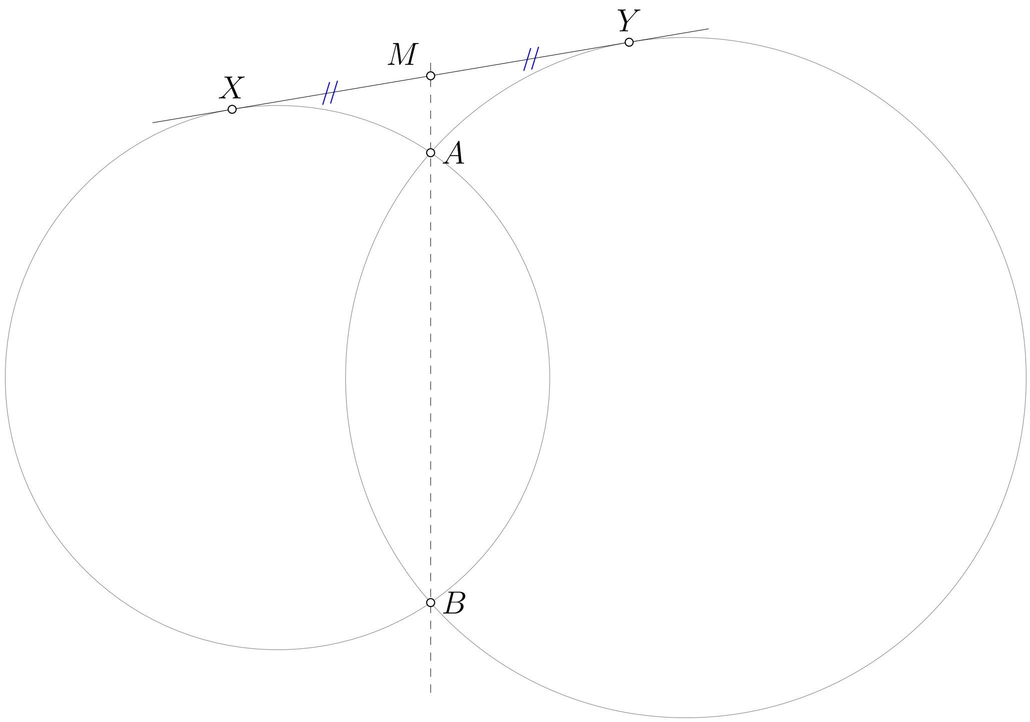
$$\begin{aligned}
180° - \widehat{PBA} - \widehat{PCA} &= \widehat{PAB} + \widehat{APB} - \widehat{PCA} \\
&= \widehat{PAB} + 360° - \widehat{BPC} - \widehat{CPA} - \widehat{PCA} \\
&= \widehat{PAB} + \widehat{PAC} + 180° - \widehat{BPC} \\
&= \widehat{BAC} + 180° - \widehat{BPC}
\end{aligned}$$

si bien que $\widehat{BPC} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} + 90°$.
Le point $P$ est donc sur un cercle passant par les points $B$ et $C$ et un troisième point $X$ fixe vérifiant $\widehat{BXC} = 90° + \frac{1}{2}\widehat{BAC}$, encore faut-il trouver le point $X$. Il ne faut pas chercher bien loin, l'énoncé évoque le point $I$, il ne reste donc plus qu'à remarquer que $\widehat{BIC} = 90° + \frac{1}{2}\widehat{BAC}$.
Le point $P$ est donc sur le cercle antarctique, de centre le pôle Sud du sommet $A$. La distance du point $A$ à ce cerlce est $AI$ car $A, I$ et le pôle Sud $S$ sont alignés, donc $AP \geqslant AI$ avec égalité ssi $P = I$.

## L'axe radical

**Exercice 70.** (Lemme utile) Soient $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ deux cercles se coupant en $A$ et $B$. Une tangente commune $\ell$ à $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ touche le cercle $\Gamma_1$ en $X$ et $\Gamma_2$ en $Y$. Soit $M$ le point d'intersection des droites $(AB)$ et $(XY)$. Montrer que $M$ est le milieu du segment $[XY]$.

*Solution de l'exercice 70*



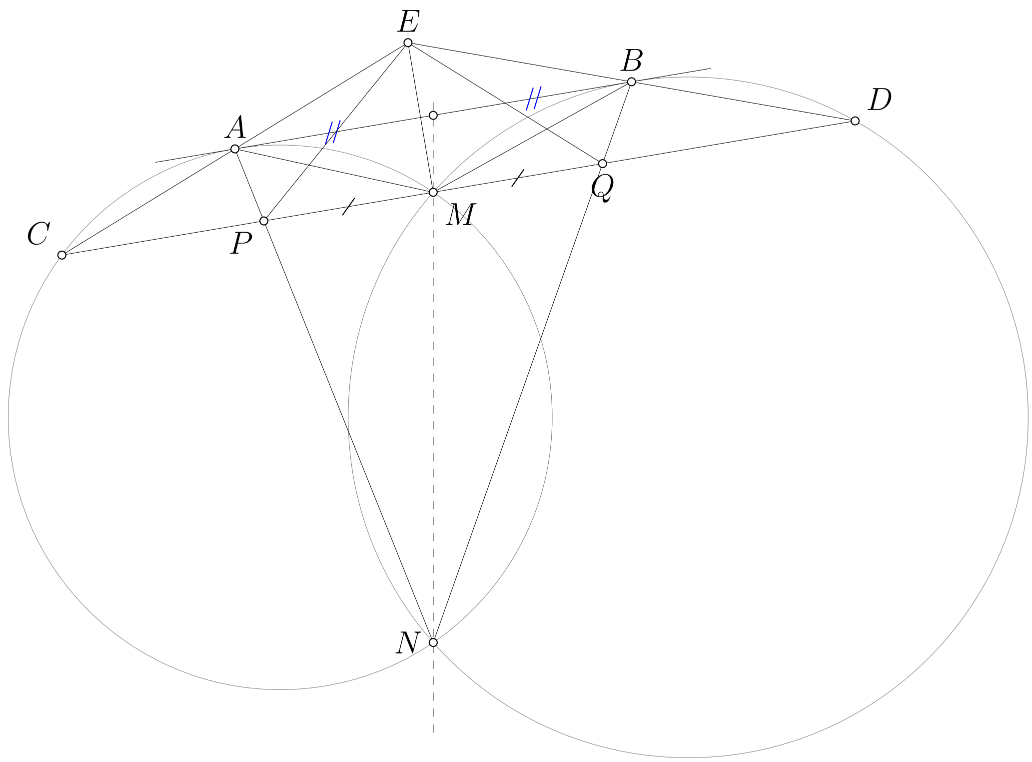

La droite $(AB)$ est l'axe radical des cercles $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$. Comme le point $M$ appartient à cet axe radical, il vérifie $\mathcal{P}_{\Gamma_1}(M) = \mathcal{P}_{\Gamma_2}(M)$. Puisque la droite $(AB)$ est tangente aux deux cercles, on a

$$MX^2 = \mathcal{P}_{\Gamma_1}(M) = \mathcal{P}_{\Gamma_2}(M) = MY^2$$

et $M$ est bien le milieu de $[XY]$.

**Exercice 71.** (IMO 2000 P1) Soient $k_1$ et $k_2$ deux cercles se coupant en deux points $M$ et $N$. Une tangente commune en deux cercles touche le cercle $k_1$ au point $A$ et touche le cercle $k_2$ au point $B$, de telle sorte que le point $M$ est plus proche que le point $N$ de la droite $(AB)$. La parallèle à la droite $(AB)$ passant par le point $M$ coupe le cercle $k_1$ au point $C$ et le cercle $k_2$ au point $D$. Les droites $(AC)$ et $(BD)$ se coupent au point $E$, les droites $(AN)$ et $(CD)$ au point $P$ et les droites $(BN)$ et $(CD)$ au point $Q$. Montrer que $EP = EQ$.

*Solution de l'exercice 71*



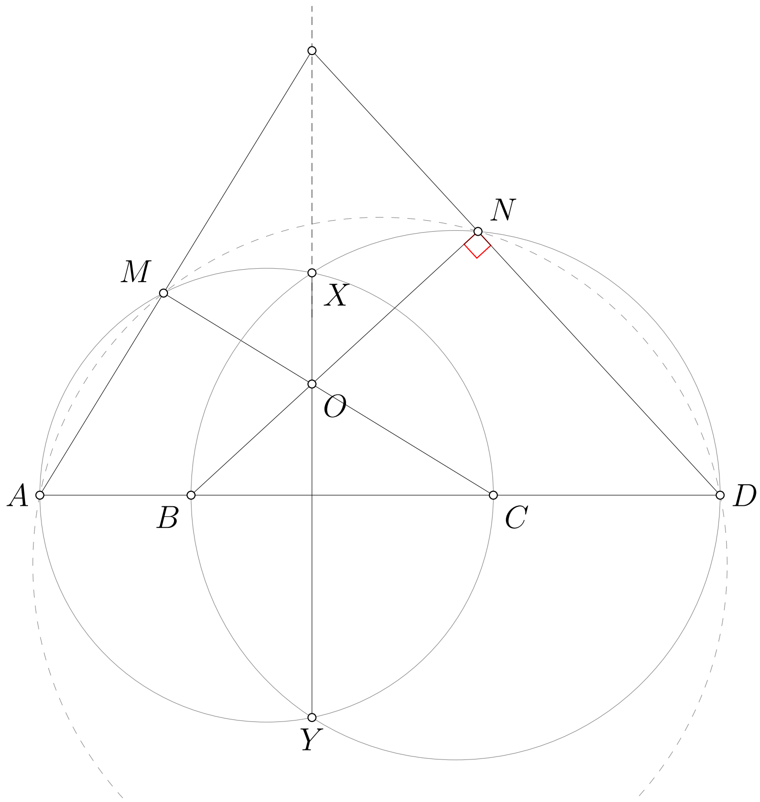

On reconnaît la configuration de l'exercice précédent, elle sera donc sûrement utile par la suite.

En effectuant une première chasse aux angles avec les définitions des objets, on obtient $\widehat{ABE} = \widehat{MBD} = \widehat{ABM}$ successivement par parallélisme et avec le théorème de l'angle tangentiel. De même, $\widehat{MAB} = \widehat{BAE}$. Les triangles $EAB$ et $MAB$ sont donc semblables et ont un côté commun, ils sont isométriques. Donc $BM = ME$ et $AE = AM$, donc le point $E$ est le symétrique du point $M$ par rapport à la droite $(AB)$. Les droites $(EM)$ et$(AB)$ sont donc perpendiculaires, et donc les droites $(EM)$ et $(CD)$ sont perpendiculaires. On est désormais ramené à montrer que le point $M$ est le milieu du segment $[PQ]$.

Soit $X$ le point d'intersection des droites $(AB)$ et $(MN)$. Par l'exercice précédent, $X$ est milieu du segment $[AB]$. Mais les triangles $ABN$ et $PQN$ sont semblables et $N, M, X$ sont alignés donc $M$ est le milieu du segment $[PQ]$, ce qui conclut.

**Exercice 73.** (IMO 1995 P1) Soient $A, B, C$ et $D$ quatre points distincts alignés dans cet ordre. Soient $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ les cercles de diamètre respectifs $[AC]$ et $[BD]$, qui s'intersectent en $X$ et $Y$. On considère $O$ un point arbitraire sur la droite $(XY)$ qui ne soit pas sur la droite $(AB)$. La droite $(CO)$ recoupe le cercle $\Gamma_1$ en un point $M$, la droite $(BO)$ recoupe le cercle $\Gamma_2$ en un point $N$. Montrer que les droites $(AM), (DN)$ et $(XY)$ sont concourantes.

*Solution de l'exercice 73*



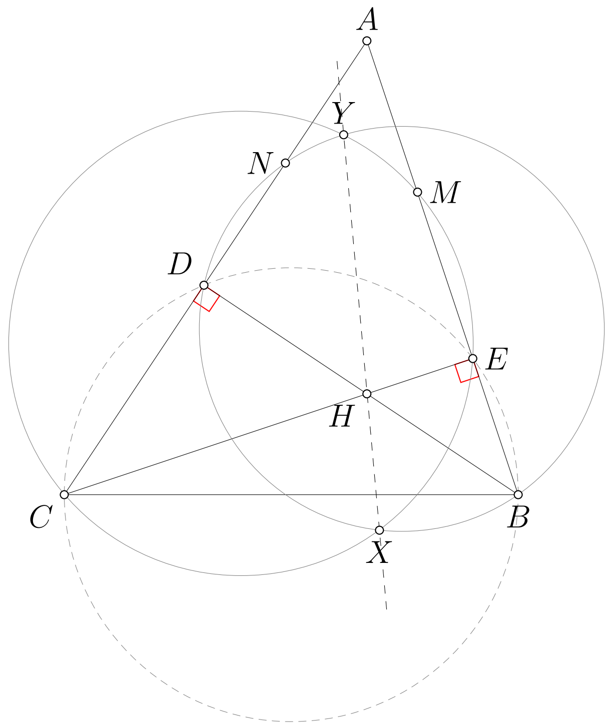

Le point $O$ figure sur la droite $(XY)$ qui est l'axe radical des cercles $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$. Il vient donc que $OM \cdot OC = ON \cdot OB$ donc les points $M, C, N$ et $B$ sont cocycliques d'après la réciproque de la puissance d'un point.
On a alors

$$\widehat{AMN} = \widehat{AMC} + \widehat{CMN} = 90 + \widehat{CBM} = 180 - \widehat{ADN}$$

donc les points $A, M, N$ et $D$ sont cocycliques. On note $\omega$ ce cercle. La droite $(AM)$ est l'axe radical des cercles $\omega$ et $\Gamma_1$, la droite $(DN)$ est l'axe radical des cercles $\omega$ et $\Gamma_2$ et la droite $(XY)$ est l'axe radical des cercles $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$, ces trois droites sont concourantes.

**Exercice 74.** Soit $ABC$ un triangle, $H$ le point d'intersection des hauteurs issues des sommets du triangle. Soit $M$ un point quelconque sur $[AB]$ et $N$ un point quelconque sur $[AC]$. Soient $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ les cercles de diamètre respectifs $[CM]$ et $[BN]$. Les cercles $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ se coupent en $X$ et $Y$. Montrer que $X, H$ et $Y$ sont alignés.

*Solution de l'exercice 74*

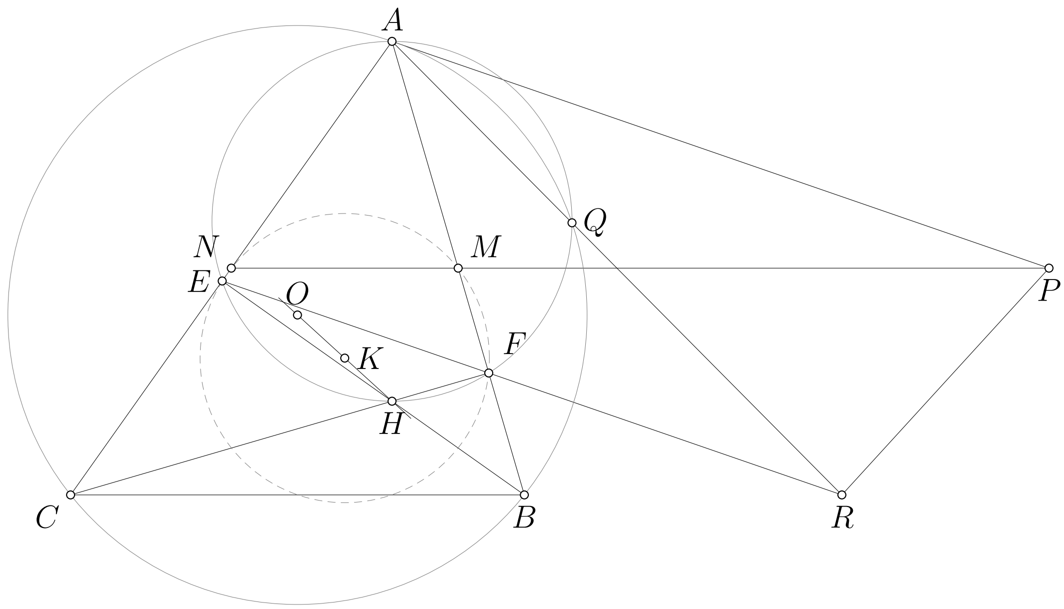



Il suffit de montrer que le point $H$ est sur l'axe radical des cercles $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$.

Soit $D$ le pied de la hauteur issue du sommet $B$ et $E$ le pied de la hauteur issue du sommet $C$. Le point $D$ appartient au cercle de diamètre $[NB]$ et le point $E$ appartient au cercle de diamètre $[CM]$. Puisque $\widehat{BEC} = 90° = \widehat{BDC}$, les points $B, E, D$ et $C$ sont cocycliques. On appelle $\omega$ ce cercle. La droite $(BD)$ est l'axe radical des cercles $\omega$ et $\Gamma_2$ et la droite $(CE)$ est l'axe radical des cercles $\omega$ et $\Gamma_1$. Le point $H$ d'intersection des droites $(BD)$ et $(CE)$ est donc le centre radical des cercles $\omega, \Gamma_1$ et $\Gamma_2$. Il appartient donc à l'axe radical des cercles $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$, à savoir la droite $(XY)$.

**Exercice 75.** (USA TSTST 2017 P1) Soit $ABC$ un triangle et $\Gamma$ son cercle circonscrit. Soit $O$ le centre du cercle $\Gamma$ et $H$ l'orthocentre du triangle $ABC$. Soient $M$ et $N$ les milieux des segments $[AB]$ et $[AC]$ respectivement. Soient $E$ et $F$ les pieds des hauteurs issues respectivement des sommets $B$ et $C$. Soit $P$ le point d'intersection de la droite $(MN)$ avec la tangente au cercle $\Gamma$ au point $A$. Soit $Q$ le second point d'intersection du cercle $\Gamma$ avec le cercle circonscrit au triangle $AEF$. Soit $R$ le point d'intersection des droites $(AQ)$ et $(EF)$. Montrer que les droites $(PR)$ et $(OH)$ sont perpendiculaires.

*Solution de l'exercice 75*




On demande de montrer que deux droites sont perpendiculaires, on peut donc par exemple chercher à montrer que la droite $(PR)$ est l'axe radical de deux cercles dont les centres sont sur la droite d'Euler $(OH)$ du triangle $ABC$.

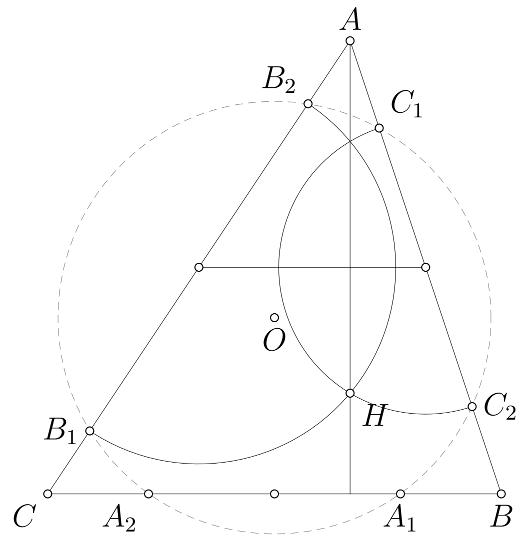
Puisque le cercle circonscrit au triangle $AMN$ est tangent au cercle $\Gamma$ au point $A$ (en tant qu'image de $\Gamma$ par l'homothétie de centre $A$ de rapport $\frac{1}{2}$), la droite $(AP)$ est tangente au cercle circonscrit au triangle $AMN$. Par puissance d'un point, on a $AP^2 = AM \cdot AN$. Donc le point $P$ a la même puissance par rapport au cercle $\Gamma$ que par rapport au cercle d'Euler du triangle $ABC$, dont le centre est le milieu $K$ du segment $[OH]$.

D'autre part, par puissance du point $R$, $RA \cdot RQ = RF \cdot RE$, donc le point $R$ a la même puissance par rapport au cercle $\Gamma$ et par rapport au cercle d'Euler du triangle $ABC$.

Donc la droite $(PR)$ est l'axe radical de ces deux cercles donc les droites $(OK)$ et $(PR)$ sont perpendiculaires, donc les droites $(OH)$ et $(PR)$ sont perpendiculaires.

**Exercice 76.** (IMO 2008 P1) Soit $ABC$ un triangle dont les angles aigus et soit $H$ son orthocentre. Le cercle passant par $H$ et dont le centre est le milieu du segment $[BC]$ coupe le segment $[BC]$ en les points $A_1$ et $A_2$. On définit de la même façon les points $B_1$ et $B_2$ et les points $C_1$ et $C_2$. Montrer que les points $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1$ et $C_2$ sont cocycliques.

<u>*Solution de l'exercice 76*</u>



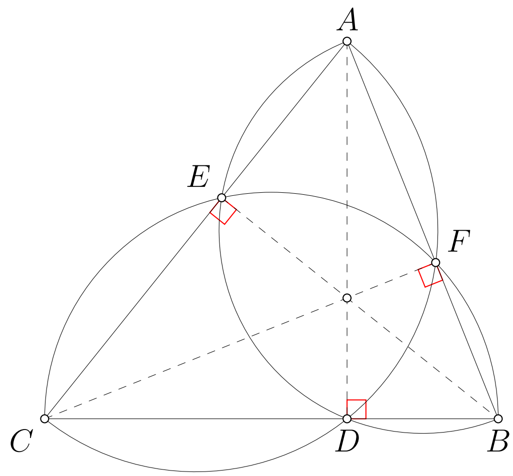

Le point clé est ici d'identifier le centre de ce cercle, qui n'est autre que le point $O$ qui est le centre du cercle circonscrit au triangle $ABC$. En effet, ce point appartient aux médiatrices des segments $[A_1A_2], [B_1B_2]$ et $[C_1C_2]$.

La droite $(AH)$ est perpendiculaire au segment reliant les milieux des segments $[AB]$ et $[AC]$ qui se trouvent être les centres des cercles de dimaètres respectifs $[B_1B_2]$ et $[C_1C_2]$. Comme le point $H$ appartient à l'axe radical de ces deux cercles, la droite $(AH)$ est l'axe radical de ces deux cercles. En particulier, $AB_1 \cdot AB_2 = AC_1 \cdot AC_2$ donc les points $B_1, B_2, C_1$ et $C_2$ sont cocycliques et le centre du cercle passant par ces quatre points est le point d'intersection des médiatrices des segments $[B_1B_2]$ et $[C_1C_2]$, c'est-à-dire $O$.

Ainsi, $OB_1 = OB_2 = OC_1 = OC_2$ et de même on trouve que $OB_1 = OB_2 = OA_1 = OA_2$ donc les six points appartiennent à un même cercle de centre $O$.

**Exercice 77.** ⋆ Montrer que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

*Solution de l'exercice 77*



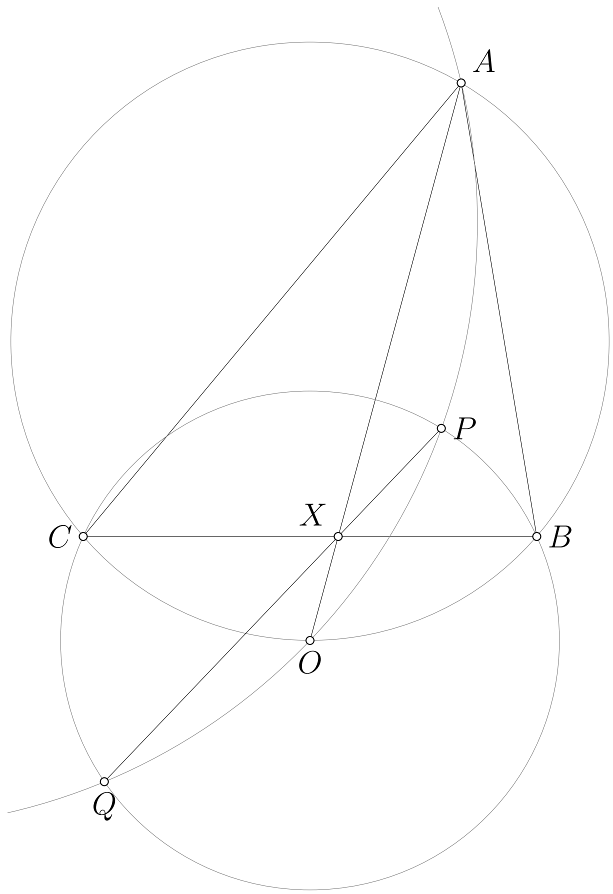

On note $D, E$ et $F$ les pieds des hauteurs issues des sommets $A, B$ et $C$. Puisque $\widehat{CEB} = 90° = \widehat{CFB}$, les quatre points $B, C, E$ et $F$ sont cocycliques.

De la même façon, les quatre points $A, E, D$ et $B$ sont cocycliques, de même que les quatre points $A, F, D$ et $C$ sont cocycliques.

Les axes radicaux des trois cercles $\mathcal{C}_{BCEF}, \mathcal{C}_{AEDB}$ et $\mathcal{C}_{AFDC}$ sont exactement les trois hauteurs du triangle $ABC$ et sont bien concourants.

**Exercice 78.** $^\star$ Soit $ABC$ un triangle, $\Gamma_1$ un cercle passant par $B$ et $C$ et dont le centre $O$ se trouve sur la bissectrice de $\widehat{BAC}$. Soit $\Gamma_2$ un cercle passant par $O$ et $A$ qui coupe $\Gamma_1$ en $P$ et $Q$. Soit $X$ le point d'intersection des droites $(PQ)$ et $(AO)$. Montrer que $X$ appartient à $[BC]$.

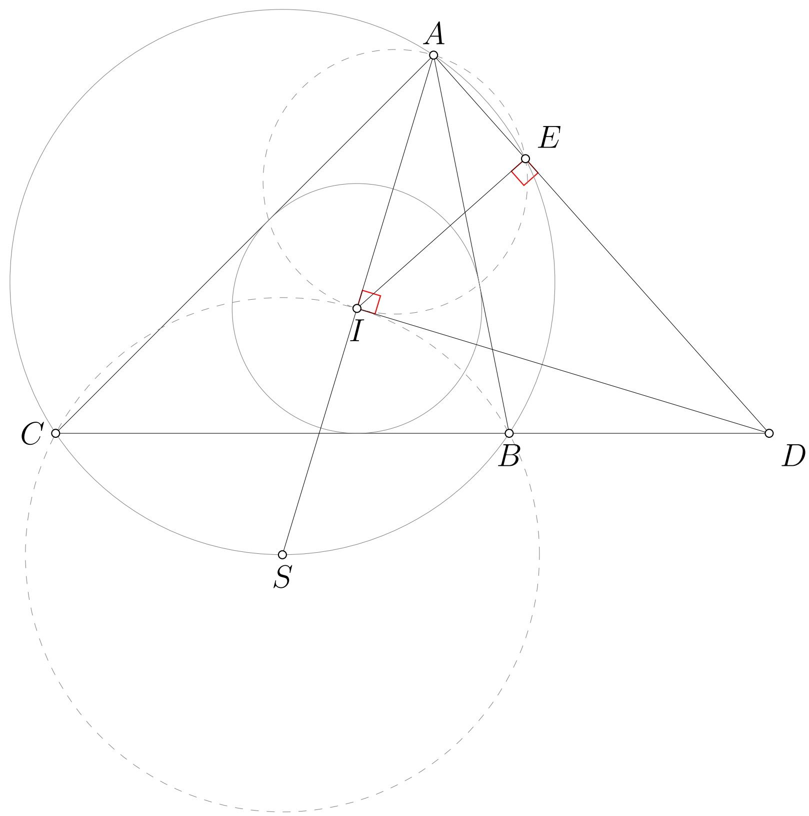
<u>*Solution de l'exercice 78*</u>




La définition du point $O$ interpelle, il s'agit du pôle sud du point $A$ dans le triangle $ABC$, il appartient donc à son cercle circonscrit. .
On dispose désormais de trois cercles, dont les axes radicaux sont les droites $(PQ), (BC)$ et $(AO)$, elles sont donc concourantes au point $X$ qui appartient donc au segment $[BC]$.

**Exercice 79.** (Envoi Géométrie 2022-2023 P14) Soit $ABC$ un triangle non isocèle en $A$ et $I$ le centre de son cercle inscrit. On note $D$ le point de la droite $(BC)$ tel que $\widehat{DIA} = 90°$. On note $E$ le pied de la hauteur issue de $I$ dans le triangle $ADI$. Montrer que le point $E$ est sur le cercle circonscrit du triangle $ABC$.

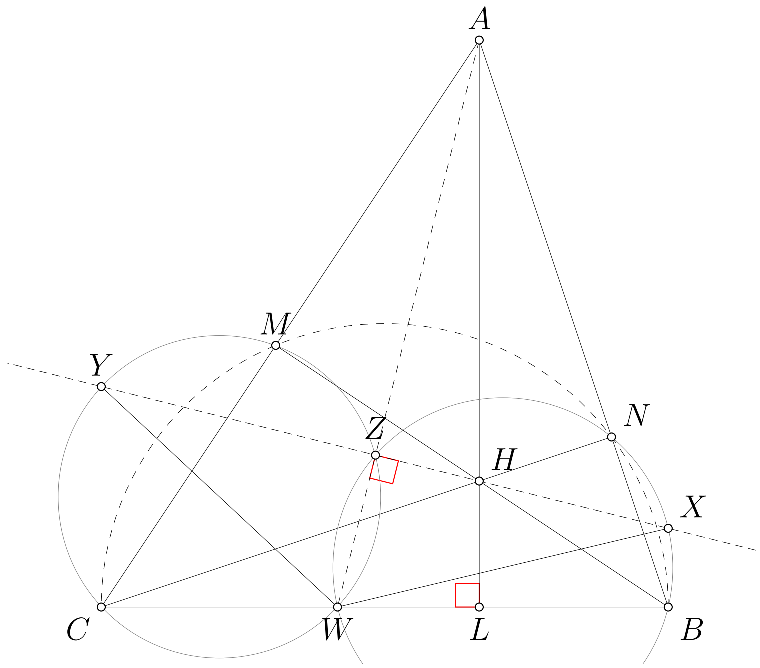
*Solution de l'exercice 79*




On introduit $\Omega$ le cercle circonscrit du triangle $ABC$ ainsi que $\omega$ le cercle antarctique de centre $S$, le milieu de l'arc $BC$ ne contenant pas $A$. $\omega$ passe ainsi par $B$, $C$ et $I$. On note de plus $\gamma$ le cercle de diamètre $[AI]$, ce cercle recoupe $\Omega$ en $A$ et $H$.
Regardons les axes radicaux des cercles $\omega$, $\Omega$ et $\gamma$. Comme les cercles $\gamma$ et $\Omega$ sont tangents (leurs centres se trouvent sur la bissectrice depuis $A$ dans le triangles $ABC$) leur axe radical est la droite perpendiculaire à $(AC)$ passant par $I$ soit la droite $(DI)$. Les deux autres axes radicaux sont $(BC)$ et $(AH)$. Comme les axes radicaux sont concourants, on a que la droite $(AH)$ passe par $D$, donc les points $A$, $H$ et $D$ sont alignés. Le cercle $\gamma$ a pour diamètre $[AI]$ donc on a $\widehat{AHI} = 90°$, ce qui montre que $H$ est le pied de la hauteur issue de $I$ dans le triangle $DAI$, soit $H = E$. Mais par définition $H$ est sur $\Omega$, ce qui conclut.

**Exercice 82.** (IMO 2013 P4) Soit $ABC$ un triangle dont tous les angles sont strictement inférieurs à 90 dégrés. Soit $W$ un point sur le segment $[BC]$. Soient $M$ et $N$ les pieds des hauteurs respectivement issues des sommets $B$ et $C$ et soit $H$ le point d'intersection des droites $(BM)$ et $(CN)$. Soit $\omega_1$ le cercle circonscrit au triangle $BWN$ et $X$ le point sur le cercle $\omega_1$ diamétralement opposé à $W$. De même $\omega_2$ est le cercle circonscrit à $CWM$ et $Y$ le point sur $\omega_2$ diamétralement opposé à $W$. Montrer que $X, Y, H$ sont alignés.

*Solution de l'exercice 82*




Il y a ici besoin d'une figure exacte pour pouvoir effectuer des conjectures.

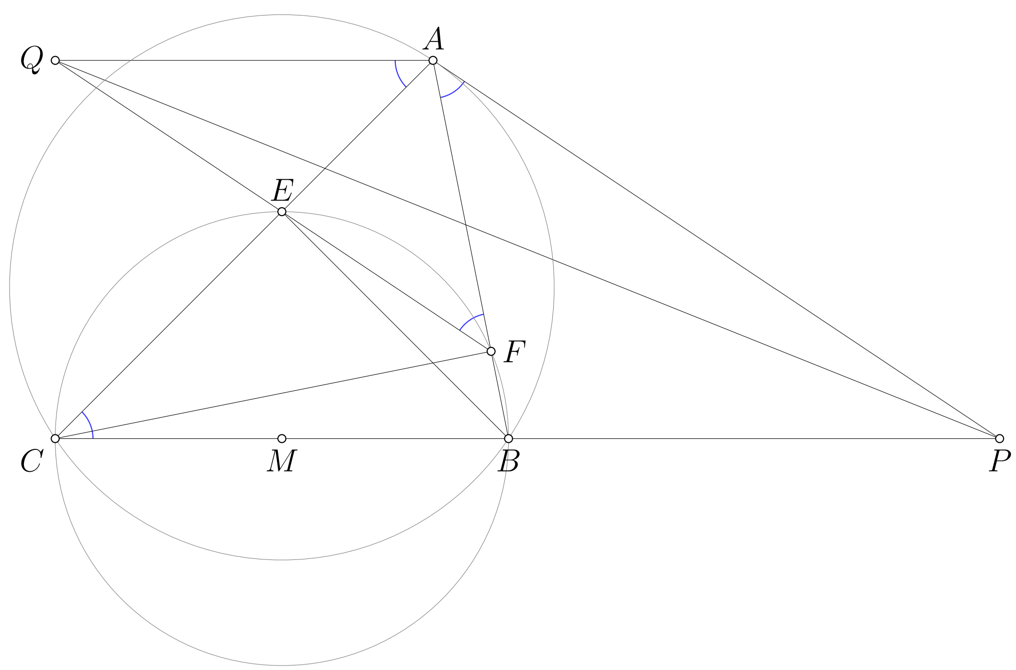
Soit $Z$ le second point d'intersection des cercles $\omega_1$ et $\omega_2$. Notons que puisque les segments $[WX]$ et $[WY]$ sont des diamètres des cercles $\omega_1$ et $\omega_2$ respectivement, $\widehat{YZW}+\widehat{XZW} = 90° + 90° = 180°$ donc les points $X, Z$ et $Y$ sont alignés. Il reste à montrer que par exemple les points $Z, H$ et $X$ sont alignés pour conclure.

Les points $M, N, B$ et $C$ sont cocycliques donc les droites $(WZ), (CM), (BN)$ sont les axes radicaux des cercles $\omega_1, \omega_2$ et $\mathcal{C}_{BCN}$. Elles sont donc concourantes au point $A$. Ainsi, les points $A, Z$ et $W$ sont alignés.

Soit $L$ le pied de la hauteur issue du sommet $A$. Les points $N, H, L$ et $B$ sont cocycliques donc par puissance d'un point, $AH \cdot AL = AN \cdot AB = AZ \cdot AW$. D'après la réciproque de la puissance d'un point par rapport à un cercle, cela signifie que les points $W, Z, H$ et $L$ sont cocycliques. Ainsi, $\widehat{WZH} = 180° - \widehat{HLW} = 90°$. On a donc $\widehat{WZH} = 90° = \widehat{WZX}$ donc les points $Z, H$ et $X$ sont alignés comme désiré, ainsi que les points $X, Y$ et $H$.

**Exercice 84.** (Suisse TST 2019 P6) Soit $ABC$ un triangle et $\Gamma$ sont cercle circonscrit. La tangente au cercle $\Gamma$ au point $A$ coupe la droite $(BC)$ en un point $P$. Soient $E$ et $F$ les pieds des hauteurs issues des sommets $B$ et $C$ respectivement. Soit $Q$ le point d'intersection de la droite $(EF)$ avec la parallèle à la droite $(BC)$ passant par le point $A$. Soit $M$ le milieu du segment $[BC]$. Montrer que les droites $(AM)$ et $(PQ)$ sont perpendiculaires.

*Solution de l'exercice 84*




Puisque $\widehat{CEB} = \widehat{CFB} = 90°$, les points $B, C, E$ et $F$ sont cocycliques. Par chasse aux angles, il vient :

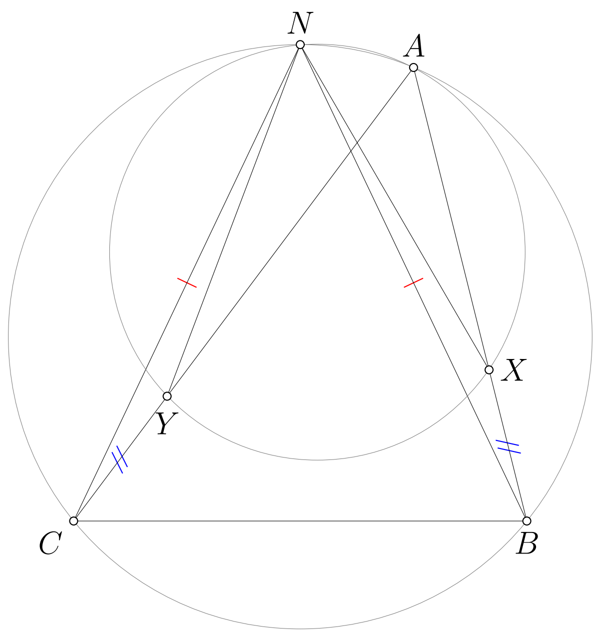
$$\widehat{QAE} = \widehat{QAC} = \widehat{ACB} = \widehat{EFA}$$

donc la droite $(AQ)$ est tangente au cercle circonscrit au triangle $AEF$. On a donc $QA^2 = QE \cdot QF$ par puissance d'un point. Donc le point $Q$ est sur l'axe radical du cercle de centre $M$ passant par le point $B$ et du cercle de rayon nul et de centre $A$. Par ailleurs on a aussi $PA^2 = PB \cdot PC$. Donc le point $P$ est aussi sur cet axe radical. La droite $(PQ)$ est donc perpendiculaire au segment joignant les centres des deux cercles, à savoir le segment $[AM]$.

## Les similitudes

**Exercice 87.** Soit $ABC$ un triangle et $N$ le pôle Nord du sommet $A$. Un cercle passant par les points $A$ et $N$ coupe les segments $[AB]$ et $[AC]$ en $X$ et $Y$ respectivement. Montrer que $XB = YC$.

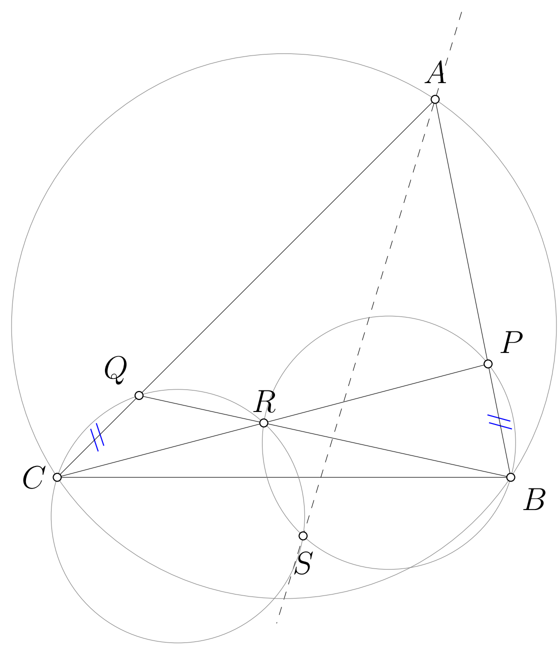
*Solution de l'exercice 87*




Le point $N$ est le centre de la similitude envoyant les points $X$ et $Y$ sur les points $B$ et $C$. Les triangles $NXB$ et $NYC$ sont donc semblables. Puisque $NB = NC$, ces triangles sont en fait isométriques et $XB = YC$.

**Exercice 88.** (Polish MO 2017 Finals Day 1 P1) Soit $ABC$ un triangles et soient $P$ et $Q$ des points respectivement sur les segments $[AB]$ et $[AC]$ tels que $BP = CQ$. Les droites $(BQ)$ et $(CP)$ se coupent au point $R$. Les cercles circonscrits aux triangles $BPR$ et $CQR$ se recoupent au point $S$. Montrer que le point $S$ appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

<u>*Solution de l'exercice 88*</u>




Le point $S$ est le centre de la similitude envoyant les points $B$ et $P$ sur les points $Q$ et $C$. Les triangles $BSP$ et $QSC$ sont donc semblables. Puisque $PB = QC$, les triangles sont en fait isométriques et $SB = SQ$.

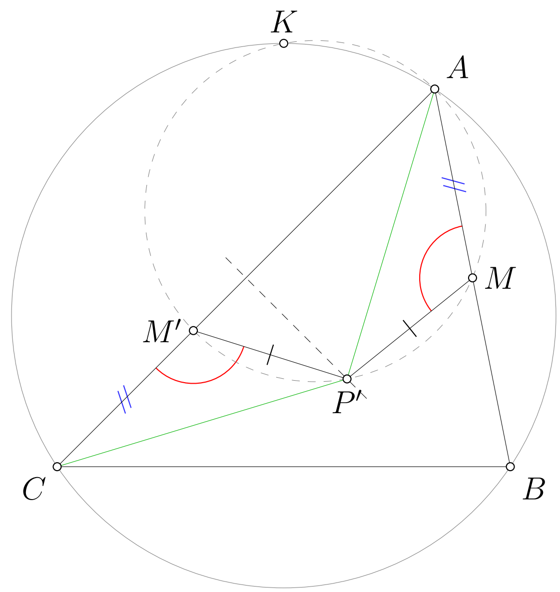
On a de plus

$$\widehat{QSB} = \widehat{QSR} + \widehat{RSB} = \widehat{RCQ} + \widehat{RPA} = 180° - \widehat{QAB}$$

donc les points $A, B, S$ et $Q$ sont cocycliques. Le point $S$ est alors le pôle Sud du sommet $A$ dans le triangle $AQB$, le point $S$ appartient donc à la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

**Exercice 89.** (Caucase MO 2020 Senior P7) Soit $ABC$ un triangle non isocèle en $A$ et soit $K$ le milieu de l'arc $BC$ contenant le point $A$. Soit $M$ le milieu du segment $[AB]$. La médiatrice du segment $[AC]$ coupe la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ au point $P$. Montrer que les points $A, M, K$ et $P$ sont cocycliques.

*Solution de l'exercice 89*




Soit $M'$ le second point d'intersection du cercle circonscrit au triangle $AMK$ avec le segment $[AC]$. Le point $K$ est le centre de la similitude envoyant les points $M$ et $M'$ sur les points $B$ et $C$. Les triangles $KMB$ et $KM'C$ sont donc semblables et puisque $KB = KC$, ils sont isométriques et $M'C = MB = MA$.

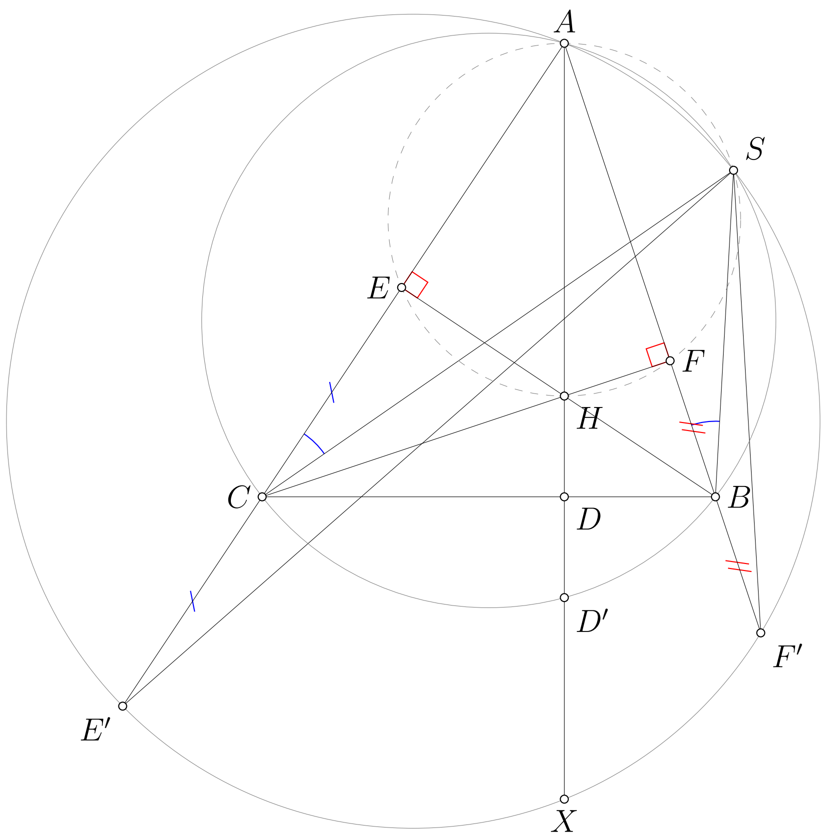
Soit désormais $P'$ le second point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ avec le cercle $\mathcal{C}_{KAMM'}$, de sorte que l'on souhaite montrer que $P = P'$.

$P'$ est le pôle Sud du sommet $A$ dans le triangle $AMM'$ donc $P'M = P'M'$. De plus $\widehat{P'M'C} = 180° - \widehat{P'M'A} = \widehat{P'MA}$ d'après le théorème de l'angle inscrit. Ainsi, les triangles $P'MA$ et $P'M'C$ vérifient $P'M = P'M'$, $AM = M'C$ et $\widehat{P'MA} = \widehat{P'M'C}$. Ils sont donc isométriques et $P'A = P'C$.

Le point $P'$ est donc le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ avec la médiatrice du segment $[AC]$. Donc $P' = P$ et $P$ est sur le cercle $\mathcal{C}_{KAMM'}$.

**Exercice 90.** (Envoi géométrie 2020/2021 Exo 15) Soit $ABC$ un triangle. On note $H$ son orthocentre et $D$, $E$ et $F$ les pieds des hauteurs issues des sommets $A, B$ et $C$. On note $F'$ le symétrique du point $F$ par rapport au point $B$ et on note $E'$ le symétrique du point $E$ par rapport au point $C$. On note $X$ le second point d'intersection du cercle circonscrit au triangle $AF'E'$ avec la droite $(AD)$. Montrer que $HX = 4 \times HD$.

<u>*Solution de l'exercice 90*</u>




On note $\Gamma$ le cercle circonscrit au triangle $ABC$ et $\gamma$ le cercle circonscrit au triangle $AE'F'$.

Tout d'abord, on sait que la droite $(AD)$ contient un point intéressant : le symétrique de l'orthocentre par rapport au point $D$. On le note $D'$. Une des propriétés du point $D'$ est qu'il appartient au cercle circonscrit au triangle $ABC$. L'énoncé devient alors de montrer que $HX = 4HD = 2HD'$ ou encore que $D'X = D'H$. On sait donc qu'introduire le point $D'$ est une bonne idée puisqu'il permet de simplifier l'énoncé.
Une autre propriété commune de l'orthocentre est que les points $A, E, H$ et $F$ sont cocycliques, car $\widehat{AEH} = 90° = \widehat{AFH}$. On note $\omega$ le cercle passant par ces quatre points.

On remarque alors le lien avec les autres points : le point $E'$ est sur le cercle $\gamma$ et vérifie $E'C = CE$, avec $C$ sur le cercle $\Gamma$ et $E$ sur le cercle $\omega$. Le point $F'$ est sur le cercle $\gamma$ et vérifie $F'B = BF$, avec $B$ sur le cercle $\Gamma$ et $F$ sur le cercle $\omega$. Et on nous demande de montrer que $HD' = D'X$ avec $X$ sur le cercle $\gamma$, $D'$ sur le cercle $\Gamma$ et $H$ sur le cercle $\omega$.
En traçant ces trois cercles, on s'aperçoit qu'ils passent tous les trois par deux points. Ceci nous invite à considérer l'exercice en terme de similitude.

Soit $S$ le second point d'intersection des cercles $\Gamma$ et $\omega$. Admettons dans un premier temps que le point $S$ appartienne au cercle $\gamma$. Le point $S$ est donc le centre de la similitude envoyant les points

$F, H$ et $E$ sur les points $B, D'$ et $C$. Il est également le centre de la similitude qui envoie les points $B, D'$ et $C$ sur les points $F', X$ et $E'$. On a donc les égalités de rapport :

$$\frac{D'X}{BF'} = \frac{SD'}{SB} = \frac{DD'}{BF}$$

dues au fait que les triangles $SBF'$ et $SD'X$ sont semblables et que les triangles $SFB$ et $SHD'$ sont semblables.
Ainsi, $\frac{DD'}{D'X} = \frac{BF}{BF'} = 1$ ce qui donne le résultat désiré.

Montrons à présent que le point $S$ appartient au cercle $\gamma$. Pour cela, il suffit de montrer qu'il est le centre de la similitude envoyant les points $B$ et $C$ sur les points $F'$ et $E'$. Pour cela, il suffit de montrer que les triangles $SBF'$ et $SCE'$ sont semblables, ou encore que $\frac{SC}{SB} = \frac{CE'}{BF'}$ et que $\widehat{E'CS} = \widehat{F'BS}$.
Or le point $S$ est le centre de la similitude envoyant les points $E$ et $F$ sur les points $C$ et $B$ donc les triangles $SBF$ et $SCE$ sont semblables, si bien que

$$\frac{SC}{SB} = \frac{CE}{BF} = \frac{CE'}{BF'}$$

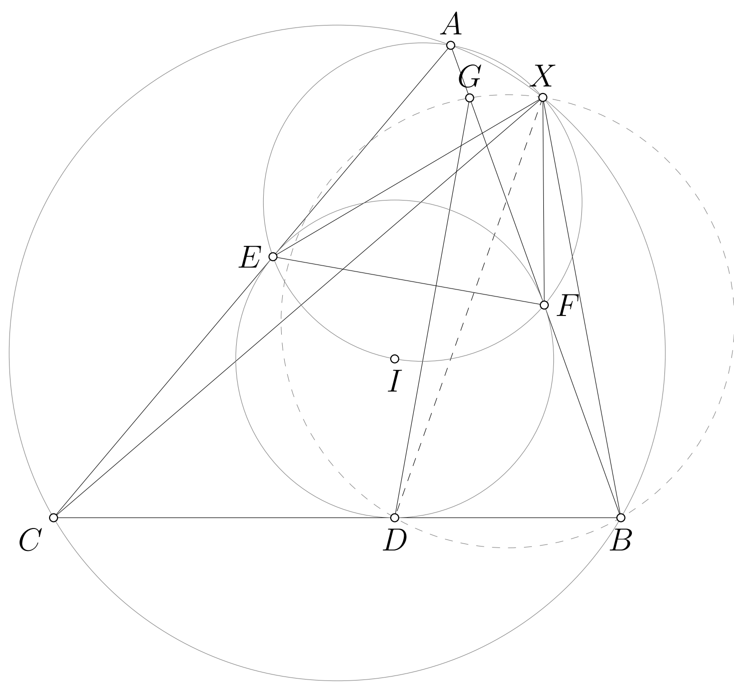
et

$$\widehat{E'CS} = 180° - \widehat{ECS} = 180° - \widehat{FBS} = \widehat{F'BS}$$

ce qui nous permet de conclure.

**Exercice 91.** (Olympiade Francophone de Mathématiques 2020) Soit $ABC$ un triangle aux angles aigus tel que $AB < AC$. Soit $D, E$ et $F$ les points de contact respectifs du cercle inscrit au triangle $ABC$ avec les côtés $[BC], [CA]$ et $[AB]$. La droite perpendiculaire au semgent $[EF]$ passant par le point $D$ recoupe le segment $[AB]$ en un point $G$. Le cercle circonscrit au triangle $AEF$ recoupe le cercle circonscrit au triangle $ABC$ au point $X$. Montrer que les points $X, G, D$ et $B$ sont cocycliques.

<u>*Solution de l'exercice 91*</u>




Le point $X$ est par définition le centre de la similitude envoyant les points $E$ et $F$ sur les points $B$ et $C$. On a donc :

$$\frac{XB}{XC} = \frac{FB}{EC} = \frac{DB}{DC}$$

et donc d'après le théorème de la bissectrice, le point $D$ est le pied de la bissectrice issue du sommet $X$ dans le triangle $XBC$.
On a donc

$$\widehat{DXB} = \frac{1}{2}\widehat{BXC} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$$

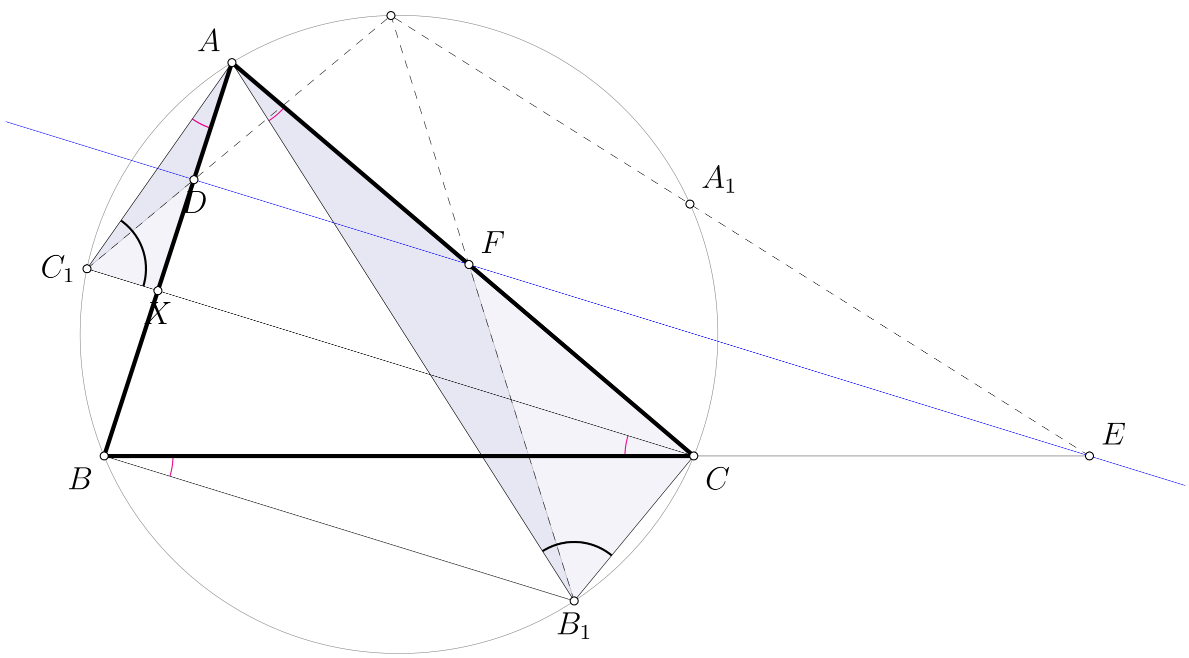
Les droites $(AI)$ et $(GD)$ sont parallèles, on a donc

$$\widehat{DXB} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = \widehat{IAF} = \widehat{DGB}$$

ce qui donne le résultat voulu.

**Exercice 92.** (Balkan MO 2006) Soit $ABC$ un triangle. Soit $d$ une droite qui intersecte les segments $[AB]$ et $[AC]$ en des points $D$ et $F$ respectivement et qui intersecte la droite $(BC)$ en un point $E$ tel que $C$ soit situé entre les points $B$ et $E$. Les droites parallèles à la droite $d$ passant par les points $A, B$ et $C$ recoupent chacune le cercle circonscrit au triangle $ABC$ respectivement en les points $A_1, B_1$ et $C_1$. Montrer que les droites $(A_1E), (B_1F)$ et $(C_1D)$ sont concourantes.

<u>*Solution de l'exercice 92*</u>




Nous allons montrer que les droites $(A_1E), (B_1F)$ et $(C_1D)$ s'intersectent sur le cercle circonscrit de $ABC$.
Prouvons d'abord que $(C_1D)$ et $(B_1F)$ s'intersectent sur ledit cercle. Soit $X$ le point d'intersection de $(C_1C)$ avec $(AB)$. D'après le théorème de l'angle inscrit et en utilisant que les droite $(BB_1)$ et $(CC_1)$ sont parallèles,

$$\widehat{C_1AX} = \widehat{C_1CB} = \widehat{CBB_1} = \widehat{CAB_1}$$

et

$$\widehat{AC_1X} = \widehat{AC_1C} = \widehat{AB_1C}.$$

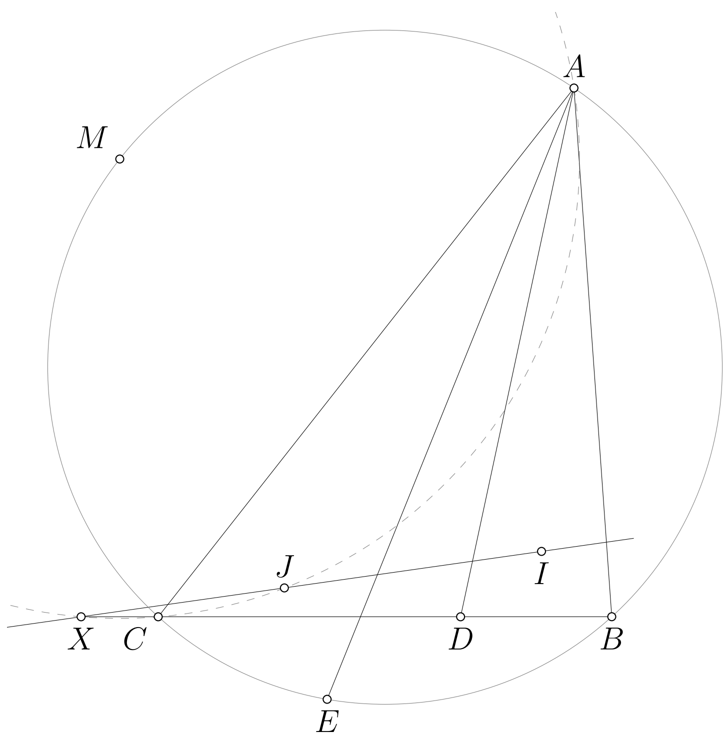
Donc les triangles $AC_1X$ et $AB_1C$ sont semblables. De plus, comme $(DF) \parallel (C_1C)$, d'après le théorème de Thalès,

$$\frac{AD}{AX} = \frac{AF}{AC}.$$

Par conséquent, les quadrilatères $ADXC_1$ et $AFCB_1$ sont semblables, et en particulier $ADC_1$ est semblable à $AFB_1$.
Donc, $A$ est le centre de la similitude qui envoie $[B_1F]$ sur $[C_1D]$. Alors, le point d'intersection de $(B_1F)$ et $(C_1D)$, $A, C_1$ et $B_1$ sont cocycliques, ce qui montre que $(C_1D)$ et $(B_1F)$ s'intersecte sur le cercle circonscrit de $ABC$.
On montre de manière similaire qu'il en est de même pour la paire de droites $(A_1E)$ et $(B_1F)$, et le point de concours est donc le même que pour la paire de droites $(C_1D)$ et $(B_1F)$.
Ainsi, les droites $(A_1E), (B_1F)$ et $(C_1D)$ sont concourantes.

**Exercice 93.** (Cyberspace Math Conmpetition 2020 P3) Soit $ABC$ un triangle avec $AB > BC$ et $D$ un point variable sur le segment $[BC]$. Soit $E$ le point de l'arc $BC$ ne contenant pas le point $A$ tel que $\widehat{BAE} = \widehat{DAC}$. Soit $I$ le centre du cercle circonscrit au triangle $ABD$ et $J$ celui du cercle inscrit au triangle $ACE$. Montrer que lorsque le point $D$ varie, la droite $(IJ)$ passe par un point fixe.

<u>*Solution de l'exercice 93*</u>




Deux bonnes figures suffisent à deviner que le point fixe est le point d'intersection de la droite $(IJ)$ et de la droite $(BC)$. La présence de centres de cercle inscrits de triangles inscrits dans un même cercle invite à considérer $M$ le pôle Sud du sommet $B$ et son cercle antartic, qui, sur une bonne figure, passe par le point d'intersection.

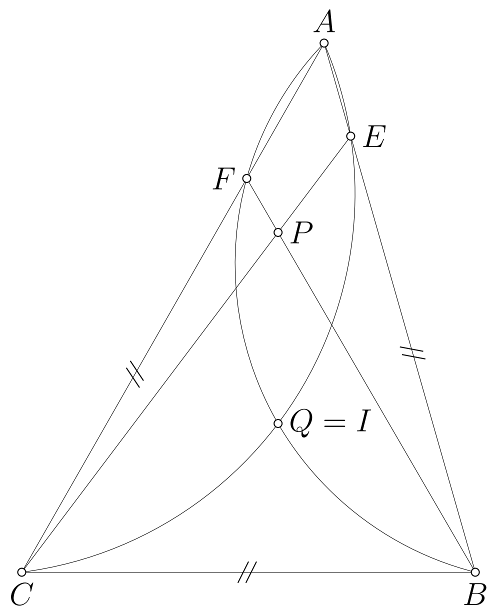
Nous nous contentons donc de montrer que le point $X$ d'intersection des droites $(IJ)$ et $(BC)$ appartient au cercle antartic du point $B$, ce qui montrera qu'il ne dépend pas du point $D$.
Puisque les triangles $ACE$ et $ADB$ sont semblables, on a $\frac{AI}{AD} = \frac{AJ}{AC}$ et on a

$$\widehat{JAI} = \widehat{ABC} - \widehat{IAB} - \widehat{JAC} = \widehat{ABC} - 2\widehat{IAB} = \widehat{ABC} - \widehat{DAB} = \widehat{CAD}$$

donc les triangles $AIJ$ et $ADC$ sont semblables. $A$ est donc le centre de la similitude envoyant la paire de points $(I, J)$ sur la paire de points $(D, C)$. Le point $X$ appartient donc aux cercles circonscrits aux triangles $AJC$ et $AID$ et donc en particulier au cercle antartic du sommet $B$ ($J$ appartient à ce cercle).

**Exercice 98.** (Japan MO 2020 P2) Soit $ABC$ un triangle tel que $BC < AB$ et $BC < AC$. Soient $E$ et $F$ des points appartenant respectivement aux segments $[AB]$ et $[AC]$ tels que $BE = BC = CF$. Les droites $(BF)$ et $(CE)$ se coupent en un point $P$. Les cercles circonscrits aux triangles $ABF$ et $ACE$ se recoupent en un point $Q$. Montrer que la droite $(PQ)$ est perpendiculaire au segment $[BC]$

<u>*Solution de l'exercice 98*</u>



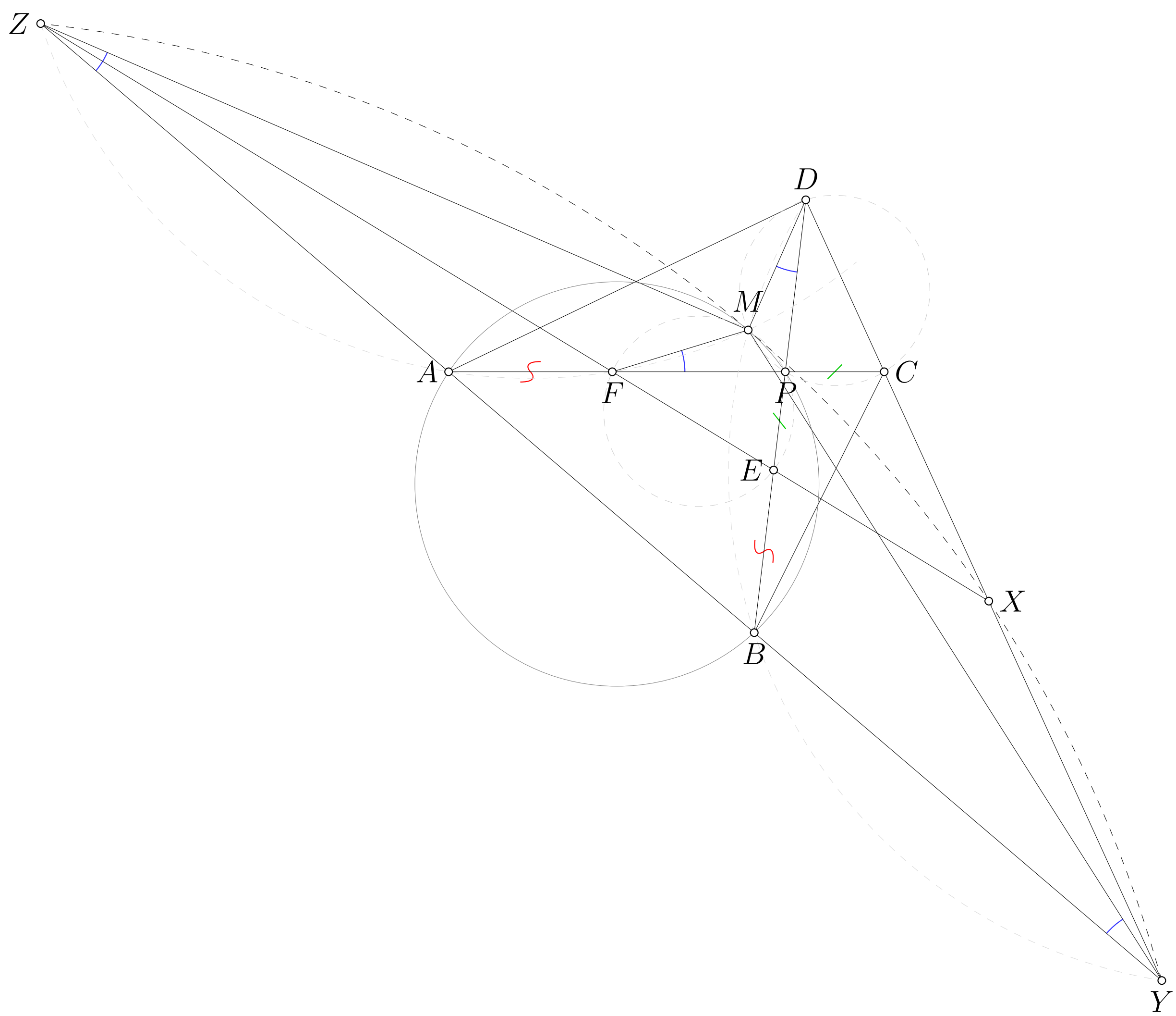

Le point clé est que le point $Q$ est en fait le centre du cercle inscrit du triangle $ABC$. En effet, soit $I$ le centre du cercle inscrit du triangle $ABC$. Alors le point $I$ est sur la bissectrice de l'angle $\widehat{ACB}$ et le triangle $FCB$ est isocèle en $C$ donc le point $Q$ est sur la médiatrice du segment $[BF]$. Le point $I$ est sur la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ donc par le théorème du pôle Sud, le point $I$ appartient au cercle circonscrit au triangle $AFB$. De même il appartient au cercle circonscrit au triangle $AEC$ donc $I = Q$. Notons aussi que le point $Q$ est le point de Miquel du quadrilatère $AEBPCF$ donc il appartient aux cercles circonscrit aux triangles $CPF$ et $BEP$.
Il ne reste plus qu'à faire une chasse aux angles :

$$\widehat{QPC} = \widehat{QFC} = 180° - \widehat{QFA} = \widehat{QBA} = \widehat{ABC}/2$$

et $\widehat{PCB} = 90° - \widehat{ABC}/2$ ce qui donne bien la perpendicularité.

**Exercice 99.** (MEMO par équipe 2022 P1 ) Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe tel que $AC = BD$ et tel que les côtés $AB$ et $CD$ ne sont pas parallèles. Soit $P$ le point d'intersection des diagonales $(AC)$ et $(BD)$. Soient $E$ et $F$ des points respectivement sur les segments $[BP]$ et $[AP]$ tels que $PC = PE$ et $PD = PF$. Montrer que le cercle circonscrit au triangle formé par les droites $(AB)$, $(CD)$ et $(EF)$ est tangent au cercle circonscrit au triangle $ABP$.

<u>*Solution de l'exercice 99*</u>




On note dans un premier temps $X$ l'intersection des droites $(CD)$ et $(FE)$, $Y$ l'intersection des droites $(AB)$ et $(CD)$ ainsi que $Z$ l'intersection des droites $(AB)$ et $(FE)$.

La première idée de cet exercice est de considérer un point de Miquel (pour savoir ce qu'est un point de Miquel on fait référence au polycopié de T. Budzinski, *Transformations Géométriques*, Théorème 4.14), que l'on notera $M$ et qui intervient naturellement dans la configuration. En effet, les triangles plats $AFC$ et $BED$ sont isométriques. Ainsi si on considère la similitude directe qui envoie le segment $[AF]$ sur le segment $[EB]$ il s'agit d'une rotation (comme $AF/EB = 1$) et cette rotation envoie donc également le point $C$ sur le point $D$. Comme annoncé, on note $M$ le centre de la rotation (le point de Miquel). $M$ est donc le point de Miquel des quadrilatères complets suivants : $ABFE$, $ABCD$ et $FECD$. En principe l'ordre des points importe comme il y a 3 classes d'ordre pour 4 mêmes points qui donnent 3 points de Miquel différents pour les distinguer on adopte ici les notations du Théorème 4.14 cité précédemment.

Le point $M$ est donc sur les cercles circonscrits de plein de triangles et en particulier sur le cercle circonscrit des $ABP$, $ZAF$ et $BDY$, c'est donc un bon candidat pour être notre point de tangence. Dans la suite on va donc montrer que $M$ est également sur le cercle circonscrit au triangle $XYZ$ et que c'est le point de tangence entre les cercles circonscrits des triangles $XYZ$ et $ABP$.
On remarque maintenant que le quadrilatère $DCEF$ est un trapèze isocèle avec $(CE)//(DF)$. $M$ étant le point d'intersection des cercles circonscrits à $PFE$ et $PCD$ autre que $P$, on en déduit que $M$ est sur l'axe de symétrie du trapèze $FDCE$. $M$ est donc sur la bissectrice extérieure issue de $P$ dans les triangles $PFE$ et $PCD$, en particulier $M$ est le pôle Nord de ces triangles. Par les propriétés classique du point de Miquel, $M$ est également le centre de la similitude directe qui envoie $F$ sur $A$ et $E$ sur $B$. Donc $MFE \sim MAB$, en particulier $MA = MB$ et $M$ est alors le pôle Nord dans le triangle $ABP$.

Pour conclure il suffit de montrer que $M$ est le pôle Nord dans le triangle $XYZ$. On montre dans un premier temps que cet assertion implique bien la fin de l'exercice.
Si $M$ est le pôle Nord du triangle $XYZ$, alors il est bien sur le cercle circonscrit de ce triangle. Soit $t$ (resp. $t'$) la tangente au cercle circonscrit de $ABP$ (resp. $XYZ$) en $M$. On voudrait montrer que $t$ et $t'$ sont la même droite. Comme $M$ est le pôle Nord, on a $t//(AB)$. Mais de la même manière $t'//(ZY)$. Ce qui montre bien que $t//t'$ et donc qu'il s'agit de la même droite.

Pour conclure on va montrer que $M$ est sur la médiatrice du segment $[ZY]$. Comme $M$ est sur la bissectrice extérieure issue de $X$ (car $M$ est sur la mdiatrice commune de $(DF)$ et $(EC)$ et les droites $(EF)$ et $(DC)$ se coupent en $X$), cela conclurait bien. Il suffit donc de montrer que $(MZ, MA) = (MB, MY)$. Or on a plein de cocyclicités qui apparaissent avec le point de Miquel et le trapèze $DFEC$.

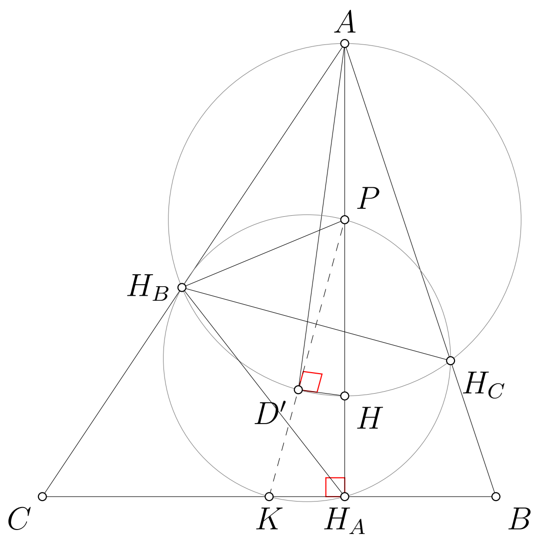
$$\begin{aligned}
(MZ, MA) &= (FZ, FA) && (ZAFM \text{ cyclique}) \\
&= (FE, FC) && (\text{angles opposés}) \\
&= (DE, DC) && (FECD \text{ cyclique}) \\
&= (MB, MY) && (MBYD \text{ cyclique}).
\end{aligned}$$

Ce qui conclut.

## L'orthocentre

**Exercice 109.** (Estonie TST 2015) Soit $ABC$ un triangle et $H$ son orthocentre. Soient $K$ et $P$ les milieux des segments $[BC]$ et $[AH]$, respectivement. La bissectrice intérieure issue de $A$ dans le triangle $ABC$ coupe la droite $(KP)$ en $D$. Prouver que $\widehat{ADH} = 90°$.

<u>*Solution de l'exercice 109*</u>




La condition d'angle revient à montrer que le point $D$ appartient au cercle de diamètre $[AH]$.
On s'est ramené à montrer que deux droites se coupent sur un cercle. On va donc appliquer la méthode et plutôt montrer que le point d'intersection d'une droite et d'un cercle appartient à la deuxième droite.

Soit $D'$ le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ avec le cercle de diamètre $[AH]$. Montrons que $P, D'$ et $K$ sont alignés.

Soient $H_A, H_B$ et $H_C$ les pieds des hauteurs issues des sommets $A, B$ et $C$. Les points $H_B$ et $H_C$ appartiennent également au cercle de diamètre $[AH]$. De plus, les points $H_A, P, H_C, K$ et $H_B$ sont sur le cercle d'Euler.

Pour montrer que $K, D'$ et $P$ sont alignés, on montre que $\widehat{DPH} = \widehat{KPH_A}$.

D'une part, d'après le théorème de l'angle au centre :

$$\widehat{D'PH} = 2\widehat{DAH} = 2\left(\frac{1}{2}\widehat{BAC} - \widehat{HAB}\right) = \alpha - 180° + 2\beta = \beta - \gamma$$

D'autre part, puisque le triangle $PKH_A$ est rectangle :

$$\widehat{KPH_A} = 90° - \widehat{PKH_A} = 90° - \widehat{PH_BH_A} = 90° - (180° - \widehat{H_AH_BC} - \widehat{PH_BA})$$

Or, les triangles $H_AH_BC$ et $BAC$ sont semblables, de sorte que $\widehat{CH_AH_B} = \beta$. De plus, d'après le théorème de l'angle au centre,

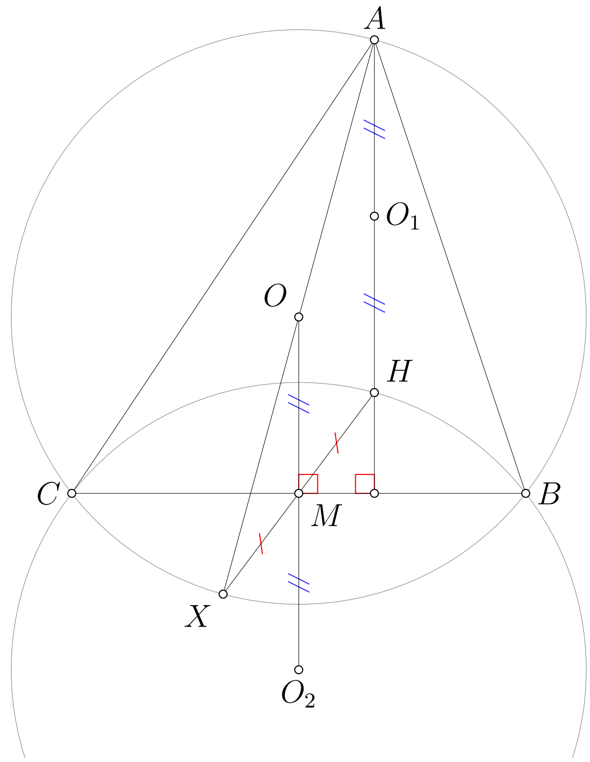
$$\widehat{PH_BA} = 90° - \frac{1}{2}\widehat{H_BPA} = 90° - \widehat{AH_CH_B} = 90° - \gamma$$

où la dernière égalité utilise que les triangles $AH_BH_C$ et $ACB$ sont semblables. Ainsi,

$$\widehat{KPH_A} = -90° + \beta + 90° - \gamma = \beta - \gamma$$

ce qui donne bien l'égalité voulue et $D' = D$.

**Exercice 110.** (JBMO SL 2014 G4) Soit $ABC$ un triangle acutangle non isocèle en $A$. Soit $M$ le milieu du segment $[BC]$, $H$ l'orthocentre du triangle $ABC$, $O_1$ le milieu du segment $[AH]$ et $O_2$ le centre du cercle circonscrit au triangle $CBH$. Montrer que le quadrilatère $O_1AMO_2$ est un parallélogramme.




_Solution de l'exercice 110_ Soit $O$ le centre du cercle circonscrit au triangle $ABC$. On remarque déjà que $O_2$ est sur la médiatrice de $[BC]$ donc les droites $(MO_2)$ et $(AH)$ sont parallèles car elles sont perpendiculaires à $(BC)$. Il suffit donc de montrer que $MO_2 = AO_1$.

Soit $X$ le symétrique du point $H$ par rapport au point $M$. On sait également que $X$ appartient au cercle $\mathcal{C}_{ABC}$ et qu'il est aligné avec les points $A$ et $O$. La symétrie de centre $M$ envoie $B$ sur $C$, $C$ sur $B$ et $H$ sur $X$ donc elle envoie le cercle circonscrit à $BCH$ sur le cercle circonscrit à $BCX$ donc elle envoie $O_2$ sur $O$. En particulier, $MO_2 = MO$.

Comme les points $O$ et $M$ sont les milieux respectifs des segments $[XA]$ et $[XH]$, d'après le théorème de Thalès,

$$\frac{OM}{AH} = \frac{XM}{XH} = \frac{1}{2}$$

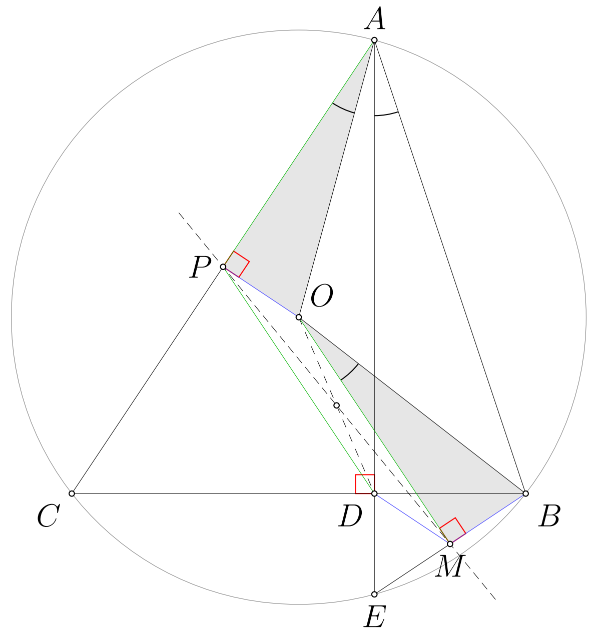
donc $AH = 2OM$ donc

$$MO_2 = MO = \frac{1}{2}AH = AO_1$$

ce qui conclut.

**Exercice 112.** (JBMO 2013) Soit $ABC$ un triangle tel que $AB < AC$ et soit $O$ le centre de son cercle circonscrit $k$. Soit $D$ un point du segment $[BC]$ tel que $\widehat{BAD} = \widehat{CAO}$. Soit $E$ le second point d'intersection du cercle $k$ avec la droite $(AD)$. Soient $M, N$ et $P$ les milieux respectifs des segments $[BE], [OD]$ et $[AC]$. Montrez que les points $M, N, P$ sont alignés.

_Solution de l'exercice 112_



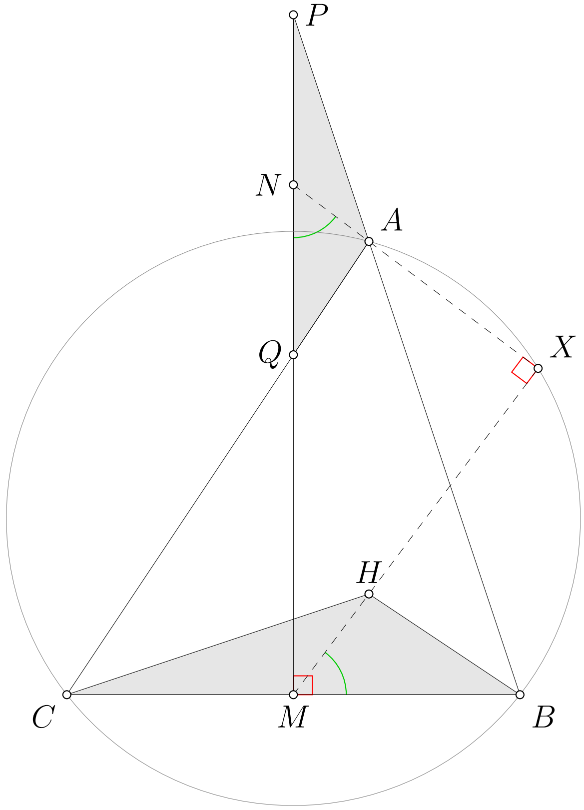

La première remarque est que la définition du point $D$ signifie que les droites $(AD)$ et $(AO)$ sont conjuguées isogonales. Comme on sait que la hauteur issue de $A$ et la droite $(AO)$ sont conjuguées isogonales, cela implique que $(AD)$ est la hauteur issue de $A$ dans le triangle $ABC$. On s'empresse de l'indiquer sur la figure.

L'idée principale est de démontrer un résultat plus fort, à savoir que $MODP$ est un parallèlogramme, ce qui permet alors de conclure.

Les triangles $OMB$ et $POA$ sont tous les deux rectangles et $OA = OB$. Il suffit de montrer que $\widehat{MOB} = \widehat{PAO}$ pour avoir que les deux triangles sont isométriques. Or $EOB$ est isocèle donc $\widehat{MOB} = \frac{1}{2}\widehat{BOE} = \widehat{DAB} = \widehat{PAO}$. Les triangles sont donc isométriques et $AP = OM$ et $OP = MB$. Puisque $D$ est le pied de la hauteur issue de $A$, les triangles $EDB$ et $CDA$ sont rectangles et $DM = MB = OP$ et $DP = PA = OM$. Donc le quadrilatère $DPOM$ a les côtés opposés égaux deux à deux, c'est un parallélogramme. Donc les diagonales se coupent en leur milieu et $P, N, M$ sont alignés.

**Exercice 115.** (JBMO 2019) Soit $ABC$ un triangle tel que $AB < AC$. La médiatrice du segment $[BC]$ coupe les droites $(AB)$ et $(AC)$ respectivement aux points $P$ et $Q$. Soit $H$ l'orthocentre du triangle $ABC$ et soient $M$ et $N$ les milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[PQ]$. Montrer que les droites $(HM)$ et $(AN)$ se coupent sur le cercle circonscrit au triangle $ABC$.

<u>*Solution de l'exercice 115*</u>




Soit $X$ le point d'intersection des droites $(AN)$ et $(MH)$. Puisqu'il s'agit de montrer que $X$ est sur le cercle $\mathcal{C}_{ABC}$, on identifie que $X$ doit être le point particulier dont on a parlé dans cette sous-partie. Cette information permet de guider notre réflexion.

Notons que

$$\widehat{PQA} = \widehat{CQM} = 90° - \widehat{ACB} = \widehat{HBC}$$

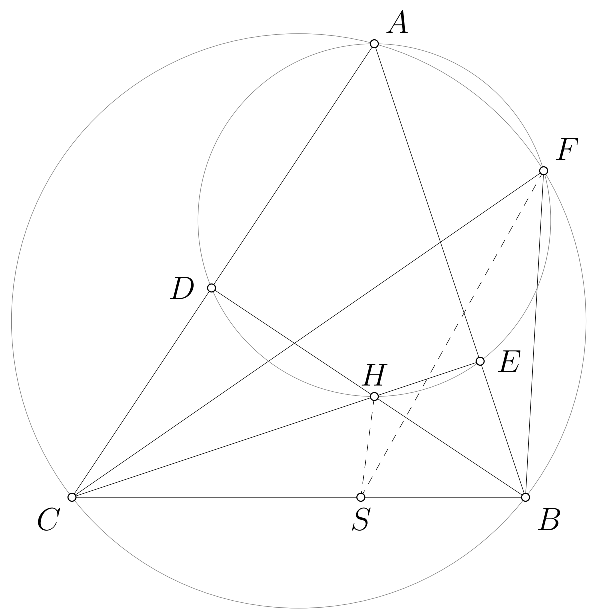
et de même $\widehat{QPA} = \widehat{HCB}$. Ainsi, les triangles $PAQ$ et $CHB$ sont semblables. Puisque $M$ et $N$ sont les milieux des segments $[BC]$ et $[PQ]$, on déduit que $\widehat{ANQ} = \widehat{HMB}$. Mais alors dans le triangle $NXQ$ :

$$\widehat{AXH} = 180° - \widehat{ANQ} - \widehat{HMN} = 180° - \widehat{ANQ} - (90° - \widehat{HMB}) = 90°$$

Donc $X$ est le projeté orthogonal du point $A$ sur la droite $(HM)$. $X$ est précisément le point évoqué dans la sous-partie "un point un peu particulier", il appartient donc bien au cercle $\mathcal{C}_{ABC}$.

**Exercice 116.** (S)(Brésil MO 2011 P5) Soit $ABC$ un triangle aux angles aigus et soit $H$ son orthocentre. Soient $D$ et $E$ les pieds des hauteurs issues des sommets $B$ et $C$ respectivement. Le cercle circonscrit au triangle $ADE$ recoupe le cercle circonscrit au triangle $ABC$ au point $F$. Montrer que la bissectrice de l'angle $\widehat{BFC}$ et la bissectrice de l'angle $\widehat{BHC}$ se coupent sur le segment $[BC]$.

<u>*Solution de l'exercice 116*</u>




Soit $S$ le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{BHC}$ avec le segment $[BC]$. Pour montrer que $S$ est sur la bissectrice de l'angle $\widehat{BFC}$, il suffit, d'après le théorème de la bissectrice, de montrer que

$$\frac{DB}{DC} = \frac{FB}{FC}$$

Or, d'après le théorème de la bissectrice, on a déjà que $\frac{DB}{DC} = \frac{HB}{HC}$.
D'autre part, le point $F$, par définition, est le centre de la similitude envoyant $E$ sur $B$ et $D$ sur $C$, de sorte que les triangles $EFB$ et $DFC$ sont semblables. Ainsi,

$$\frac{FB}{FC} = \frac{EB}{DC}$$

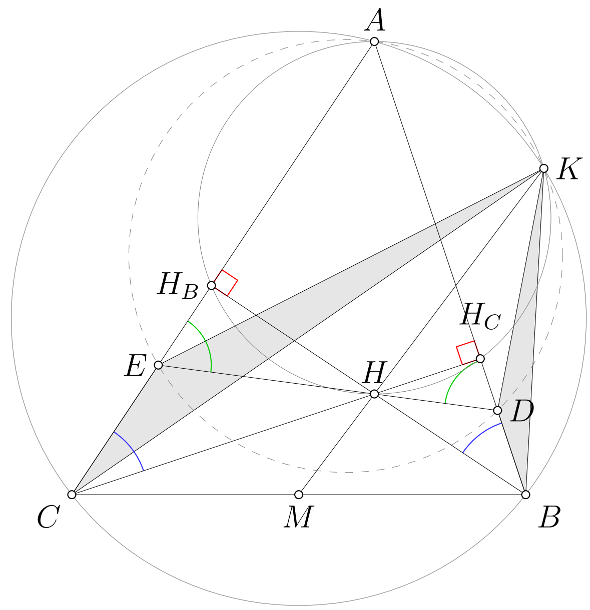
Les points $D, E, B$ et $C$ étant cocycliques, les triangles $HEB$ et $HDC$ sont semblables. En résumé :

$$\frac{FB}{FC} = \frac{EB}{DC} = \frac{HB}{HC} = \frac{DB}{DC}$$

et le point $D$ est bien sur la bissectrice de l'angle $\widehat{BFC}$.

**Exercice 117.** (Mongolie TST 2018, adapté du IMO SL 2005 G5) Soit $ABC$ un triangle aux angles aigus et $H$ son orthocentre. Une droite passant par $H$ recoupe les côtés $[AB]$ et $[AC]$ respectivement en $D$ et $E$ de sorte que $AD = AE$. Soit $M$ le milieu du segment $[BC]$. La droite $(MH)$ recoupe le cercle circonscrit au triangle $ABC$ en un point $K$ de sorte que $K$ est sur l'arc $BC$ contenant $A$. Montrer que $A, D, E$ et $K$ sont cocycliques.

<u>*Solution de l'exercice 117*</u>




Soient $H_B$ et $H_C$ les pieds des hauteurs issues de $B$ et $C$.
On reconnaît en le point $K$ le second point d'intersection des cercles $\mathcal{C}_{ABC}$ et $\mathcal{C}_{AH_BH_C}$, ou encore le centre de la similitude envoyant $H_B$ sur $C$ et $H_C$ sur $B$.

Pour montrer que le point $K$ appartient au cercle $\mathcal{C}_{ADE}$, il suffit de montrer qu'il est le centre de la similitude envoyant $D$ sur $B$ et $E$ sur $C$, autrement dit, que les triangles $KDB$ et $KEC$ sont semblables.

D'après le théorème de l'angle inscrit, on a déjà $\widehat{DBK} = \widehat{ABK} = \widehat{ACK} = \widehat{ECK}$. Il reste cond à montrer que $\frac{DB}{EC} = \frac{KB}{KC}$.

D'une part, d'après le théorème de l'angle inscrit dans le cercle $\mathcal{C}_{BCH_BH_C}$, $\widehat{HBD} = \widehat{HCE}$, et puisque le triangle $DAE$ est isocèle en $A$, $\widehat{HDB} = 180° - \widehat{DAE} = 180° - \widehat{EDA} = \widehat{HEC}$. Les triangles $HDB$ et $HEC$ sont donc semblables et $\frac{DB}{EC} = \frac{HB}{HC}$.
D'autre part, puisque $K$ est le centre de la similitude envoyant $H_C$ sur $B$ et $H_B$ sur $C$, on a $\frac{KB}{KC} = \frac{H_CB}{H_BC}$. Puisque les triangles $HH_CB$ et $HH_CB$ sont semblables, on déduit que $\frac{H_CB}{H_BC} = \frac{HB}{HC}$. Ainsi

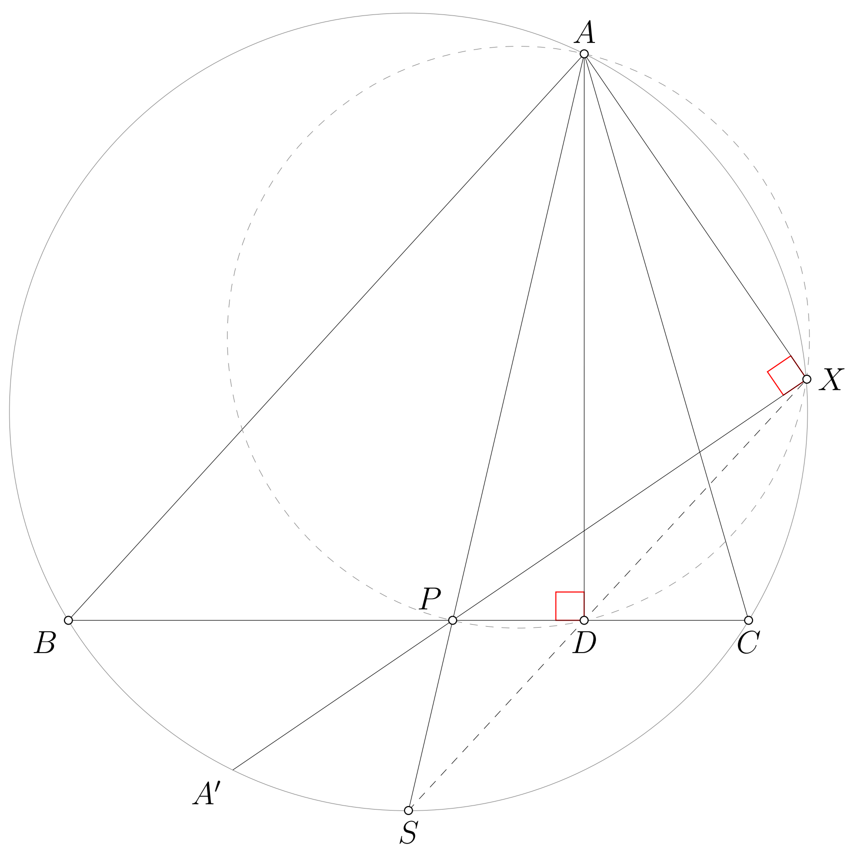
$$\frac{KB}{KC} = \frac{H_CB}{H_BC} = \frac{HB}{HC} = \frac{DB}{EC}$$

ce qui donne bien que les triangles $DBK$ et $ECK$ sont semblables.

# Prendre son envol

**Exercice 118.** (France TST Junior 2022) Soit $ABC$ un triangle et $\Omega$ son cercle circonscrit. Soit $D$ le pied de la hauteur issue du sommet $A$. La bissectrice issue du sommet $A$ coupe le segment $[BC]$ au point $P$ et recoupe le cercle $\Omega$ au point $S$. Soit $A'$ le point diamétralement opposé au sommet $A$ dans le cercle $\Omega$. Montrer que les droites $(SD)$ et $(A'P)$ se coupent sur le cercle $\Omega$.

<u>*Solution de l'exercice 118*</u> On se place dans le cadre de la figure ci-contre, en supposant sans perte de généralité que $AC < AB$ :




Soit $X$ le point second d'intersection de la droite $(A'P)$ avec le cercle $\Omega$. On va prouver que les points $X, D$ et $S$ sont alignés, ce qui montre que le point d'intersection des droites $(AP)$ et $(DS)$ est le point $X$, qui est bien sur le cercle $\Omega$.
Puisque $[AA']$ est un diamètre du cercle $\Omega$ et que $X$ est sur le cercle $\Omega$, $\widehat{AXA'} = 90°$. On déduit que

$$\widehat{AXP} = \widehat{AXA'} = 90° = \widehat{ADB} = \widehat{ADP}$$

de sorte que les points $A, X, P$ et $D$ sont cocycliques. Pour conclure, on montre que $\widehat{A'XD} = \widehat{A'XS}$.
D'une part :

$$\widehat{A'XD} = \widehat{PXD} = \widehat{PAD}$$

en utilisant que les points $A, X, D$ et $P$ sont cocycliques.
D'autre part, puisque le point $X$ est sur le cercle $\Omega$ :

$$\widehat{A'XS} = \widehat{A'AS} = \widehat{BAS} - \widehat{BAA'}$$

En utilisant à nouveau que $[AA']$ est un dimaètre du cercle $\Omega$, on a que $\widehat{A'BA} = 90°$. On a donc

$$\widehat{BAA'} = 90° - \widehat{BA'A} = 90° - \widehat{BCA} = 90° - \widehat{DCA} = \widehat{DAC}$$

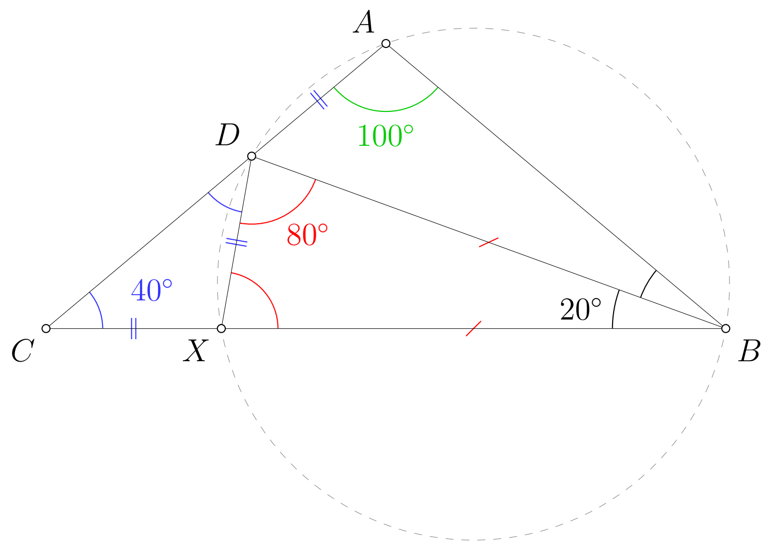
De plus, puisque $(AS)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$, on a $\widehat{BAS} = \widehat{CAS}$.
Finalement :

$$\widehat{A'XS} = \widehat{BAS} - \widehat{BAA'} = \widehat{SAC} - \widehat{DAC} = \widehat{SAD} = \widehat{PAD}$$

On a donc bien $\widehat{A'XS} = \widehat{A'XD}$ et les points $S, D$ et $X$ sont alignés.

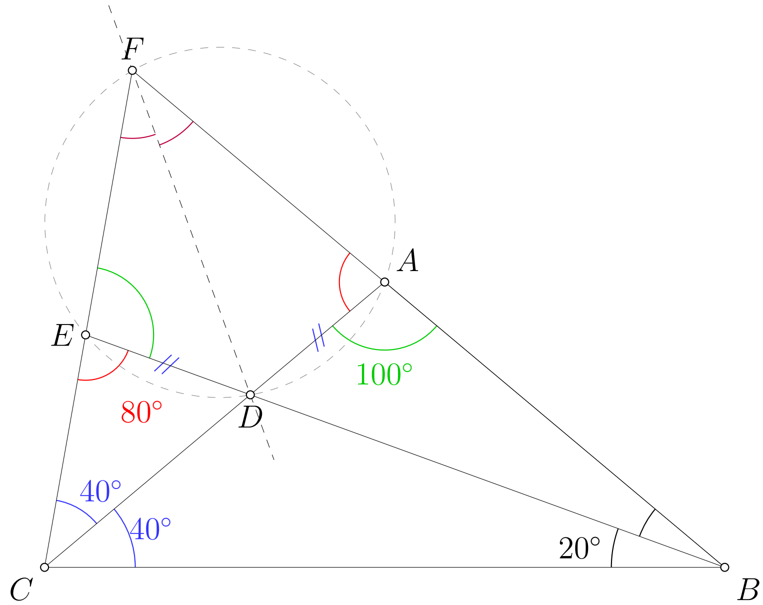
**Exercice 119.** (JBMO SL 2014 G1) Soit $ABC$ un triangle avec $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 40°$. La bissectrice issue du sommet $B$ coupe la droite $(AC)$ au point $D$. Montrer que $BD + DA = BC$.

<u>*Solution de l'exercice 119*</u>




Pour résoudre ce genre d'exercice, une bonne idée est souvent d'essayer de reporter les longueurs qui nous intéressent à des endroits où les calculs seront plus faciles à faire. C'est pour cela que l'on introduit $X$ le point du segment $[BC]$ de telle sorte que $BD = BX$. On veut alors démontrer que $XC = AD$ pour conclure.
Une chasse aux angles rapide montre dans un premier temps que $\widehat{BXD} = 80°$. En effet, on sait par construction du point $X$ que le triangle $BDX$ est isocèle en $B$, on peut donc calculer $\widehat{BXD} = (180° - 20°)/2 = 80°$. Cela donne ensuite que $\widehat{CDX} = \widehat{DXB} - \widehat{DCX} = 80° - 40° = 40° = \widehat{DCX}$ et donc que le triangle $DXC$ est isocèle en $X$. Cela montre que $DX = XC$. Résoudre l'exercice revient donc à montrer que $AD = DX$.
En regardant très fort le quadrilatère $BADX$ on remarque que la droite $(BD)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{ABX}$ et comme on veut démontrer que $AD = DX$ on pense naturellement au théorème du pôle sud. Il suffit donc de démontrer que les points $B$, $A$, $D$ et $X$ sont cocycliques pour conclure, il s'agit alors d'une deuxième petite chasse aux angles.
En effet, $\widehat{BAD} + \widehat{BXD} = 100° + 80° = 180°$ ce qui montre bien que le quadriltère $ADXB$ est cyclique, puis d'après le théorème du pôle Sud dans le triangle $BAX$ que $AD = DX$. Cela conclut ainsi la preuve de l'exercice.

*Solution alternative :*




On présente une deuxième solution, correspondant à une deuxième façon de reporter les longueurs à étudier.

Soit $E$ le point de la demi-droite $[BD)$ tel que $BE = BC$. On cherche à montrer que $ED = DA$, de sorte que $BD + DA = BD + DE = BE = BC$. Le triangle $EBC$ est isocèle en $B$, de sorte que

$$180^\circ = \widehat{EBC} + \widehat{ECB} + \widehat{CEB} = 20^\circ + 2\widehat{CEB}.$$

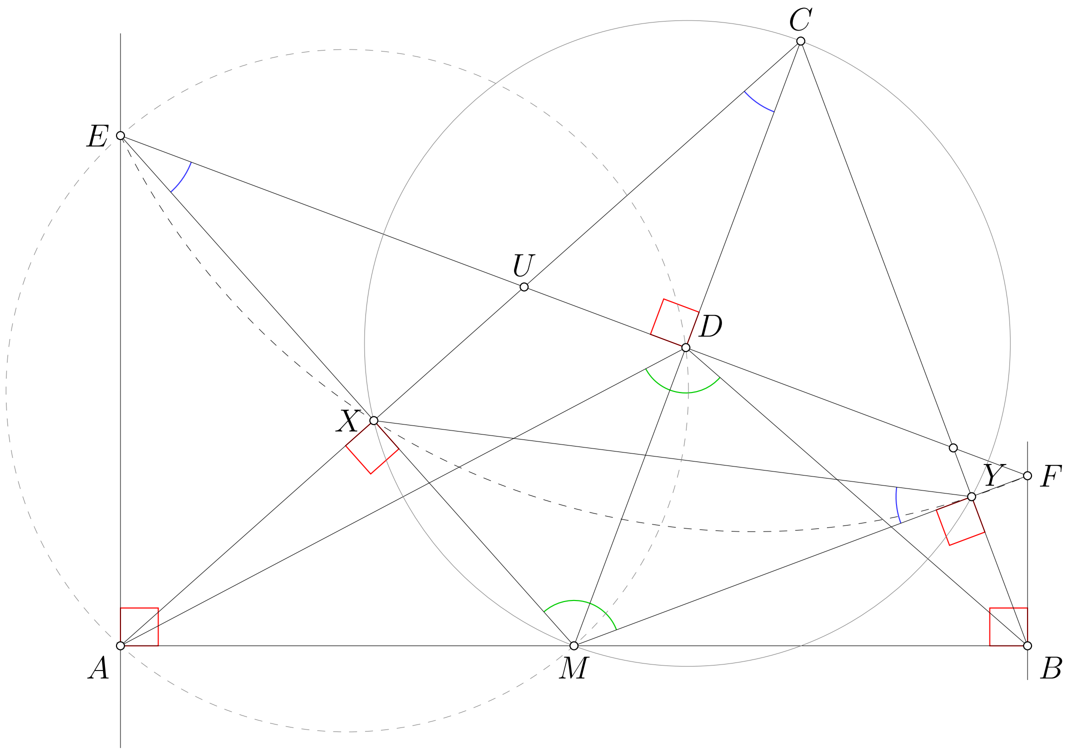
Ainsi, $\widehat{CEB} = 80^\circ$ et $\widehat{ECD} = \widehat{ECB} - \widehat{DCB} = 80^\circ - 40^\circ = 40^\circ$. Le point $D$ est donc le pied de la bissectrice issue du sommet $C$ dans le triangle $ECB$.

Soit désormais $F$ le point d'intersection des droites $(EC)$ et $(AB)$. L'idée derrière l'introduction de ce point est que l'on connait déjà deux bissectrices de ce triangle : la droite $(BD)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ et la droite $(CD)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{FCB}$. Ainsi, le point $D$ est le centre du cercle inscrit au triangle $FCB$. Il est donc sur la bissectrice de l'angle $\widehat{BFC}$.

Or on a $\widehat{DEF} = 180^\circ - \widehat{DEC} = 100^\circ$ et $\widehat{DAF} = 180^\circ - \widehat{DAB} = 80^\circ$, de sorte que $\widehat{DEF} + \widehat{DAF} = 180^\circ$ et les points $F, E, D$ et $A$ sont cocycliques. Le point $D$ est donc sur le cercle circonscrit au triangle $FEA$ et sur la bissectrice de l'angle $\widehat{EFA}$, il s'agit donc du pôle Sud du point $F$. A ce titre, $D$ est sur la médiatrice du segment $[AE]$ et $DE = DA$ comme annoncé.

**Exercice 120.** (JBMO 2015 P3) Soit $ABC$ un triangle. Soient $\ell_1$ et $\ell_2$ les droites perpendiculaires à $(AB)$ respectivement en $A$ et $B$. Soit $M$ le milieu de $[AB]$. La perpendiculaire à $(AC)$ passant par $M$ coupe $\ell_1$ en $E$ et la perpendiculaire à $(BC)$ passant par $M$ coupe $\ell_2$ en $F$. Soit $D$ le point d'intersection des droites $(EF)$ et $(CM)$. Montrer que $\widehat{ADB} = \widehat{EMF}$.

<u>*Solution de l'exercice 120*</u>




Les triangles $BDA$ et $FME$ ont en fait l'air semblable. L'angle $\widehat{CDE}$ semble être droit.

Supposons dans un premier temps avoir démontré que $\widehat{CDE} = 90°$. Alors $\widehat{EAM} = 90° = 180° - \widehat{EDM}$, de sorte que le quadrilatère $EAMD$ est cyclique. On a donc $\widehat{MED} = \widehat{MAD}$. De même on obtient que $\widehat{MFD} = \widehat{MBD}$. Ainsi les triangles $EMF$ et $ADB$ ont deux angles en communs, ils sont bien semblables et en particulier $\widehat{ADB} = \widehat{EMF}$.

Il suffit donc de démontrer que les droites $(EF)$ et $(CD)$ sont perpendiculaires.
On note $X$ et $Y$ les points d'intersection respectifs des droites $(AC)$ et $(EM)$ et des droites $(BC)$ et $(MF)$.
Alors d'une part, $\widehat{MXC} = 90° = 180° - \widehat{MYC}$, donc le quadrilatère $CXMY$ est cyclique.
D'autre part, $X$ est le pied de la hauteur issue de $A$ dans le triangle rectangle $EAM$. D'après les relations d'Euclide, $MA^2 = MX \times ME$. De même on trouve $MB^2 = MY \times MF$. En résumé,

$$MX \times ME = MA^2 = MB^2 = MY \times MF$$

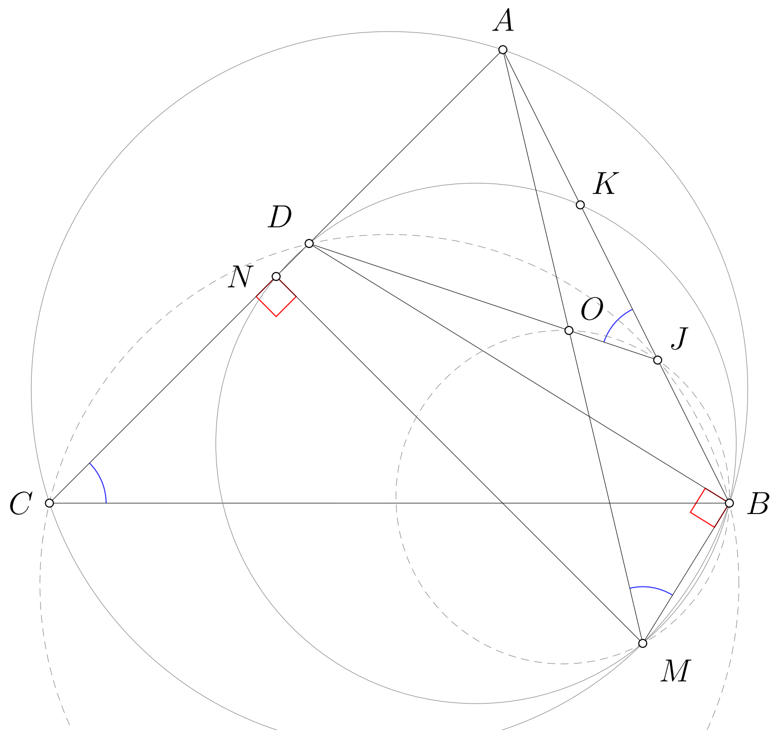
D'après la réciproque de la puissance d'un point par rapport à un cercle, les points $E, X, Y$ et $F$ sont cocycliques.
On déduit, en appliquant le théorème de l'angle inscrit dans $\mathcal{C}_{CXMY}$ puis dans $\mathcal{C}_{EXYF}$ :

$$\widehat{XED} = \widehat{MEF} = \widehat{XYM} = \widehat{XCM} = \widehat{XCD}$$

Si on note $U$ le point d'intersection des droites $(EF)$ et $(AC)$, on déduit que les triangles $EUX$ et $UCD$ ont deux angles en commun, ils sont donc semblables. En particulier, $\widehat{UDC} = \widehat{UXE} = 90°$. Les droites $(EF)$ et $(CM)$ sont perpendiculaires comme annoncé, et on peut conclure.

**Exercice 121.** (JBMO SL 2014 G5) Soit $ABC$ un triangle non isocèle en $B$. Soit $D$ le pied de la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$. Soit $M$ le milieu de l'arc $\overset{\frown}{AC}$ contenant $B$ sur le cercle circonscrit au triangle $ABC$. Le cercle circonscrit au triangle $BDM$ coupe la segment $[AB]$ en un point $K$ distinct de $B$. Soit $J$ le symétrique du point $A$ par rapport au point $K$. La droite $(DJ)$ intersecte la droite $(AM)$ en un point $O$. Montrer que les points $J, B, M$ et $O$ sont cocycliques.

<u>*Solution de l'exercice 121*</u>




Tout d'abord, on reconnaît dans la figure quelques points connus : le point $M$ est le milieu de l'arc $AC$ contenant $B$, il s'agit donc du pôle Nord du point $B$ dans le triangle $ABC$, c'est-à-dire qu'il est le point d'intersection de la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{ABC}$, de la médiatrice du segment $[AC]$ et du cercle circonscrit au triangle $ABC$. On obtient donc que l'angle $\widehat{DBM}$ est droit (par définition de la bissectrice extérieure).

Le fait que $M$ appartient à la médiatrice du segment $[AC]$ nous invite également à considérer cette médiatrice. Soit $N$ le milieu du segment $[AC]$. Alors $\widehat{DNM} = 90°$. On déduit donc que les points $B, M, N$ et $D$ sont cocycliques et $D$ appartient au cercle passant par les pointe $B, K$ et $D$.

De nouveaux points cocycliques apportent deux informations : une information sur les angles grâce au théorème de l'angle inscrit et une information sur les longueurs grâce à la puissance d'un point. Puisque la majorité des points se trouve sur deux droites se coupant en le sommet $A$, nous allons utiliser la puissance du point $A$ par rapport à divers cercles.
Notemment, par puissance d'un point $AK \cdot AB = AD \cdot AN$. Donc

$$AJ \cdot AB = 2AK \cdot AB = 2AD \cdot AN = AD \cdot AC$$

donc les points $D, C, B$ et $J$ sont cocycliques d'après la réciproque de la puissance d'un point.
Nous avons à présent tous les outils pour effectuer une chasse aux angles. Des angles difficiles d'accès sont les angles $\widehat{OMJ}, \widehat{OBJ}, \widehat{MJB}$.... En revanche, les angles $\widehat{DJB}$ et $\widehat{OMB}$ semblent plus faciles à obtenir à l'aide des cercles présents sur la figure.

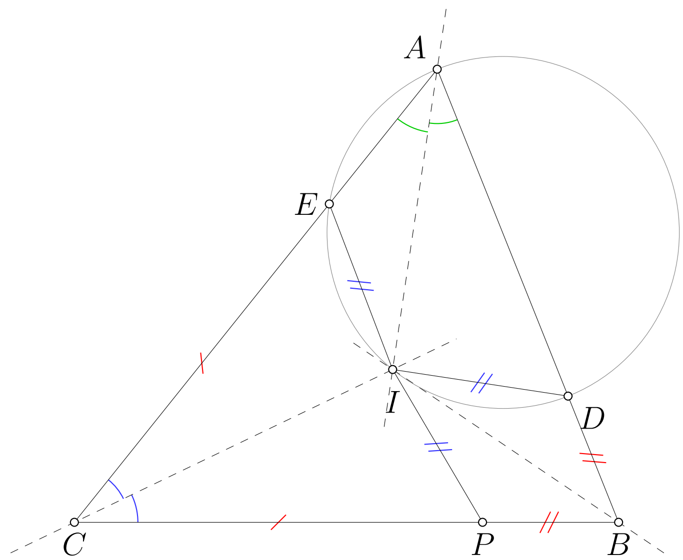
Puisque les points $D, C, B$ et $O$ sont cocycliques, on trouve

$$\widehat{OJB} = \widehat{DJB} = 180° - \widehat{BCD} = 180° - \widehat{BCA} = 180° - \widehat{BMA} = 180° - \widehat{BMO}$$

donc le quadrilatère $JBMO$ est bien cyclique.

**Exercice 123.** (JBMO 2016 G4) Soit $ABC$ un triangle dont le côté $BC$ est le côté de plus petite longueur. Soit $P$ un point variable sur le segment $[BC]$. Soit $D$ le point du segment $[AB]$ tel que $BD = BP$. Soit $E$ le point du segment $[AC]$ tel que $CP = CE$. Montrer que lorsque le point $P$ varie, le cercle circonscrit au triangle $ADE$ passe par un point fixe.

*Solution de l'exercice 123*

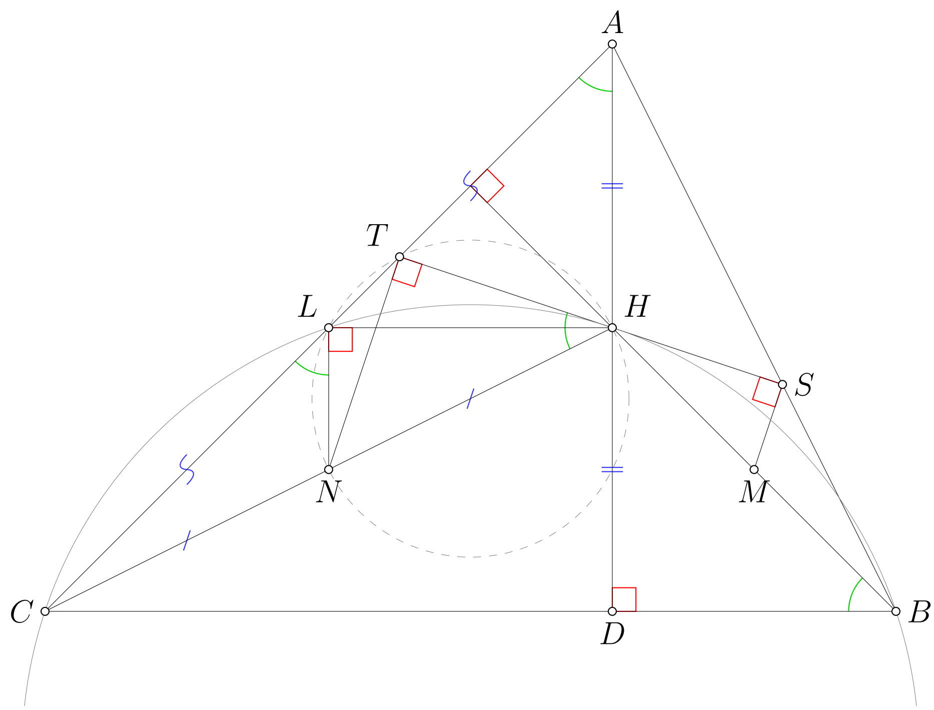



Une figure propre et un test pour deux points $P$ différents nous laissent penser que le point fixe par lequel passent les différents cercle n'est autre que le centre du cercle inscrit du triangle $ABC$, que l'on note $I$. Soit $P$ un point sur le segment $[BC]$. On montrer que le point $I$ appartient au cercle circonscrit au triangle $ADE$.

Par définition de la bissectrice, les points $E$ et $P$ sont symétriques par rapport à la droite $(CI)$. Ainsi, on obtient que $EI = PI$. De même, on a que $DI = PI$ donc $EI = DI$. Le point $I$ appartient donc à la bissectrice de l'angle $\widehat{DAE}$ et à la médiatrice du segment $[ED]$. Le point $I$ est donc le pôle Sud du point $A$ dans le triangle $AED$, il appartient donc au cercle circonscrit au triangle $AED$.

**Exercice 126.** (JBMO 2022 P2) Soit $ABC$ un triangle tel quel, si $D$ est le pied de la hauteur issue du sommet $A$ et $H$ l'orthocentre du triangle $ABC$, alors $AH = HD$. La tangente au cercle circonscrit au triangle $BHC$ coupe le côté $[AB]$ en $S$ et le côté $[AC]$ en $T$. Soit $M$ le milieu de $[BH]$ et $N$ le milieu de $[CH]$. Montrer que les droites $(MS)$ et $(NT)$ sont parallèles.

<u>*Solution de l'exercice 126*</u>




On remarque que les droites $(TN)$ et $(SM)$ semblent perpendiculaires à la droite $(ST)$. Si l'on parvient à démontrer ce résultat, on aura montré que les droites $(MS)$ et $(NT)$ sont parallèles.

La présence de divers milieux nous invite à introduire de nouveaux milieux. On introduit par exemple $L$ le milieu du segment $[AC]$. Alors par droite des milieux, les droites $(LH)$ et $(BC)$ sont parallèles, et les droites $(LN)$ et $(AH)$ sont parallèles. Puisque $\widehat{ADC} = 90°$, on déduit que $\widehat{NLH} = 90°$.

Montrons désormais que les points $L, N, H$ et $T$ sont cocycliques. Notons pour cela que les angles $\widehat{CAH}$ et $\widehat{HBC}$ sont tous les deux égaux à $90° - \widehat{ACB}$, ils sont donc égaux. Puisque $(LN)$ et $(AH)$ sont parallèles, on a donc

$$\widehat{CLN} = \widehat{CAH} = \widehat{HBC} = \widehat{THC}$$

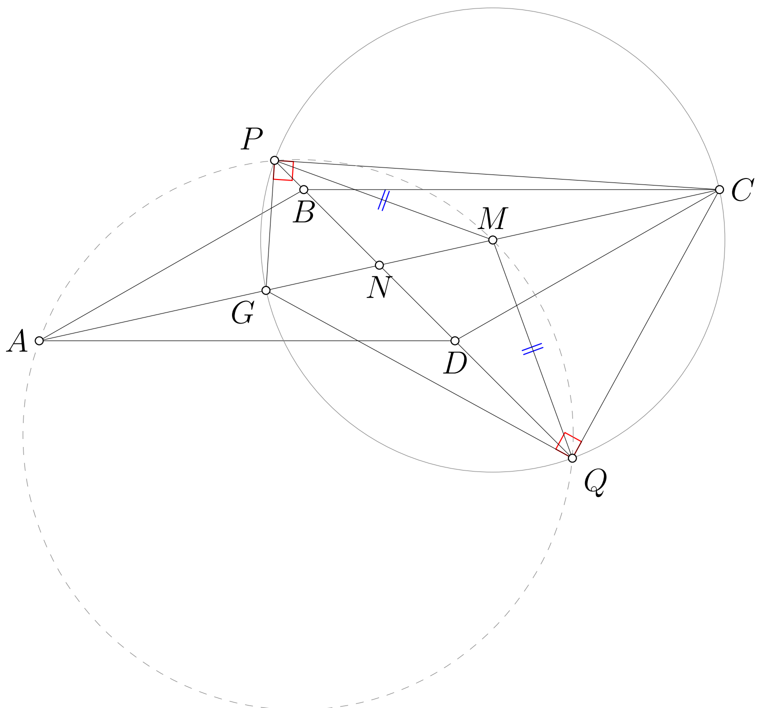
où la dernière égalité provient du théorème de l'angle tangentiel. On déduit que $\widehat{THN} = 180° - \widehat{TLN}$. Les points $T, H, N$ et $L$ sont donc cocycliques. Par le théorème de l'angle inscrit, on a alors $\widehat{NTH} = \widehat{NLH} = 90°$, donc les droites $(TN)$ et $(TS)$ sont perpendiculaires.

De la même manière, on montre que les droites $(SM)$ et $(TS)$ sont perpendiculaires, ce qui conclut.

**Exercice 127.** (France TST novembre 2022) Soit $ABCD$ un parallélogramme et $G$ le centre de gravité du triangle $ABD$. Soient $P$ et $Q$ les points de la droite $(BD)$ tels que les droites $(GP)$ et $(PC)$ sont perpendiculaires et les droites $(GQ)$ et $(QC)$ sont perpendiculaires.

Montrer que la droite $(AG)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{PAQ}$.

*Solution de l'exercice 127*




Puisque $\widehat{GPC} = \widehat{GQC} = 90°$, les points $G, P, Q$ et $C$ sont sur un même cercle de centre $M$ le milieu de $[CG]$. On a donc $MP = MQ$. On va montrer que $M$ est le pôle Sud du sommet $A$ dans le triangle $APQ$, ce qui implique bien que $(AG)$ est la bissectrice de $\widehat{PAQ}$ puisque $A, G, M$ et $C$ sont alignés.

Puisque $M$ est sur la médiatrice du segment $[PQ]$, il suffit de montrer que les points $P, M, Q$ et $A$ sont cocycliques. Pour cela, on note $N$ le milieu commun des segments $[BD]$ et $[AC]$.

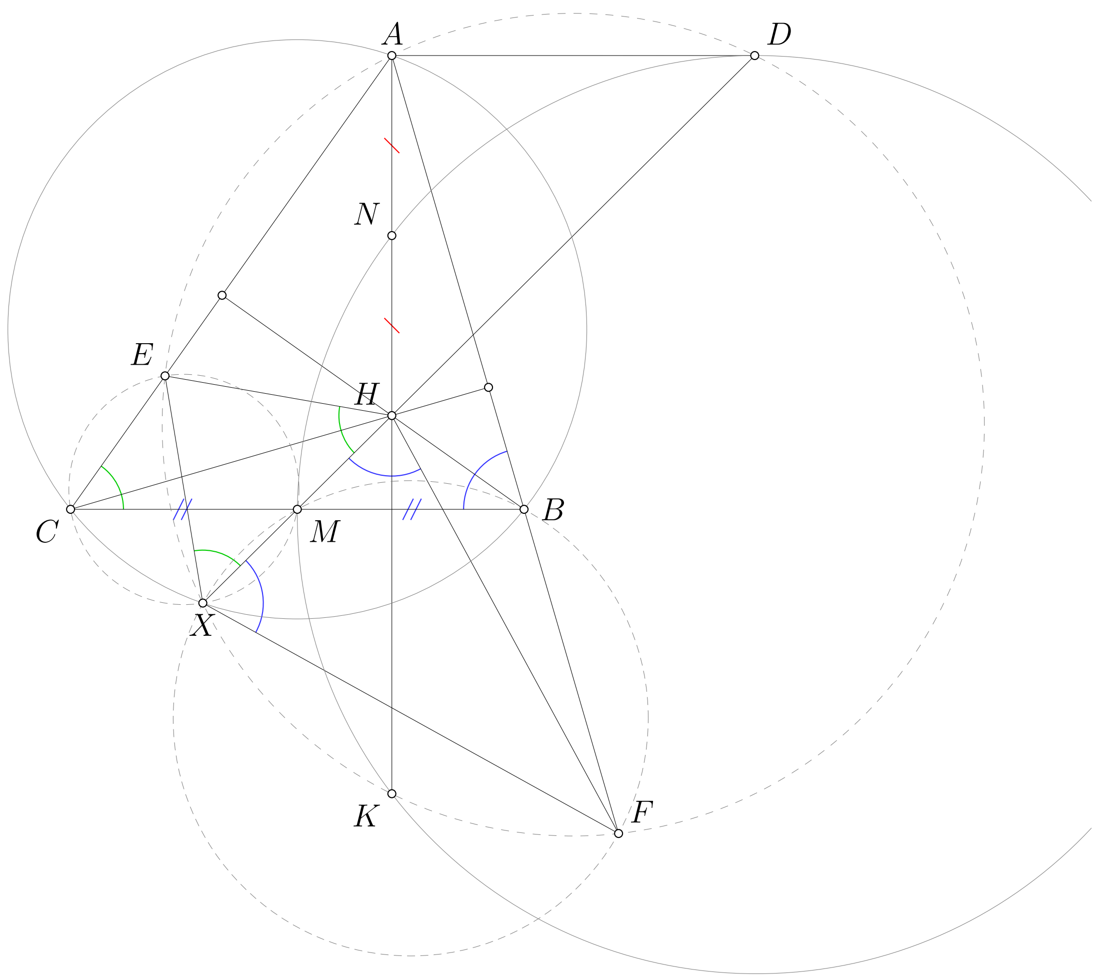
Le centre de gravité $M'$ du triangle $BDC$ vérifie $M'C = 2M'N = 2NG = AG$ et $M'N = NG$, de sorte que $M'G = M'C$ donc $M' = M$. On a alors par puissance du point $N$ par rapport au cercle passant par $G, Q, C$ et $P$ :

$$NM \cdot NA = NG \cdot NC = NP \cdot NQ$$

On peut donc conclure par la réciproque de la puissance d'un point que les points $A, P, M$ et $Q$ sont cocycliques, comme voulu.

**Exercice 128.** (Iran TST 2019 P1) Soit $ABC$ un triangle et soit $H$ son orthocentre. Les points $M$ et $N$ sont les milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[AH]$. La parallèle à la droite $(BC)$ passant par le point $A$ coupe la droite $(MH)$ en un point $D$. Le cercle circonscrit au triangle $DMN$ recoupe la droite $(AH)$ en un point $K$. Soit $E$ un point du segment $[AC]$ tel que $\widehat{EHM} = \widehat{ACB}$ et soit $F$ un point sur le segment $[AB]$ tel que $\widehat{FHM} = \widehat{ABC}$. Montrer que les points $D, E, F$ et $K$ sont cocycliques.

<u>*Solution de l'exercice 128*</u>




Le point clé est d'avoir une figure exacte. Pour cela, il est essentiel de comprendre comment sont construits les points $E$ et $F$. On va se concentrer ici sur la construction du point $E$.
On aimerait transformer l'égalité d'angle en une condition de cocyclicité. Pour cela, soit $X$ le symétrique du point $H$ par rapport au point $M$. Soit $E'$ le second point d'intersection du cercle circonscrit au triangle $CXM$ avec la droite $(AC)$. Alors $\widehat{E'CX} = \widehat{ACX} = 90°$ et $\widehat{E'XM} = \widehat{BCA}$. Ainsi $\widehat{EMX} = 90°$ donc le point $M$ est le pied de la hauteur issue du sommet $E'$ dans le triangle $XEH$. $M$ est également le milieu du segment $[HX]$ donc le triangle $XE'H$ est isocèle en $E'$ et $\widehat{E'HM} = \widehat{E'XM} = \widehat{ACB}$ donc $E' = E$. Le point $E$ est donc le point d'intersection du cercle circonscrit au triangle $CXM$ avec la droite $(AC)$ et le point $F$ est le second point d'intersection de la droite $(AB)$ avec le cercle circonscrit au triangle $BXM$ de la même façon.

Passons maintenant à la résolution du problème. Avec une figure exacte, on s'aperçoit que les points $A$ et $X$ appartiennent eux aussi au cercle circonscrit au triangle $DEF$.
Tout d'abord, par chasse aux angles on trouve

$$\widehat{EXD} = \widehat{EXM} = \widehat{ACB} = 180^\circ - \widehat{CAB} - \widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{EAD}$$

donc les points $X, E, A$ et $D$ sont cocycliques et de même on obtient que les points $A, E, F, X$ et $D$ sont cocycliques.

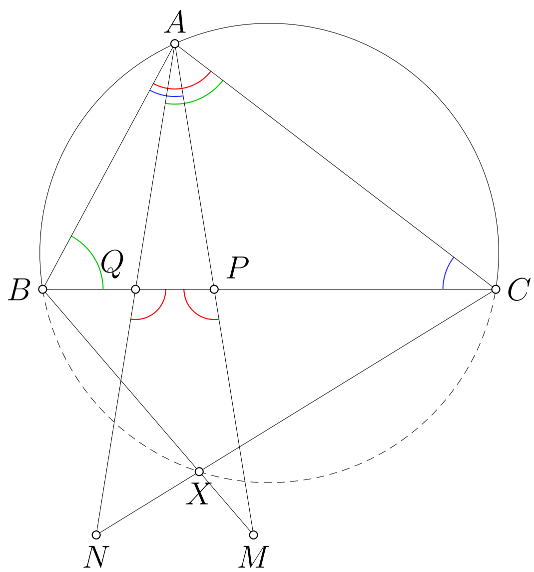
Par ailleurs, par puissance du point $H$ par rapport au cercle circonscrit au triangle $NMD$, on a $HN \cdot HK = HM \cdot HD$. Puisque le point $N$ est le milieu du segment $[AH]$ et le point $M$ le milieu du segment $[XH]$ :

$$HA \cdot HK = 2 \cdot HN \cdot HK = 2 \cdot HM \cdot HD = HX \cdot HD$$

donc les points $X, A, D$ et $K$ sont cocycliques par la réciproque de la puissance d'un point par rapport à un cercle. Donc les points $A, E, F, D, X$ et $K$ sont cocycliques.

**Exercice 130.** (IMO 2014 P4) Soit $ABC$ un triangle. Les points $P$ et $Q$ appartiennent au segment $[BC]$ de telle sorte que $\widehat{PAB} = \widehat{BCA}$ et $\widehat{CAQ} = \widehat{ABC}$. Les points $M$ et $N$ appartiennent respectivement aux droites $(AP)$ et $(AQ)$ de telle sorte que le point $P$ soit le milieu du segment $[AM]$ et que le point $Q$ soit le milieu du segment $[AN]$. Montrer que le point d'intersection des droites $(BM)$ et $(CN)$ appartient au cercle circonscrit du triangle $ABC$.

*Solution de l'exercice 130*




Ici, il s'agit de réinterpréter les égalités qui sont données. Puisque $\widehat{PAB} = \widehat{BCA}$, la droite $(AB)$ est tangente au cercle circonscrit au triangle $APC$. Le centre du cercle $ACP$ s'obtient comme le point d'intersection de la perpendiculaire à la droite $(AB)$ passant par $A$ et la médiatrice du segment $[AC]$. Si on peut tracer le cercle $APC$, on peut tracer le point $P$. De même on trace le point $Q$. On peut alors tracer le reste de la figure. On note $X$ le point d'intersection des droites $(BM)$ et $(CN)$.

Les égalités d'angles nous apportent que les triangles $ABC, PBA$ et $QCA$ sont semblables. En particulier on déduit que

$$\frac{NQ}{QC} = \frac{AQ}{CQ} = \frac{AB}{AC} = \frac{BP}{AP} = \frac{BP}{PM}$$

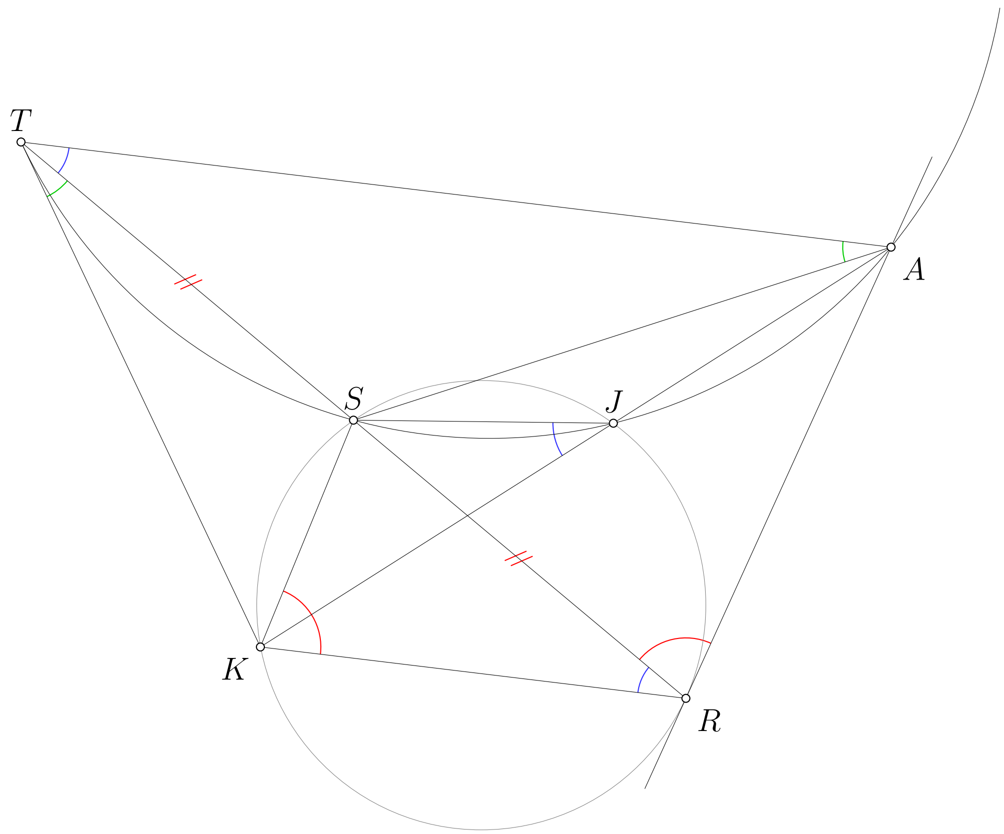
et puisque $\widehat{BPM} = 180° - \widehat{BPA} = 180° - \widehat{BAC} = \widehat{NQC}$, les triangles $BPM$ et $NQC$ sont semblables.
On a donc

$$\widehat{XBC} + \widehat{XCB} = \widehat{MBP} + \widehat{NCQ} = \widehat{MBP} + \widehat{BMP} = \widehat{BPA} = \widehat{BAC}$$

donc $\widehat{BXC} = 180° - \widehat{BAC}$ et les points $A, B, C$ et $X$ sont cocycliques.

**Exercice 132.** (IMO 2017 P4) Soient $R$ et $S$ des points distincts appartenant à un cercle $\Omega$ tels que le segment $[RS]$ n'est pas un diamètre du cercle $\Omega$. Soit $\ell$ la tangente au cercle $\Omega$ au point $R$. Le point $T$ est tel que le point $S$ est le milieu du segment $[RT]$. Le point $J$ est choisi sur le plus petit arc $RS$ du cercle $\Omega$ de sorte que le cercle $\Gamma$ circonscrit au triangle $JST$ rencontre la droite $\ell$ en deux points distincts. Soit $A$ le point commun du cercle $\Gamma$ et de la droite $\ell$ qui est le plus proche du point $R$. La droite $(AJ)$ recoupe le cercle $\Omega$ au point $K$. Prouver que la droite $(KT)$ est tangente au cercle $\Gamma$.

*Solution de l'exercice 132*




Il suffit de montrer que $\widehat{KTR} = \widehat{TAS}$.

Tout d'abord, d'après le théorème de l'angle inscrit :

$$\widehat{STA} = 180° - \widehat{SJA} = \widehat{SJK} = \widehat{SRK}$$

D'autre part, d'après le théorème de l'angle tangentiel, $\widehat{SKR} = \widehat{SRA}$. Les triangles $ATR$ et $SRK$ ont donc deux angles en commun, ils sont donc semblables. On déduit que

$$\frac{TR}{KR} = \frac{AT}{SR} = \frac{AT}{ST}$$

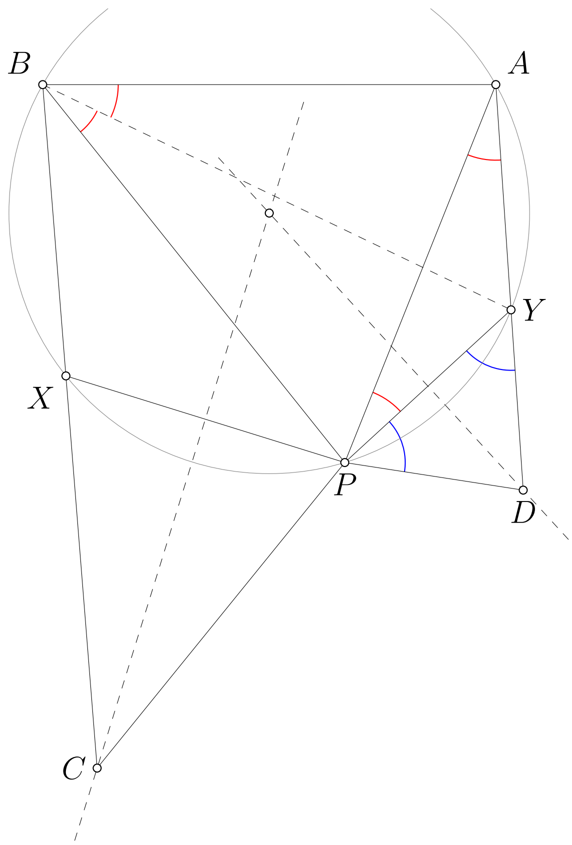
en utilisant que $SR = ST$. Puisque de plus $\widehat{TRK} = \widehat{STA}$, les triangles $TAS$ et $RTK$ sont semblables. En particulier, $\widehat{KTR} = \widehat{TAS}$ comme voulu.

**Exercice 133.** (IMO 2020 P1) Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe et soit $P$ un point à l'intérieur du quadrilatère. On suppose que les égalités de rapports suivantes sont vérifiées :

$$\widehat{PAD} : \widehat{PBA} : \widehat{DPA} = 1 : 2 : 3 = \widehat{CBP} : \widehat{BAP} : \widehat{BPC}$$

Montrer que les trois droites suivantes sont concourrantes : la bissectrice de l'angle $\widehat{ADP}$, la bissectrice de l'angle $\widehat{PCB}$ et la médiatrice du segment $[AB]$.

<u>*Solution de l'exercice 133*</u>




Résoudre l'exercice consiste à trouver comment tracer la figure.

Pour cela on prend le problème à l'envers en notant que l'angle $\widehat{PBA}$ détermine la position du point $D$. Ceci nous conduit à construire le triangle $PBA$ puis construire les points $C$ et $D$ à partir de ce triangle. Pour construire le point $D$, il faut déterminer l'angle $\widehat{PBA} = 2\widehat{PAD}$. Ceci conduit à couper l'angle $\widehat{PBA}$ en deux et à tracer sa bissectrice.

Supposons le point $D$ construit. Le point $Y$ d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{PBA}$ avec la droite $(AD)$ vérifie par hypothèse

$$\widehat{YAP} = \widehat{DAR} = \frac{1}{2}\widehat{PBA} = \widehat{YBA}$$

donc les points $Y, A, B$ et $P$ sont cocycliques. Le point $Y$ est donc le pôle Sud du sommet $B$ dans le triangle $ABP$. A l'inverse, le point $D$ appartient donc à la droite $(AY)$ avec $Y$ le pôle Sud du sommet $B$ dans le triangle $PAB$. On a alors

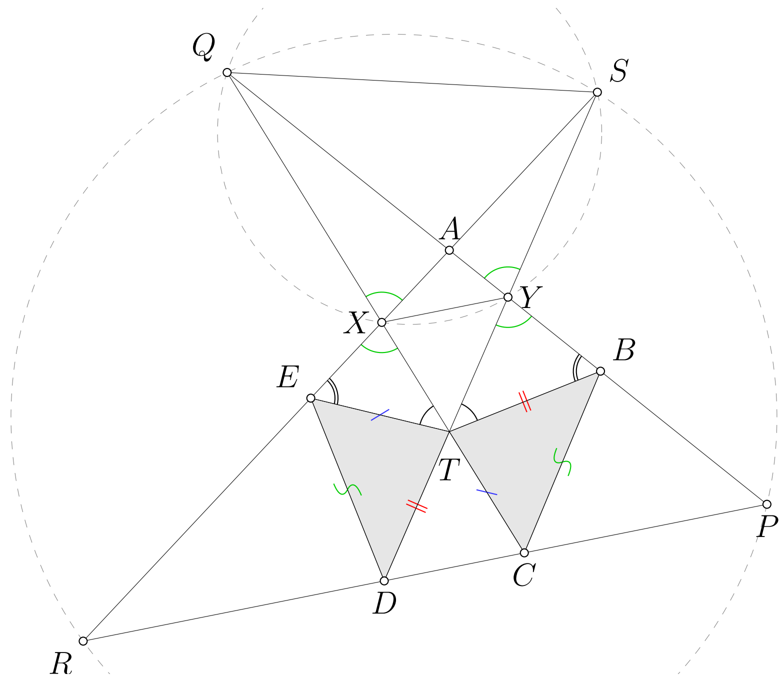
$$\widehat{DPY} = \widehat{DPA} - \widehat{YPA} = 3\widehat{PAD} - \widehat{PAD} = 2\widehat{PAD} = \widehat{PYD}$$

Le triangle $PDY$ est donc isocèle en $D$. Le point $D$ est donc le point d'intersection de la droite $(AY)$ et de la médiatrice du segment $[PY]$. La bissectrice de l'angle $\widehat{PDA}$ est donc la médiatrice du segment $[PY]$.

De même la bissectrice de l'angle $\widehat{PCB}$ est la médiatrice du segment $[PX]$, où $X$ est le pôle Sud du sommet $A$ dans le triangle $APB$. Les bissectrices des angles $\widehat{PCB}$ et $\widehat{PDA}$ se coupent donc au point $O$ le centre du cercle circonscrit au triangle $APB$. Celui-ci appartient bien à la médiatrice $[AB]$.

**Exercice 136.** (IMO 2022 P4) Soit $ABCDE$ un pentagone convexe tel que $BC = DE$. On suppose qu'il existe un point $T$ à l'intérieur de $ABCDE$ tel que $TB = TD, TC = TE$ et $\widehat{ABT} = \widehat{AET}$. On note $P$ et $Q$ les points d'intersection respectifs des droites $(CD)$ et $(CT)$ avec la droite $(AB)$ ; on suppose que les points $P, B, A$ et $Q$ sont alignés dans cet ordre. De même, on note $R$ et $S$ les points d'intersection respectifs des droites $(CD)$ et $(DT)$ avec la droite $(AE)$, et on suppose que les points $R, E, A$ et $S$ sont eux aussi alignés dans cet ordre. Démontrer que les points $P, S, Q$ et $R$ sont cocycliques.

<u>*Solution de l'exercice 136*</u>




Pour tracer la figure, on commence par le segment $[AT]$. On prend un point $B$ et on note $B'$ son symétrique par rapport au segment $[AT]$. On peut alors choisir $E$ sur le cercle circonscrit au triangle $AB'T$. On choisit ensuite un point $C$ sur le cercle de centre $T$ et de rayon $TE$. Le point $D$ sera alors le point d'intersection du cercle de centre $T$ de rayon $TB$ avec le cercle de centre $E$ de rayon $BC$.

Passons désormais à la résolution de l'exercice. Les triangles $ETD$ et $CTB$ sont isométriques d'après les conditions de longueur. On déduit que

$$\widehat{QTE} = 180° - \widehat{ETD} - \widehat{DTC} = 180° - \widehat{BTC} - \widehat{DTC} = \widehat{STB}$$

Si on note $X$ et $Y$ les points d'intersection respectivement de $(QT)$ avec $(AE)$ et de $(ST)$ avec $(AB)$, alors on a

$$\widehat{EXT} = 180° - \widehat{XET} - \widehat{XTE} = 180° - \widehat{TYB} - \widehat{YTB} = \widehat{TYB}$$

de sorte que $\widehat{QXS} = \widehat{QYS}$ et les points $Q, X, Y$ et $S$ sont cocycliques.
D'autre part, puisque les triangles $EXT$ et $BYT$ partagent les mêmes angles deux à deux, il sont semblables et

$$\frac{XT}{YT} = \frac{ET}{BT} = \frac{TC}{TD}$$

de sorte que d'après Thalès, les droites $(XY)$ et $(CD)$ sont parallèles.

On peut alors conclure

$$\widehat{PQS} = \widehat{YQS} = \widehat{YXS} = \widehat{YXA} = \widehat{PRA} = \widehat{PRS}$$

donc les points $P, R, Q$ et $S$ sont cocycliques.