Progresser en géométrie

Martin Rakovsky

Ce polycopié s'adresse aux élèves des groupes juniors et seniors et a pour but d'accompagner votre progression en géométrie. L'objectif est d'aider les élèves ayant une connaissance des fondamentaux de la géométrie à atteindre un niveau leur permettant, pour les juniors d'affronter les problèmes des Olympiades Balkaniques Junior, et pour les seniors d'affronter les problèmes 1 et 4 des Olympiades Internationales de Mathématiques.

Table des matières

1 Introduction

1.1 Pourquoi faire de la géométrie ?

- Parce que c'est un des quatre thèmes récurrents des différentes Olympiades Internationales auxquelles la France participe. Plus spécifiquement, dans les compétitions se déroulant en une journée (JBMO, BXMO, EMC, OFM) figure quasi systématiquement un problème de géométrie. Dans les compétitions se déroulant sur deux journées (EGMO, RMM, OIM) figure quasi systématiquement un problème de géométrie parmi les problèmes 1,2,4 et 5. Comme pour les autres thèmes de la compétition, les problèmes de géométrie ne s'improvisent pas et nécessitent un minimum de préparation. Mais la nature des arguments invoqués et sa rare présence dans les programmes de lycée en fait un domaine encore plus discriminant. Faire l'impasse sur la géométrie représente donc un risque gigantesque, que trop d'élèves ont pris à leurs dépens et que nous voulons désormais éviter à tout prix.
- Au délà de l'impératif de la compétition, la géométrie possède de nombreuses vertus. La première est esthétique, puisque la géométrie euclidienne donne une manifestation visuelle du caractère bien rangé des mathématiques. Dans une figure de géométrie, les liens cachés ou implicites entre les différents objets deviennent concrets et les intuitions sont immédiatement vérifiables et illustrées. La deuxième est didactique, puisqu'à travers l'apprentissage de la géométrie, on intègre de façon détournée le schéma classique de preuve "hypothèse-théorème-conclusion" qui n'est pas toujours aussi explicite dans les autres domaines (et encore moins dans les copies d'élèves), on intègre les principes des raisonnements par équivalence "il suffit de, il faut que, il est équivalent de montrer que" et on intègre certains arguments d'unicité sur lesquels nous reviendrons dans ce poly. De ce fait, il est en général plus facile de rédiger une solution de géométrie qu'une solution de combinatoire par exemple.
- Même si la géométrie euclidienne ne risque pas de vous accompagner au-delà de votre carrière olympique, il ne faut pas croire qu'elle est complètement déconnectée de l'ensemble des mathématiques (mais pour le découvrir, il faut s'aventurer un peu plus loin que le présent poly). En plus de constituer l'un des berceaux des mathématiques, l'apprentissage de la géométrie fournit une porte d'entrée abordable de l'édifice des mathématiques. Tout comme dans les autres branches, les propriétés sont bâties les unes sur les autres mais la géométrie présente l'avantage que les résultats les plus "élevés" restent relativement accessibles. La géométrie donne un très bon exemple de "comment apprendre des mathématiques" : le début de la progression commence bien sûr par la maitrise d'astuces et de gestes simples, mais l'on doit inévitablement apprendre à franchir certaines difficultés techniques et même conceptuelles et s'approprier des résultats et des configurations trop difficiles pour pouvoir être improvisés.

1.2 Guide d'utilisation du polycopié

Tout d'abord, il est attendu d'avoir une bonne connaissance des points suivants (on entend par là "connaître sans aucune hésitation les énoncés des théorèmes et avoir déjà résolu 10 exercices à l'aide de ces théorèmes") :

- Le théorème de l'angle inscrit et son cas tangentiel ainsi que leur réciproque et le théorème de l'angle au centre.

- Le théorème de Thalès et sa réciproque ainsi que la notion de triangles semblables et leurs caractérisations.
- Les points particuliers des triangles : le centre du cercle circonscrit, l'orthocentre, le centre de gravité et le centre du cercle inscrit ainsi que leurs caractérisations classiques.
- Les caractérisations des triangles isocèles, rectangles et équilatéraux à l'aide des droites particulières du triangle.
- La puissance d'un point par rapport à un cercle.

Pour une révision de ces points, vous êtes invités à consulter le magnifique polycopié de géométrie pour débutant de Cécile Gachet sur le site de la Préparation Olympique.

Ce polycopié comporte trois sections. La première section est consacrée au renforcement des notions déjà connues. L'objectif est que la chasse aux angles et la chasse aux rapports soient parfaitement maitrisées et représentent des alliés dans la résolution d'un problème, grâce auxquels on est capable de prendre des initiatives. La deuxième section est consacrée à certains points théoriques dont la connaissance (et la maitrise) peut s'avérer précieuse dans de nombreux exercices. La dernière section est une collection d'exercices utilisant les deux sections précédentes. Les solutions complètes des exercices marqués d'une $\star$ sont disponibles dans un polycopié annexe.

Que l'on soit clair, il n'y a pas de solutions miracles pour progresser en géométrie (et en mathématiques en général) sans pratique rigoureuse. Les meilleurs polycopiés du monde ne peuvent rien si vous ne passez pas un temps considérable à chercher vous-même les exercices. Même les excellents géomètres peuvent passer plusieurs heures sur les problèmes "faciles" des Olympiades Internationales. La recherche des exercices du présent polycopié demande donc beaucoup de patience. Le plus de temps vous passerez à chercher les exercices sans regarder la solution, le plus rapidement vous progresserez.

1.3 Quelques conseils

- La figure constitue le support de votre réflexion. Une mauvaise figure implique un mauvais support et donc une réflexion plus difficile. En revanche, une figure grande et exacte facilite énormément le travail. Vous pouvez plus facilement confirmer ou infirmer vos conjectures (si trois points semblent alignés, trois droites semblent concourantes, deux droites semblent parallèles, quatre points semblent cocycliques). Bien sûr, tracer une figure propre demande du temps, mais il s'agit là d'un très bon investissement. Le tracé d'une figure est également un domaine dans lequel la pratique rend plus efficace. J'ai souvent croisé des élèves qui ont choisi, par excès de paresse, d'ignorer ce conseil de bon sens en objectant que certains brillants géomètres réfléchissent sur des figures à main levée (souvent d'une qualité bien supérieure à celle de certaines figures propres). L'expérience de vos encadrants sur les résolutions françaises aux problèmes 1/4 de géométrie aux OIM/RMM suggère le contraire : une nette dichotomie entre les participants qui ont tracé une figure claire et ont résolu l'exercice et les participants qui ont échoué à résoudre le problème et qui ne comptaient dans leurs brouillons aucune figure propre voire aucune figure à la règle et au compas. Vous voilà prévenus.
- Commencer par tracer une figure à la main pour voir la forme de la figure : quelle taille elle a, où se trouvent les points, quels sont les objets mis en jeu. Vous pouvez alors déterminer un ordre judicieux (souvent canonique) dans lequel tracer les points. Tracer ensuite la figure

exacte sur une feuille entière, dans le sens de la longueur ou de la largeur, à déterminer grâce à la figure faite à la main au préalable.

- Si l'on parle d'un triangle ABC, il est souvent judicieux de tracer d'abord son cercle circonscrit puis ensuite de placer les points A, B et C dessus. Si l'on parle de la bissectrice d'un des angles du triangle, il est souvent judicieux de placer son pôle Sud puis ensuite de tracer la bissectrice (voir la section "pôle Sud"). Le triangle tracé doit être le plus quelconque possible (pas isocèle, pas rectangle...).
- Ne pas charger la figure de trop d'annotations ou de couleurs au risque de ne plus rien y voir, y compris dans votre preuve. De même, ne pas donner de nom à tous les angles. En général, trois angles, trois couleurs ou trois marques suffisent amplement. Si un angle est noté α, inutile d'inscrire $180° - \alpha$ sur son supplémentaire (ou de noter δ cet angle et d'établir en début de preuve que $\delta = 180° - \alpha$).
- Commencer par des idées simples : recherche de propriétés cachées (ces points semblent alignés, ces droites semblent concourantes), chasse aux angles, recherche de triangles semblables, recherche de configurations connues. Ensuite seulement, vous pouvez chercher des arguments plus conceptuels.
- Les exercices d'olympiades (en tout cas les exercices 1 et 4 d'un OIM par exemple) sont rarement uniquement des manipulations des outils usuels comme la chasse aux angles. La difficulté et l'originalité du problème résident souvent dans un argument d'ordre géométrique : reformulation de l'énoncé, remarque d'une propriété géométrique sur la figure ("tiens, ces points semblent alignés"), redéfinition/introduction d'un point. De tels arguments combinés aux outils usuels ont souvent raison du problème.
- Si vous bloquez, relisez les hypothèses du problème et voyez si vous les avez toutes utilisées. Sinon, demandez-vous ce que l'hypothèse peut apporter.
- Si la figure exacte est non triviale (parce que l'un des points est défini par une égalité de longueur ou d'angle), trouver comment tracer la figure exacte constitue souvent une partie de la solution.

1.4 Notations et dénominations

Dans la suite (ainsi que dans les corrigés), on pourra parfois noter $\mathcal{C}_{XYZ}$ (resp. $\mathcal{C}_{WXYZ}$) le cercle passant par les points X, Y et Z (resp. les points W, X, Y et Z).

La plupart des exercices donnés admettent une source, notée entre parenthèses. On utilise notamment les notations suivantes :

— **IMO** désigne l'Olympiade Internationale de Mathématiques.
— **JBMO** désigne l'Olympiade Balkanique Junior.
— **EGMO** désigne l'Olympiade Européenne pour filles.
— **RMM** désigne le Romanian Master of Mathematics.
— **[Pays] MO** désigne l'Olympiade Mathématique du pays cité.
— **[Pays] TST** désigne le Test de Sélection du pays cité.
— **[Compétition] SL** signifie que le problème est issu de la Shortlist de la compétition. La Shortlist est constitué de l'ensemble des problèmes proposés pour la compétition et retenus par le comité de sélection des problèmes. Ainsi, les problèmes de la Shortlist sont des problèmes qui ont été envisagés pour figurer dans l'épreuve, mais qui n'ont finalement pas été retenus. Les problèmes de la Shortlist sont classés par thème et par difficulté (G1 désignant le problème le plus facile des problèmes de géométrie de la Shortlist).

2 Renforcer les bases

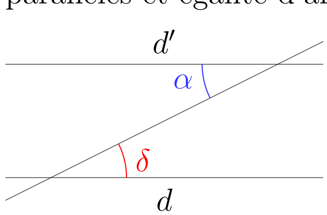
2.1 Le monde des angles

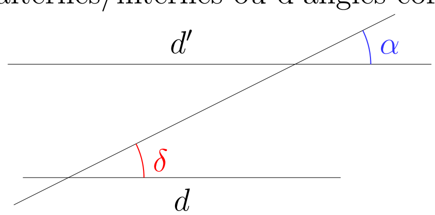
La chasse aux angles est l'outil le plus élémentaire de la géométrie. Il convient donc d'en acquérir une bonne maitrise avant d'aborder de la théorie plus élaborée. L'objectif est que mener à bien une chasse aux angles devienne une formalité.

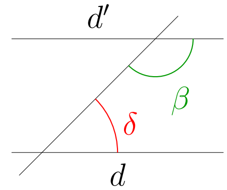
2.1.1 Armurerie

Rappelons quelques utilisations de la chasse aux angles :

- **Montrer que deux droites sont parallèles :** on utilise pour cela l'équivalence entre droites parallèles et égalité d'angles alternes/internes ou d'angles correspondants :

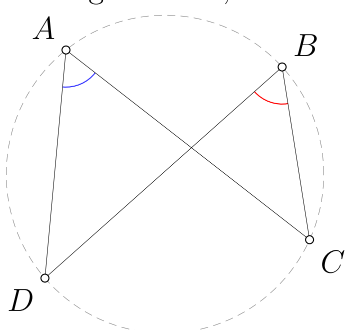


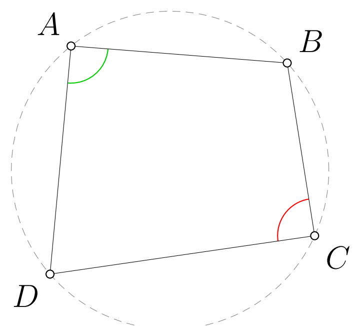




$\delta = \alpha \Leftrightarrow d \,||\, d'$ $\qquad$ $\delta = \alpha \Leftrightarrow d \,||\, d'$ $\qquad$ $\delta = 180° - \beta \Leftrightarrow d \,||\, d'$

- **Montrer que quatre points sont cocycliques :** Il s'agit d'exploiter la réciproque du théorème de l'angle inscrit, sous ses deux formes :



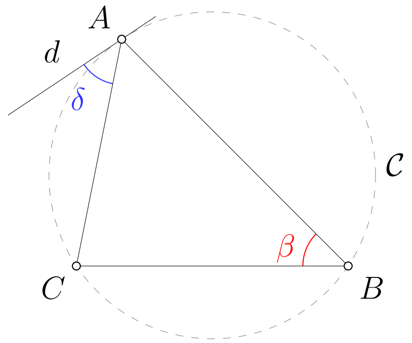


$\widehat{DAC} = \widehat{DBC}$
$\Leftrightarrow$ A,B,C et D cocycliques

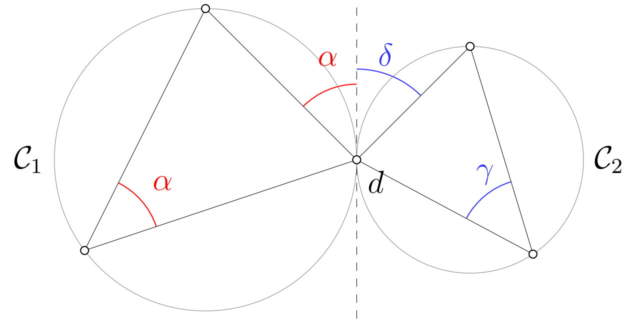
$\widehat{DAB} = 180° - \widehat{DCB}$
$\Leftrightarrow$ A,B,C et D cocycliques

Une remarque très importante est que souvent, obtenir que quatre points sont cocycliques fournit immédiatement plusieurs nouvelles égalités d'angles. Ainsi, si vous avez montré que A, B, C et D sont cocycliques grâce à l'égalité d'angles de la configuration de gauche, vous obtenez également l'égalité d'angle de la figure de droite (ou réciproquement). Obtenir une égalité à partir de l'autre est souvent une étape des exercices.

- **Montrer qu'une droite et un cercle sont tangents :** Il s'agit une fois de plus d'exploiter la réciproque du théorème de l'angle inscrit, mais dans le cas tangentiel cette fois-ci (figure de gauche).



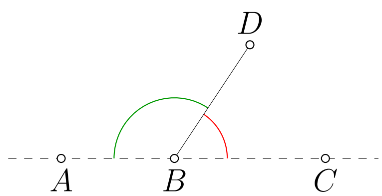
$\color{red}{\beta} = \color{blue}{\delta} \Leftrightarrow$ d tangente à $\mathcal{C}$ en A



$\color{blue}{\gamma} = \color{blue}{\delta} \Rightarrow \mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ tangents en X

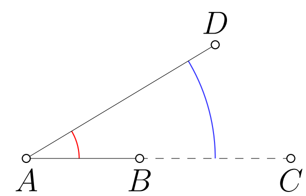
Lorsque l'on souhaite montrer que deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont tangents en un point X, la méthode canonique consiste à introduire la tangente d à $\mathcal{C}_1$ en X et à montrer que d est tangente à $\mathcal{C}_2$ en X, via l'angle tangentiel (figure de droite).

- **Montrer que trois points sont alignés :** Il s'agit là d'une astuce un peu plus élaborée. La méthode naïve pour montrer que trois points A, B et C sont alignés dans cet ordre est d'utiliser les autres points de la figure pour montrer que $\widehat{ABC} = 180°$ (figure de gauche). On attire votre attention sur une autre façon, plus astucieuse, d'utiliser les autres points de la figure (figure de droite) :



$\color{red}{\widehat{CBD}} = 180° - \color{green}{\widehat{DBA}}$

$\Leftrightarrow$ A,B,C et D alignés



$\color{red}{\widehat{BAD}} = \color{blue}{\widehat{DAC}}$

$\Leftrightarrow$ A,B,C et D alignés

Voici une liste d'exercices nécessitant d'élaborer une chasse aux angles avec possiblement plusieurs étapes.

Exercice 1. * Soit ABC un triangle rectangle en A. Soit L un point sur le segment $[BC]$. Le cercle circonscrit au triangle ABL recoupe la droite (AC) au point M et le cercle circonscrit au triangle ACL recoupe la droite (AB) au point N. Montrer que les points L, M et N sont alignés.

Exercice 2. * Soit ABC un triangle avec $AB < AC$, Γ sont cercle circonscrit. La tangente au cercle γ en le point A coupe la droite (BC) en le point P. La bissectrice de l'angle $\widehat{APB}$ coupe la droite (AB) en le point R et la droite (AC) en le point S. Montrer que le triangle ARS est isocèle en A.

Exercice 3. * Soit $ABCD$ un rectangle, P le milieu de $[AB]$ et Q le point de $[PD]$ tel que les droites (CQ) et (PD) sont perpendiculaires. Montrer que le triangle BQC est isocèle.

Exercice 4. (JBMO SL 2015 G1) Soit ABC un triangle et soit t la tangente au cercle circonscrit au triangle ABC en C. Une droite parallèle à t coupe $[AC]$ en D et $[AB]$ en E. Montrer que les points A, B, D et E sont cocycliques.

Exercice 5. ⋆ (Tour préliminaire Suisse 2019) Soit k un cercle de centre O et soit A, B et C trois points sur le cercle k tels que $\widehat{ABC} > 90$. La bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$ recoupe le cercle circonscrit au triangle BOC en un point D. Montrer que D appartient à la droite (AC).

Exercice 6. ⋆ (Envoi Géométrie 2020-2021 P4) Soit ABC un triangle et soit Ω son cercle circonscrit. Soit P un point sur la tangente en A au cercle Ω. On note E et D les projections orthogonales de P sur les côtés AC et AB. Montrer que la droite (ED) est perpendiculaire à la droite (BC).

Exercice 7. ⋆ Soient Γ et Γ' deux cercles tangents en A, Γ' étant à l'intérieur de Γ. Soit D un point du cercle Γ' autre que A, on note M et N les points d'intersection de la tangente au cercle Γ' en D avec le cercle Γ. Montrer que : $\widehat{NAD} = \widehat{MAD}$.

Exercice 8. ⋆ (Envoi Géométrie 2020/2021 exo 12) Soit ABC un triangle acutangle tel que $|AC| > |BC|$. Soit H l'orthocentre du triangle ABC, N le pied de la hauteur issue du sommet B et P le milieu du segment $[AB]$. Les cercles circonscrits aux triangles ABC et CNH se recoupent au point D. Montrer que les points D, N, P et B sont cocycliques.

Exercice 9. ⋆ (TST belge 2021) Soit ABC un triangle. Les tangentes au cercle (ABC) en B et C se coupent en T. La parallèle à (AB) passant par T coupe (AC) au point S. Montrer que $AS = BS$.

Exercice 10. (Droite de Simson) Soit ABC un triangle et P un point du plan. On note X, Y et Z les projetés orthogonaux du point P respectivement sur les droites $(BC), (CA)$ et (AB). Montrer que X, Y et Z sont alignés si et seulement P est sur cercle circonscrit au triangle ABC.

Exercice 11. ⋆ (PAMO 2022 P1) Soit ABC un triangle tel que $\widehat{ABC} \neq 90°$ et tel que $AB < BC, AC$. Soit H l'orthocentre du triangle ABC. Soit Γ le cercle de centre B et de rayon AB. Soit D le second point d'intersection de la droite (AC) avec le cercle Γ.Soit E le second point d'intersection du cercle Γ avec le cercle circonscrit au triangle BCD. Soit F le point d'intersection des droites (DE) et (BH).

Montrer que la droite (BD) est tangente au cercle circonscrit au triangle DFH.

Exercice 12. ⋆ (Envoi géométrie 2020-2021 P7) Soit ω_1 et ω_2 deux cercles qui se coupent en deux points qu'on note P et Q. Soit t une tangente commune aux cercles ω_1 et ω_2, de telle sorte que la droite t est tangente au cercle ω_1 au point A et au cercle ω_2 au point B et on suppose que le point P est plus proche de la droite t que le point Q. On note C le second point d'intersection de la tangente en P au cercle ω_1 avec le cercle ω_2. La droite (AP) et la droite (BC) se coupent au point R. Montrer que le cercle circonscrit au triangle PRQ est tangent aux droites (BP) et (BC).

Exercice 13. (BXMO 2022) Soit ABC un triangle aux angles aigus. Soit B_1 le point de la demi-droite $[AC)$ tel que $AB_1 = BB_1$. Soit C_1 le point de la demi-droite $[AB)$ tel que $AC_1 = CC_1$. Soient B_2 et C_2 les points de la droite (BC) tels que $AB_2 = CB_2$ et $BC_2 = AC_2$. Montrer que B_1, C_1, B_2 et C_2 sont cocycliques.

Exercice 14. (BXMO 2019) Deux cercles Γ_1 et Γ_2 se coupent en A et Z deux points distincts. Soit B le centre du cercle Γ_1 et C le centre du cercle Γ_2. La bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{BAC}$ recoupe le cercle Γ_1 en le point X et le cercle Γ_2 en le point Y. Montrer que la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{BZC}$ passe par le centre du cercle circonscrit du triangle XYZ.

Exercice 15. ⋆ (PAMO 2021 P6) Soit $ABCD$ un trapèze qui n'est pas un parallélogramme et tel que $(AD) \parallel (BC)$. Soit O le point d'intersection des droites (BD) et (AC) et soit S le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles AOB et COD. Montrer que les cercles circonscrits aux triangles ASD et BSC sont tangents.

Exercice 16. (JBMO 2016) Soit $ABCD$ un trapèze (avec $(AB > CD$ et (AB) et (CD) parallèles). On suppose que le trapèze possède un cercle inscrit de centre I. Le cercle inscrit au triangle ABC est tangent à la droite (AB) en M et à (AC) en N. Montrer que le point I appartient à la droite (MN).

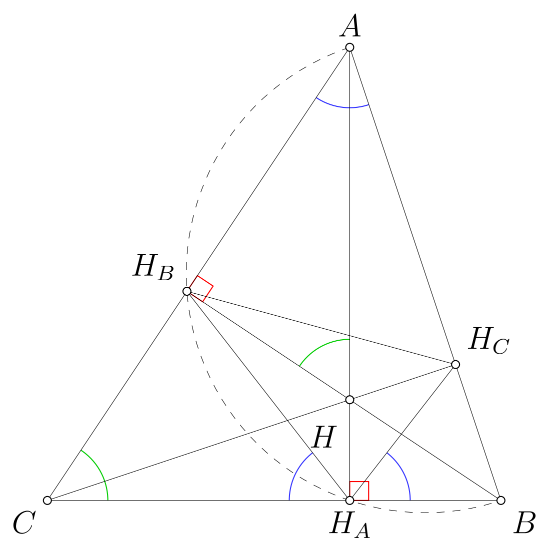
Exercice 17. ⋆ (RMM 2018 P1) Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique et soit P un point sur le segment $[AB]$. La diagonale (AC) coupe le segment $[DP]$ au point Q. La parallèle à (CD) passant par P coupe la demi-droite $[CB)$ au point K. La parallèle à (BD) passant par Q coupe la demi-droite $[CB)$ au point L. Montrer que les cercles circonscrits aux triangles BKP et CLQ sont tangents.

2.1.2 Chasse aux angles dans un triangle

L'un des objets d'étude les plus courants dans dans les exercices de géométrie est le triangle ainsi que ses points particuliers. On est ainsi régulièrement amenés à calculer les angles mettant en jeu les points particuliers du triangle. Moins qu'une véritable nouvelle technique, on propose ici un état d'esprit consistant à exprimer les différents angles de la figure en fonction des angles du triangle de base. Il est alors beaucoup plus facile de repérer des relations entre les points du triangle si tous les angles sont exprimés en fonction des trois mêmes paramètres.

Dans la suite, on se donne ABC un triangle et on note $\alpha = \widehat{BAC}, \beta = \widehat{ABC}$ et $\gamma = \widehat{ACB}$.
On se propose de calculer, en fonction de α, β et γ, les angles impliquant les points particuliers du triangle.
On commence avec des calculs concernant les pieds des hauteurs.

Exemple 2.1. Soit ABC un triangle, H son orthocentre, H_A, H_B et H_C les pieds des hauteurs issues des sommets A, B et C. Exprimer les angles suivants en fonction α, β et γ : $\widehat{H_AAB}, \widehat{AHH_B}$, $\widehat{H_BH_AC}, \widehat{AHB}$ et $\widehat{H_BH_AH_C}$.



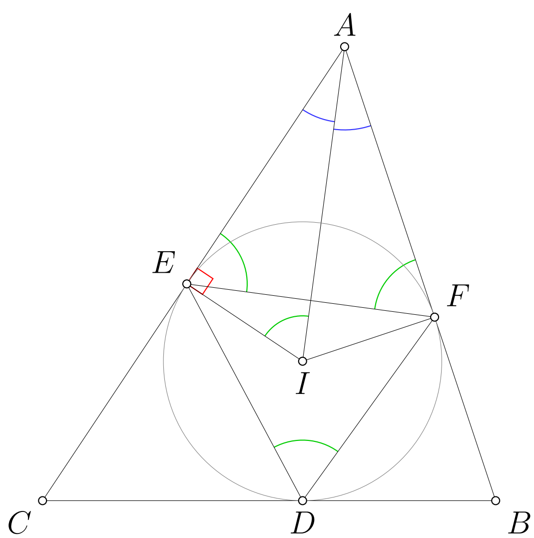
- Le triangle AH_AB est rectangle en H_A, de sorte que $\widehat{H_AAB} = 90° - \widehat{ABH_A} = 90° - \beta$. De la même façon, on a par exemple $\widehat{CAH_A} = 90° - \gamma$ et $\widehat{ABH_B} = 90° - \alpha$.
- Le triangle HH_BA est rectangle en H_B, de sorte que $\widehat{AHH_B} = 90° - \widehat{HAH_B} = 90° - \widehat{H_AAC} = \gamma$.

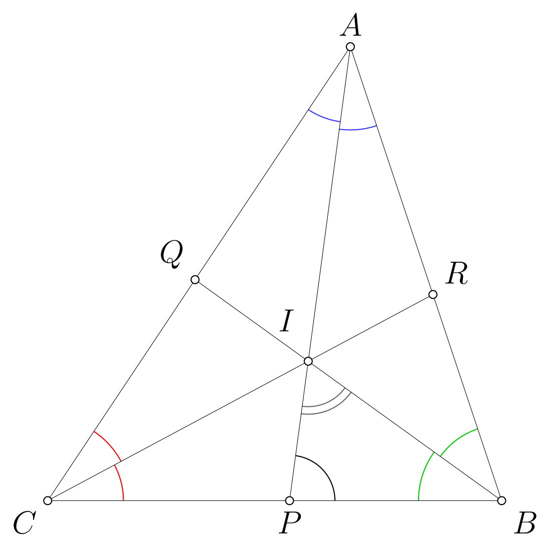
- On a $\widehat{BH_AA} = 90° = \widehat{BH_BA}$ de sorte que les points A, H_B, H_A et B sont cocycliques. Ainsi, d'après le théorème de l'angle inscrit, $\widehat{H_BH_AC} = 180° - \widehat{H_BH_AB} = \widehat{H_BAB} = \alpha$. De la même façon, $\widehat{H_CH_AB} = \alpha$.
- Dans le triangle AHB, on a $\widehat{AHB} = 180° - \widehat{HAB} - \widehat{HBA} = 180° - (90° - \beta) - (90° - \alpha) = \alpha + \beta = 180° - \gamma$.
- On a $\widehat{H_BH_AH_C} = 180° - \widehat{H_BH_AC} - \widehat{H_CH_AB} = 180° - \alpha - \alpha = 180° - 2\alpha$.

Il existe de nombreuses façons d'arriver à chacun des résultats énoncés.
La section 3.4 donnera d'autres propriétés sur les pieds des hauteurs, qui seront l'occasion de systématiser les calculs précédents.

Voyons à présent des calculs d'angles autour du centre du cercle inscrit.

Exemple 2.2. Soit ABC un triangle, I le centre de son cercle circonscrit. On note D, E et F les point de contact du cercle inscrit respectivement avec les côtés BC, CA et AB. On note P, Q et R les pieds des bissectrices issues respectivement des sommets A, B et C. Exprimer les angles suivants en fonction de α, β et γ : $\widehat{FEA}, \widehat{AIE}, \widehat{EDF}, \widehat{APB}, \widehat{BIC}, \widehat{PIB}$.





- Puisque les droites (AE) et (AF) sont tangentes au cercle inscrit en E et F, $AE = AF$. Le triangle AEF est isocèle, ainsi $\widehat{EAF} + 2\widehat{FEA} = 180°$, de sorte que $\widehat{FEA} = 90° - \frac{\alpha}{2}$.
- Le point I est le centre du cercle inscrit et (AE) est tangente à ce cercle en E. Le triangle AEI est donc rectangle en E et $\widehat{AIE} = 90° - \widehat{EAI}$. Or la droite (AI) est la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$, on a alors $90° - \frac{\alpha}{2}$.
- D'après le théorème de l'angle tangentiel, $\widehat{EDF} = \widehat{FEA} = 90° - \frac{\alpha}{2}$.
- En utilisant que (AP) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$, dans le triange APB on a $\widehat{APB} = 180° - \widehat{PBA} - \widehat{PAB} = 180° - \beta - \frac{\alpha}{2}$. Notons qu'on a de même $\widehat{APC} = 180° - \gamma - \frac{\alpha}{2}$, de sorte qu'on a aussi $\widehat{APB} = 180° - \widehat{APC} = \frac{\alpha}{2} + \gamma$.
- En utilisant que (BI) et (CI) sont les bissectrices des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$, dans le triangle BIC on a $\widehat{BIC} = 180° - \widehat{IBC} - \widehat{ICB} = 180° - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}$.

- De même que précédemment, $\widehat{AIB} = 180° - \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2}$, de sorte que $\widehat{PIB} = 180° - \widehat{AIB} = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$.

Inversement, voici des angles qui ne s'expriment pas comme combinaison linéaire des angles α, β et γ (il n'est donc pas utile d'essayer de les exprimer simplement dans un exercice de géométrie) :
— L'angle formé par la médiane issue de A avec les côtés du triangle.
— L'angle formé par la symédiane issue de A avec les côtés du triangle.
— L'angle formé par la droite passant par A et le point D de contact avec $[BC]$ du cercle inscrit.

Exercice 18. Soit ABC un triangle et I_A le centre du cercle $A-$exinscrit. Calculer en fonction de α, β et γ l'angle $\widehat{BI_AC}$.

Exercice 19. * Soit ABC un triangle aux angles aigus tel que $\widehat{BAC} = 60°$. On note O le centre du cercle circonscrit, H l'orthocentre et I le centre du cercle inscrit du triangle ABC. Montrer que B, I, O, H et C sont cocycliques.

Exercice 20. (Grèce JBMO TST 2019) Soit ABC un triangle tel que $AB > AC$, O le centre de son cercle circonscrit et D le milieu du segment $[BC]$. La perpendiculaire à la droite (AB) passant par D coupe (AO) en Z. Montrer que les points A, Z, D et C sont cocycliques.

Exercice 21. (Korean final round 2016 P1) Soit ABC un triangle et D et E les pieds des hauteurs issues des sommets B et C. Soient S et T les symétriques du point E par rapport aux côtés $[BC]$ et $[CA]$. Soit Γ le cercle circonscrit au triangle CST et O le centre de Γ. La droite (AC) recoupe le cercle Γ au point X. Montrer que les droites (OX) et (DE) sont perpendiculaires.

Exercice 22. (Italia MO 2016 P3) Soit Γ le cercle ex-inscrit au triangle ABC opposé au sommet A. Soit X le centre de Γ, et soit D, E et F les points de tangence de Γ avec $[BC]$ et les droites (AB) et (AC), respectivement. Soit J le point d'intersection des droites (BX) et (EF), et K le point d'intersection des droites (CX) and (EF). Prouver que $(BK), (CJ)$ et (XD) sont concourantes.

Exercice 23. (EGMO 2019 P4) Soit ABC un triangle I le centre de son cercle circonscrit. Le cercle tangent à la droite (AI) en I et passant par B recoupe le segment $[AB]$ en P. Le cercle tangent à la droite (AI) en I et passant par C recoupe le segment $[AC]$ en Q. Montrer que (PQ) est tangente au cercle inscrit du triangle ABC.

Exercice 24. (IMO SL 2010 G1) Soit ABC un triangle et D, E et F les pieds des hauteurs issus des sommets A, B et C. Soit P l'un des deux points d'intersection de la droite (EF) avec le cercle circonscrit au triangle ABC. Les droites (BP) et (DF) se coupent en Q. Montrer que $AP = AQ$.

Exercice 25. * (EGMO 2022 P1) Soit ABC un triangle dans lequel $BC < AB$. Soit P un point distinct de B sur le segment $[AB]$ et Q un point distinct de C sur le segment $[AC]$ tels que $BQ = BC = CP$. Soit T le centre du cercle circonscrit au triangle APQ, H l'orthocentre du triangle ABC et S le point d'intersection des droites (BQ) et (CP). Montrer que les points T, H et S sont alignés.

Exercice 26. * (IMO SL 1995 G3) Soit ABC un triangle et D, E et F les points de contact du cercle inscrit respectivement aux côtés $[BC], [CA]$ et $[AB]$. Soit X un point à l'intérieur du triangle ABC tel que le cercle inscrit ω au triangle XBC soit tangent au segment $[BC]$ au point D. Soient Y et Z les points de contact du cercle ω respectivement avec les côtés $[XB]$ et $[XC]$. Montrer que les points E, Y, X et F sont cocycliques.

2.2 Le monde des longueurs

2.2.1 Rappels des outils

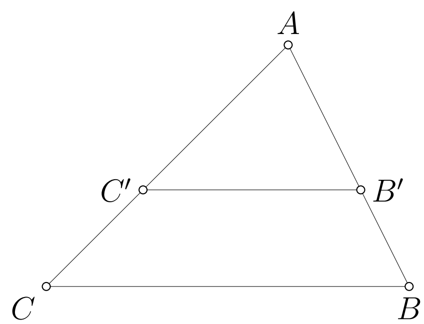
Maintenant que la technique de la chasse aux angles est maitrisée, passons à la manipulations des longueurs. On rappelle les résultats essentiels qui sont à notre disposition :

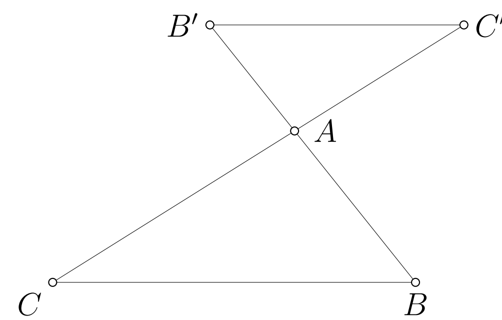
- **La notion de triangles semblables**, qui constitue un portail entre le monde des angles et le monde des longueurs : obtenir que des triangles sont semblables à l'aide d'égalités d'angles permet d'obtenir des égalités de rapports de longueur. A l'inverse, obtenir des triangles semblables à l'aide d'une égalité de rapports permet d'obtenir des égalités d'angles que l'on n'avait pas avant.

  On rappelle d'ailleurs l'importance de l'ordre des lettres lorsque l'on décrit la paire de triangles : $\Delta ABC \simeq \Delta A'B'C'$ signifie que le sommet A du triangle ABC est identifié au sommet A' du triangle $A'B'C'$ dans la relation de similitude, etc... Le bon ordre permet d'identifier en un clin d'oeil les différentes relations vérifiées par le triangle :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{CA}{C'A} \quad , \quad \widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'} \quad , \quad \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'} \quad , \quad \widehat{BCA} = \widehat{B'C'A'}$$

- **Un cas particulier de la notion précédente est le théorème de Thalès**, dont il convient de savoir retrouver les relations dans les différentes configurations.

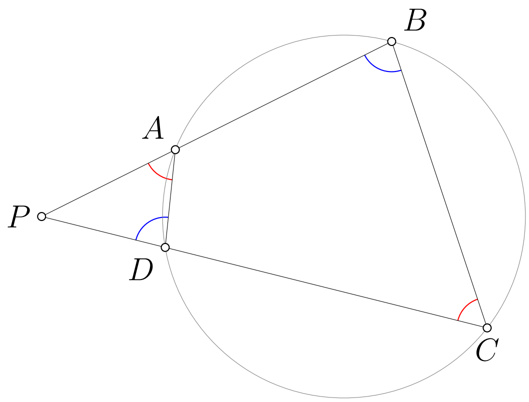




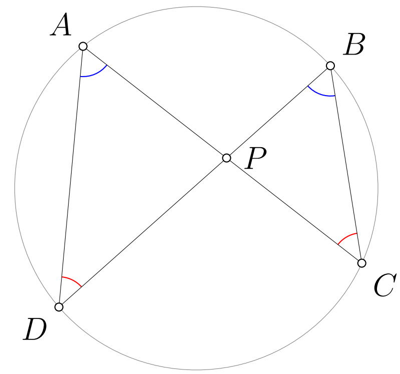
$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{B'C'} \quad \text{et} \quad \frac{BB'}{AB'} = \frac{CC'}{AC'}$$

- Un cas particulier du théorème de Thalès est le cas de la droite des milieux. La présence d'un milieu de segment dans une figure peut inspirer l'introduction d'autres points milieux pour obtenir des droites des milieux et donc des droites parallèles.

- **La puissance d'un point par rapport à un cercle**, conséquence du premier point, dont il convient également de savoir retrouver les différentes relations selon les contextes.

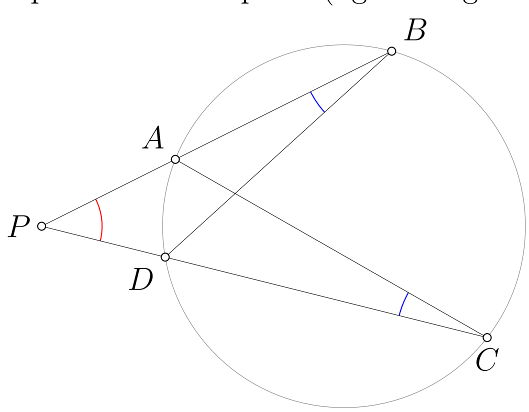


$PA \cdot PB = PC \cdot PD$

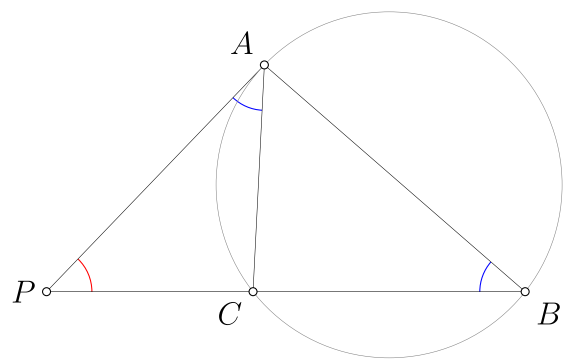


$PA \cdot PC = PB \cdot PD$

Il s'agit d'une équivalence. Ainsi, sur la figure de gauche, si les points P, A et B sont alignés ainsi que les points P, D et C et que l'on a $PA \cdot PB = PC \cdot PD$, alors les points A, B, C et D sont cocycliques.
On dispose donc d'un nouveau procédé pour montrer que des points sont cocycliques, à l'aide de calculs de longueurs plutôt que de calculs d'angles.
Il est à noter que les triangles suivants sont également semblables dans la configuration de la puissance d'un point (figure de gauche) :



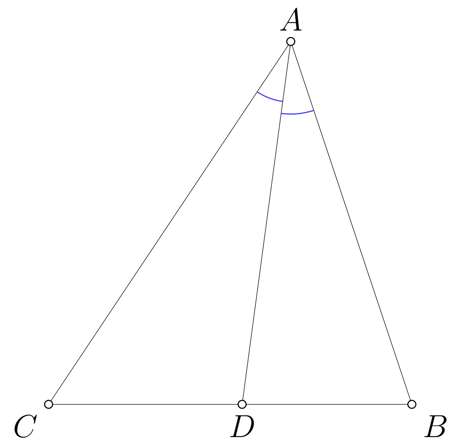
$\Delta PAC \simeq \Delta PDB$



$PA^2 = PB \cdot PC$

Le cas tangentiel est également à retenir, et découle du théorème de l'angle tangentiel (figure de droite).

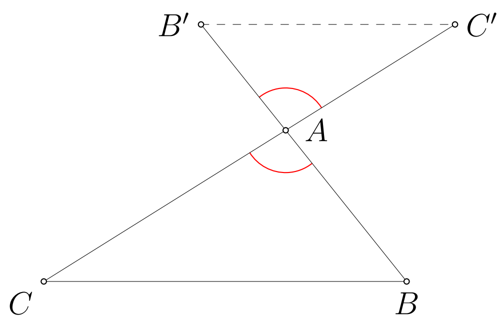
- **La loi des sinus** qui relie directement longueur et angles dans un triangle et qui, au prix d'un peu de trigonométrie, permet de passer d'angles à longueurs là où les triangles semblables sont inefficaces. (Nous nous sommes abstenus de donner des exercices utilisant la loi des sinus dans ce polycopié)
- **Le théorème de la bissectrice**, qui est une conséquence de la loi des sinus :



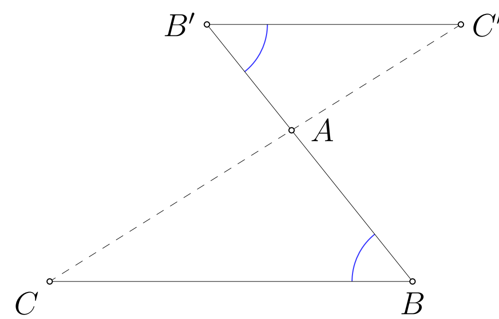
$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

Il s'agit d'une équivalence. Ainsi, pour montrer qu'une droite est la bissectrice, il suffit de montrer une égalité de rapport, ce qui est parfois plus pratique si le contexte est plus favorable à des calculs de rapports qu'à des calculs d'angles. A l'inverse, une hypothèse impliquant une bissectrice peut fournir une égalité de rapport très intéressante à comparer aux autres relations à notre disposition.

- **La réciproque du théorème de Thalès** qui permet, à partir d'une égalité de rapports, d'obtenir un parallélisme ou même *(et ça on a tendance à l'oublier)* un alignement de trois points.



$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} \Rightarrow (BC)\,||\,(B'C)$$



$$\frac{AB'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} \Rightarrow C', A, C \text{ alignés}$$

- Il est très important d'être à l'aise avec les produits en croix, pour obtenir les égalités de rapport sous toutes leurs formes :

$$\frac{XY}{ZW} = \frac{AB}{CD} \Leftrightarrow \frac{XY}{AB} = \frac{ZW}{CD} \Leftrightarrow XY \cdot CD = AB \cdot ZW$$

On pourra pratiquer ces rappels à l'aide des exercices suivants :

Exercice 27. * Soit $ABCD$ un parallèlogramme, M un point du segment $[AC]$. Soit E le projeté orhtogonal de M sur le segment $[AB]$ et F le projeté orhtogonal sur le segment $[AD]$. Montrer que $\frac{ME}{MF} = \frac{AD}{AB}$.

Exercice 28. ⋆ (Grèce MO 2019) Soit ABC un triangle avec $AB < AC < BC$. Soit O le centre de son cercle circonscrit et D le milieu de l'arc AB ne contenant pas le point C. Soit E le points d'intersection des droites (AD) et (BC). Le cercle circonscrit au triangle BDE recoupe la droite (AB) au point Z. Le cercle circonscrit au triangle ADZ recoupe la droite (AC) au point H. Montrer que $BE = AH$.

Exercice 29. ⋆ (Envoi Géométrie 2022/2023 P4) Soient ω_1 et ω_2 deux cercles disjoints. Une tangente commune extérieure à ces deux cercles coupe ω_1 en A et ω_2 en B. La deuxième tangente commune extérieure à ces deux cercles coupe ω_1 en D et ω_2 en C. La droite (BD) coupe ω_1 en le point P autre que D et ω_2 en le point Q autre que B. Montrer que $BQ = DP$.

Exercice 30. Soit ABC un triangle. On note H_A le pied de la hauteur issue de A. On note P et Q les projections orthogonales de H_A sur les côtés $[AB]$ et $[AC]$ respectivement. Montrer que les quatre points B, P, Q et C sont sur un même cercle.

Exercice 31. (Envoi Géométrie 2021/2022 P4) Soit Γ un cercle. Soit ω un cercle tangent intérieurement au cercle Γ et soit T leur point de tangence. Soit P un point de ω différent de T. Soit O le centre de ω. On note M le milieu du segment $[PT]$. Soient A et B les points d'intersection de la tangente à ω au point P avec le cercle Γ. Montrer que O, M, A, B sont cocycliques.

Exercice 32. ⋆ (Envoi Géométrie 2021/2022 P13) Soit $ABCD$ un trapèze inscrit dans un cercle Γ et dans lequel les droites (AB) et (CD) sont parallèles. Un cercle passant par C et D recoupe les droites (CA) et (CB) respectivement en A_1 et B_1. Soit A_2 le symétrique du point A_1 par rapport au milieu du segment $[CA]$. Soit B_2 le symétrique du point B_1 par rapport au milieu du segment $[CB]$. Montrer que les points A, B, A_2 et B_2 sont cocycliques.

Exercice 33. ⋆ (JBMO SL 2015 G2) Soit k un cercle et soit P un point à l'extérieur du cercle. Les tangentes au cerlce k passant par le point P touchent le cercle k en les points A et B. Soit M le milieu du segment $[BP]$. Soit C le second point d'intersection de la droite (AM) avec le cercle k. Soit D le second point d'intersection de la droite (PC) avec le cercle k. Montrer que les droites (AD) et (BP) sont parallèles.

Exercice 34. ⋆ (JBMO 2005) Soit ABC un triangle aux angles aigus avec $AC < AB$ et soit k son cercle circonscrit. Soit P la point d'intersection de la tangente au cercle k en A et de la droite (BC). Soit M le milieu du segment $[PA]$ soit R le second point d'intersection de la droite (MB) avec le cercle k. La droite (PR) recoupe le cercle k en un point S. Montrer que les droites (CS) et (AP) sont parallèles.

Exercice 35. ⋆ (Iran MO 2018 Round 3) Soit ABC un triangle et soient D, E et F les points de contact du cercle inscrit respectivement avec les côtés $[BC], [CA]$ et $[AB]$. Soit P un point tel que $PF = FB$, les droites (FP) et (AC) sont parallèles et les points P et C sont dans le même demi-plan délimité par la droite (AB). Soit Q un point tel que $QE = EC$, les droites (EQ) et (AB) sont parallèles et les points Q et B sont dans le même demi-plan délimité par la droite (AC). Montrer que les points P, D et Q sont alignés.

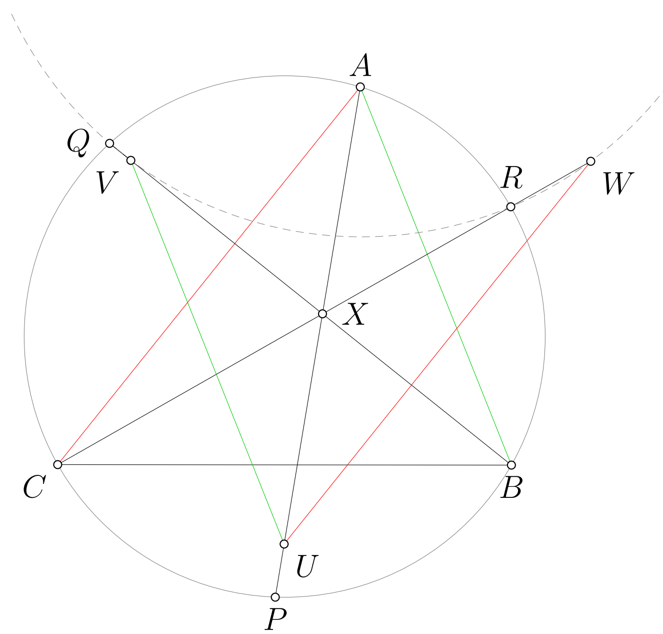
2.2.2 La chasse aux rapports

On se propose d'aller un peu plus loin que de simples rappels et de présenter la technique de la chasse aux rapports. Tout comme la chasse aux angles, la chasse aux rapports consiste à combiner plusieurs égalités de rapports pour en obtenir de nouvelles. Cependant, cette action nécessite

parfois des astuces de manipulations algébriques (télescopage, ajout d'un même membre des deux côtés de l'équation...).
La meilleure façon de présenter la chasse aux rapports est à travers un exemple :

Exemple. (British MO 2011 round 2) Soit ABC un triangle et X un point situé à l'intérieur du triangle ABC. Les droites $(AX), (BX)$ et (CX) recoupent le cercle circonscrit au triangle ABC respectivement en les points P, Q et R. Soit U un point appartenant au segment $[PX]$. Les parallèles aux droites $(AB), (AC)$ passant par U coupent respectivement les droites (XQ) et (XR) en les points V et W. Montrer que les points R, W, V et Q sont cocycliques.

Solution



Nous allons traduire les diverses hypothèses de l'énoncé en terme d'égalité de rapports ou d'égalités entre produits de longueurs, dans le but d'établir que $XQ \cdot XV = XR \cdot XW$, ce qui est équivalent par puissance d'un point au résultat voulu.

Tout d'abord, d'après le théorème de Thalès pour les paires de droites (AB) et (UV) puis (AC) et (UW), on a les égalités de rapports suivantes :

$$\frac{XV}{XB} = \frac{XU}{XA} = \frac{UV}{AB} \quad \text{et} \quad \frac{XW}{XC} = \frac{XU}{XA} = \frac{UW}{AC}$$

On peut déjà en déduire que $\frac{XV}{XB} = \frac{XU}{XA} = \frac{XW}{XC}$, ce qui signifie que les droites (VW) et (BC) sont parallèles, d'après la réciproque du théorème de Thalès.

Il faut désormais "attraper" des relations sur les longueurs XQ et XR. Pour cela, on utilise la puissance d'un point pour obtenir que $XB \cdot XQ = XC \cdot XR$.

On peut désormais conclure. En effet :

$$XQ \cdot XV = \frac{XC \cdot XR}{XB} \cdot XV = XR \cdot \frac{XC}{XB} \cdot Xv = XR \cdot XW$$

ce qui est l'égalité voulue.

Remarque : Les étapes "traduire les hypothèses en égalités de rapports" et "traduire la conclusion voulue en égalités de rapports" sont souvent assez aisées, mais c'est être capable d'utiliser l'un pour trouver l'autre qui peut nécessiter plus de temps. C'est alors qu'il faut être capable de manipuler algébriquement les égalités de rapports pour sortir les relations désirées.

Ici, nous sommes partis de $XQ \cdot XV$ en espérant trouver $XR \cdot XW$ à l'autre bout de notre calcul. Il n'est pas toujours facile de savoir de quel côté partir, ou même de quelle expression partir (on aurait par exemple pu partir de XQ/XR pour vouloir arriver à XW/XV) car on ne sait pas prévoir quelles longueurs vont disparaître et apparaître, et l'on peut rapidement se perdre. Une façon de présenter les choses ici qui peut s'étendre à d'autres exercices plus compliqués et qui peut rendre le calcul plus rapide est donc de partir de $\frac{XQ \cdot XV}{XR \cdot XW}$ et d'essayer de montrer que ce rapport vaut 1.

La chasse aux rapports ne constitue pas un nouvel outil en soi, mais plutôt une nouvelle technique pour systématiser un type de raisonnement assez intuitif mais souvent très improvisé par les élèves. Les élèves ayant apprécié cette section et avides de nouvelle théorie peuvent se renseigner sur les théorèmes de Ménélaüs et de Céva.

On propose ici quelques exercices utilisant les triangles semblables et les calculs de rapports.

Exercice 36. $\star$ Soit $ABCD$ un parallélogramme. Soit M le milieu du segment $[BC]$ et N le milieu du segment $[CD]$. Les droites (AN) et (BD) se coupent en Q et les droites (AM) et (BD) se coupent en P. Montrer que $BP = PQ = QD$.

Exercice 37. $\star$ (Sharygin 2011) Soit $ABCD$ un trapèze dans lequel (AD) et (BC) sont parallèles. Soit O le point d'intersection des diagonales (AC) et (BD). Soit M un point du segment $[CD]$. La parallèle à (BD) passant par M coupe le segment $[BC]$ en P. La parallèle à (AC) passant par M coupe le segment $[AD]$ en Q. Montrer que les points P, O et Q sont alignés.

Exercice 38. $\star$ Soit $ABCD$ un losange. Soit F un point du segment $[AD]$ et E un point du segment $[AB]$. Les droites (FC) et (BD) se coupent en L, les droites (EC) et (BD) se coupent en K. Les droites (FK) et (BC) se coupent en Q et les droites (EL) et (DC) se coupent en P. Montrer que $CP = CQ$.

Exercice 39. $\star$ (British MO 2012/2013 Round 1) Soit ABC un triangle. Soit $\mathcal{C}_B$ le cercle passant par B et tangent au segment $[AC]$ en A et soit $\mathcal{C}_C$ le cercle passant par C et tangent au segment $[AB]$ en A. Les cercles $\mathcal{C}_B$ et $\mathcal{C}_C$ se recoupent au point D. La droite (AD) recoupe le cercle circonscrit au triangle ABC au point E. Montrer que D est le milieu du segment $[AE]$.

Exercice 40. $\star$ (PAMO 2021 P2) Soit Γ un cercle et P un point à l'extérieur de Γ. Les tangentes à Γ issues de P touchent Γ en A et B. Soit K un point distinct de A et B sur le segment $[AB]$. Le cercle circonscrit au triangle PBK recoupe le cercle Γ au point T. Soit P' le symétrique du point P par rapport au point K. Montrer que $\widehat{PBT} = \widehat{P'KA}$.

Exercice 41. $\star$ (British MO 2016/2017 round 2) Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique dans lequel $AB < CD$, P le point d'intersection des diagonales (AC) et (BD) et Q le point d'intersection des droites (AD) et (BC). La bissectrice de l'angle $\widehat{AQB}$ coupe $[AC]$ en R et la bissectrice de l'angle $\widehat{APD}$ coupe (AD) en S. Montrer que les droites (RS) et (CD) sont parallèles.

Exercice 42. * (France TST 2021/2022) Soit $ABCD$ un parallélogramme. La bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{BAC}$ coupe le segment $[BC]$ en E tandis que sa bissectrice extérieure coupe la droite (CD) en F. Soit M le milieu du segment $[AE]$. Montrer que les droites (EF) et (BM) sont parallèles.

Exercice 43. * Soit $ABCD$ un quadrilatère inscrit dans un cercle Γ. La parallèle à (BC) passant par D coupe (AC) en P, (AB) en Q et recoupe Γ en R. La parallèle à (AB) passant par D coupe (AC) en S, (BC) en T et recoupe Γ en U. Montrer que $\dfrac{ST}{TU} = \dfrac{QR}{PQ}$.

Exercice 44. * Soit ABC un triangle, soit D un point du segment $[AC]$ tel que $BD = DC$. Une droite parallèle à la droite (BD) coupe le segment $[BC]$ en le point E et coupe la droite (AB) en le point F. Soit G le point d'intersection des droites (AE) et (BD). Montrer que les angles $\widehat{BCG}$ et $\widehat{BCF}$ ont même amplitude.

Exercice 45. * (IMO 2003 P4) Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique. Les projetés orthogonaux de D sur les droites $(BC), (CA)$ et (AB) sont notés respectivement P, Q et R. Montrer que $PQ = QR$ si et seulement si les bissectrices des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$ se coupent sur le segment $[AC]$.

Exercice 46. * (IMO SL 2015 G1) Soit ABC un triangle d'orthocentre H et soit G le point tel que le quadrilatère $ABGH$ est un parallélogramme. Soit I le point de la droite (GH) tel que la droite (AC) coupe le segment $[HI]$ en son milieu. La droite (AC) recoupe le cercle circonscrit du triangle GCI au point J. Montrer que $IJ = AH$.

Exercice 47. * (IMO SL 2013 G4) Soit ABC un triangle tel que $\widehat{ABC} > \widehat{ACB}$. Soient P et Q deux points distincts sur la droite (AC) tels que $\widehat{PBA} = \widehat{QBA} = \widehat{ACB}$ et A appartient au segment $[PC]$. On suppose qu'il existe un point D sur le segment $[BQ]$ tel que $PD = PB$. La droite (AD) recoupe le cercle circonscrit au triangle ABC au point R. Montrer que $QB = QR$.

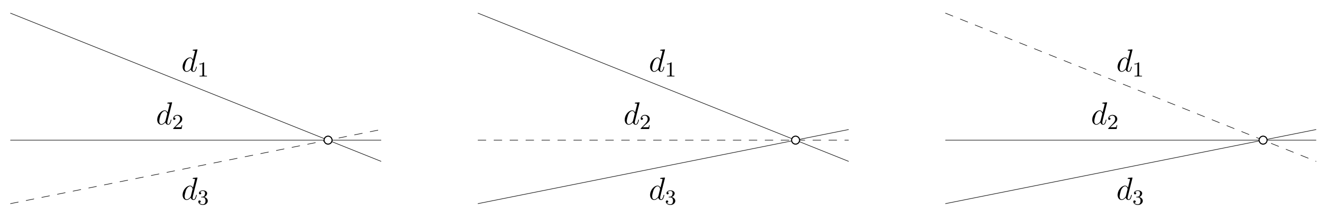
Exercice 48. * (RMM SL 2017 G1) Soit $ABCD$ un trapèze dans lequel les droites (AD) et (BC) sont parallèles. Soient E un point sur le segment $[AB]$ et F un point sur le segment $[DC]$. Soit A_1 le point d'intersection, autre que A, de la droite (AD) avec le cercle circonscrit au triangle AEF. Soit C_1 le point d'intersection, autre que C, de la droite (BC) avec le cercle circonscrit au triangle CEF. Montrer que les droites $(BD), (EF)$ et (A_1C_1) sont concourantes.

2.3 La méthode du point fantôme

Le "working backward" ou "méthode du point fantôme" sont autant d'appelations pour la même technique centrale en géométrie. Celle-ci s'appuye sur le principe d'unicité suivant :

Supposons que trois droites notées d_1, d_2 et d_3 se coupent en un même point X. Alors il est équivalent de dire que :

- Le point d'intersection des droites d_1 et d_2 appartient à la droite d_3.
- Le point d'intersection des droites d_2 et d_3 appartient à la droite d_1.
- Le point d'intersection des droites d_3 et d_1 appartient à la droite d_2.



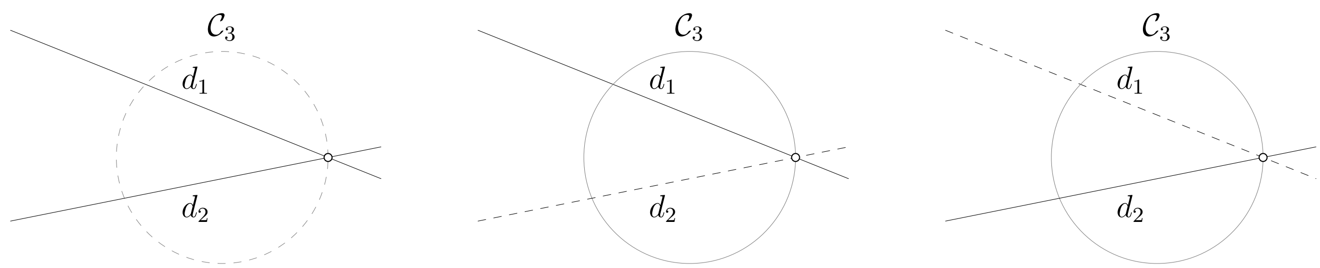
Le principe reste le même en remplaçant le mot "droite" par le mot "cercle".
Ce principe simple possède de formidables applications non triviales qui sont le coeur de nombreux arguments géométriques. En effet, supposons que l'on est en présence d'un énoncé de l forme suivante :

Montrer que les droites d_1 et d_2 se coupent sur le cercle $\mathcal{C}_3$

Alors :

- Il est suffisant de montrer que le point d'intersection de la droite d_1 avec le cercle $\mathcal{C}_3$ est sur la droite d_2.
- Il est suffisant de montrer que le point d'intersection de la droite d_2 avec le cercle $\mathcal{C}_3$ est sur la droite d_1.

(Les conditions sont seulement "suffisantes", étant donné qu'une droite et un cercle peuvent avoir deux points d'intersection.)



Pour résumer, pour un énoncé demandant de montrer que trois objets se coupent en un même point X , il est équivalent de choisir deux quelconques de ces objets pour montrer que leur point d'intersection appartient au troisième objet. La méthode du point fantôme consiste à choisir ces deux objets, introduire le point d'intersection X' de ces deux objets et à montrer que X' appartient au troisième objet, de sorte que $X' = X$. L'intérêt est de pouvoir choisir l'énoncé qui tire le meilleur parti des diverses hypothèses. **Bien souvent, lorsque l'on demande de montrer que deux droites se coupent sur un cercle, il est judicieux de montrer que le point d'intersection de l'une des droites avec le cercle appartient à la deuxième droite.**

Cela est encore valable lorsque l'on demande de montrer qu'il existe un objet possédant trois propriétés, où les propriétés peuvent être à caractère géométrique (appartenance à un cercle ou une droite) ou à caractère algébrique (hypothèse d'angle, hypothèse de longueur). Pour montrer que ce point existe, il suffit de prendre un point vérifiant deux des trois propriétés, et de montrer qu'il vérifie également la troisième.

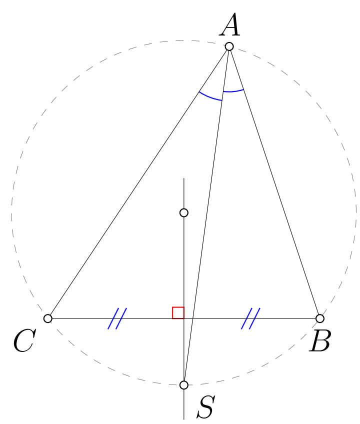
La géométrie est l'un des rares domaines des mathématiques dans lequel on peut "remonter" les arguments, c'est-à-dire montrer une équivalence entre deux propriétés $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ en prenant les étapes de la preuve de $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{P}'$ et en les effectuant dans l'autre sens.

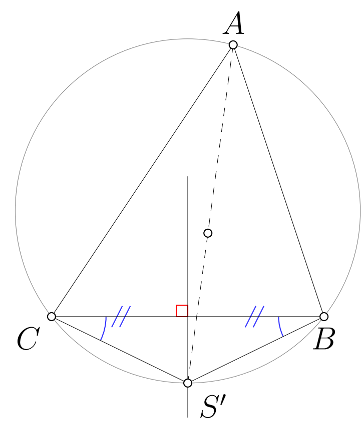
Cette particularité vient du fait que de très nombreux résultats sont des équivalences (théorème de l'angle inscrit, théorème de Thalès, théorème de la bissectrice...). Et ces nombreux résultats sont des équivalences parce que bien souvent, il y a unicité du point vérifiant deux propriétés données (il y a un unique point d'intersection de deux droites par exemple). Il est intéressant de reprendre les preuves des théorèmes cités et de voir comment intervient ce principe d'unicité.

L'exemple d'application le plus célèbre de la méthode du point fantôme est aussi le plus utile :

Exemple 2.3 (Le théorème du pôle Sud). Soit ABC un triangle quelconque. Soit S le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ avec la médiatrice du segment $[BC]$. Montrer que S appartient au cercle circonscrit au triangle ABC.

Le point S est appelé le pôle Sud du sommet A dans le triangle ABC.





Démonstration. Appliquons la méthode du point fantôme ainsi que le conseil que l'on a énoncé plus haut :

Pour montrer que deux droites se coupent sur un cercle, considérer le point d'intersection d'une droite avec le cercle et montrer qu'il appartient à la deuxième droite.

Soit S' le point d'intersection de la médiatrice du segment $[BC]$ avec le petit arc $\overset{\frown}{BC}$ du cercle circonscrit au triangle ABC. Puisque S' est sur la médiatrice de $[BC]$, on a $S'B = S'C$. Le triangle $BS'C$ est isocèle en S', donc $\widehat{S'BC} = \widehat{S'CB}$. Puisque S' est sur le cercle circonscrit au triangle ABC, d'après le théorème de l'angle inscrit, on a alors

$$\widehat{S'AC} = \widehat{S'BC} = \widehat{S'CB} = \widehat{S'AB}$$

Le point S' appartient donc à la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$. Donc S' est le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ avec la médiatrice du segment $[BC]$. Comme ce point d'intersection est unique, $S' = S$. Puisque S' appartenait au cercle passant par A, B et C par définition, S est bien sur le cercle circonscrit au triangle ABC, comme voulu.

$\square$

Exercice 49. $\star$ (Existence du pôle Nord) Soit ABC un triangle. Soit ℓ la perpendiculaire à la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ passant par A. Montrer que la médiatrice du segment $[BC]$ et la droite ℓ se coupent sur le cercle $\mathcal{C}$.

Exercice 50. $\star$ (JBMO SL 2014 G2) Soit ABC un triangle aux angles aigus dans lequel $AB < AC < BC$ et soit $\mathcal{C}$ sont cercle circonscrit. Soit D le point diamétralement opposé à B et soit E le point diamétralement opposé à C. Le cercle de centre A de rayon AE recoupe le segment $[AC]$ en K. Le cercle de centre A et rayon AD recoupe le segment $[AB]$ en L. Montrer que les droites (EK) et (DL) se coupent de le cercle $\mathcal{C}$.

Exercice 51. $\star$ Soit ABC un triangle aux angles aigus et soit O le centre de son cercle circonscrit. La perpendiculaire à la droite (BC) en C coupe la tangente en A au cercle circonscrit au triangle ABC au point K. La parallèle à la droite (AB) passant par K coupe la droite (BC) au point D. Montrer que les points A, O et D sont alignés.

Exercice 52. $\star$ Soit $ABCD$ un trapèze avec $AB < CD$ et les droites (AB) et (CD) parallèles. Soit P un point appartenant au segment $[CB]$. La parallèle à le droite (AP) passant par le point C coupe le segment $[AD]$ en le point R et la parallèle à la droite (DP) passant par le point B coupe le segment $[AD]$ en le point R'. Montrer que $R = R'$.

Exercice 53. $\star$ (Lemme utile) Soit ABC un triangle, I le centre de son cercle inscrit et soient D, E et F les points de contact du cercle inscrit avec les côtés $[BC], [CA]$ et $[AB]$ respectivement. Soient M, L et K les milieux des côtés $[BC], [CA]$ et $[AB]$. Soit X le point d'intersection des droites (CI) et (MK) et soit Y le point d'intersection des droites (BI) et (ML). Montrer que les points Y, E, F et X sont alignés.

Exercice 54. (EMC 2021 senior P1) Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que $AB > BC$. Soit O un point sur la droite (CD) tel que $OB = OD$. Soit ω le cercle de centre O et de rayon OC. La droite (CD) recoupe le cercle ω en T. Montrer que les droites (AT) et (BO) se coupent sur le cercle ω.

Exercice 55. $\star$ (Iran MO 2015 Round 3) Soit $ABCD$ un trapèze dans lequel les droites (AB) et (CD) sont parallèles. Soit E un point appartenant au segment $[AC]$. La parallèle à la droite (BE) passant par C coupe la droite (BD) en F. Montrer que le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles ABF et BED appartient à la droite (AC).

Exercice 56. (IMO SL 2019 G1) Soit ABC un triangle. Un cercle Γ passant par A recoupe les segments $[AB]$ et $[AC]$ aux points D et E et coupe $[BC]$ en F et G, de sorte que B, F, G et C sont alignés dans cet ordre. La tangente au cercle circonscrit au triangle BDF en F et la tangente au cercle circonscrit au triangle CEG en G se coupent en T. Montrer que les droites (AT) et (BC) sont parallèles.

Exercice 57. (British MO 2021/2022 round 2) Soit ABC un triangle et Γ son cercle circonscrit. Soient ℓ_B et ℓ_C les droites peroendiculaires à (BC) passant respectivement par B et C. Soit T un point sur l'arc BC ne contenant pas le point A. La tangente à Γ en T coupe ℓ_B en P_B et ℓ_C en P_C. La perpendiculaire à (AC) passant par P_B et la perpendiculaire à (AB) passant par P_C se coupent en Q. On suppose que Q appartient à la droite (BC). Montrer que Q appartient à (AT).

3 Maitriser de nouvelles techniques

Une fois que l'on maitrise les techniques élémentaires de géométrie, on peut élargir son niveau de connaissance et assimiler des configurations de géométrie. Parfois ces configurations sont de simples raccourcis, c'est-à-dire qu'on pourrait les retrouver tout seul avec les techniques de la section précédente, mais les connaître pour les identifier dans une figure représente un véritable gain de temps. Parfois ces configurations représentent un progrès conceptuel, car elles produisent des résultats dont les arguments dépassent les techniques que l'on a étudiées.

Dans cette section, on présente trois de ces configurations, choisies pour leur fréquence d'apparition dans les diverses compétitions.

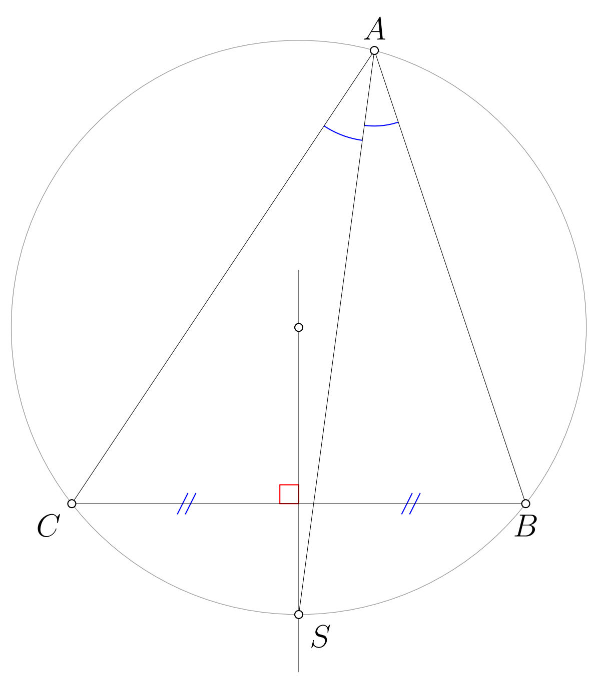
3.1 Le Pôle Sud

L'appelation "pôle Sud" est strictement franco-française. Inutile d'essayer de parler de "South Pole" avec des étudiants d'une autre préparation olympique, personnes ne verrait de quoi vous parlez. Pour le reste du monde, il s'agit seulement d'une "configuration connue". Toutefois, on va développer cette métaphore du pôle Sud avec d'autres résultats.

Le pôle Sud est défini comme le point d'intersection de trois objets. La concourance de ces trois objets a été montrée dans l'exemple 2.3.

Définition 3.1 (Le théorème du pôle Sud). Soit ABC un triangle quelconque. Soit S le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ avec la médiatrice du segment $[BC]$. Montrer que S appartient au cercle circonscrit au triangle ABC.

Le point S est appelé le pôle Sud du sommet A dans le triangle ABC.



Les résultats de concourances de trois objets sont particulièrement précieux en géométrie. Le pôle Sud étant l'un des résultats de concourance le plus simple, cela contribue sans doute à son succès. Le pôle Sud a trois façons d'apparaître dans un exercice :

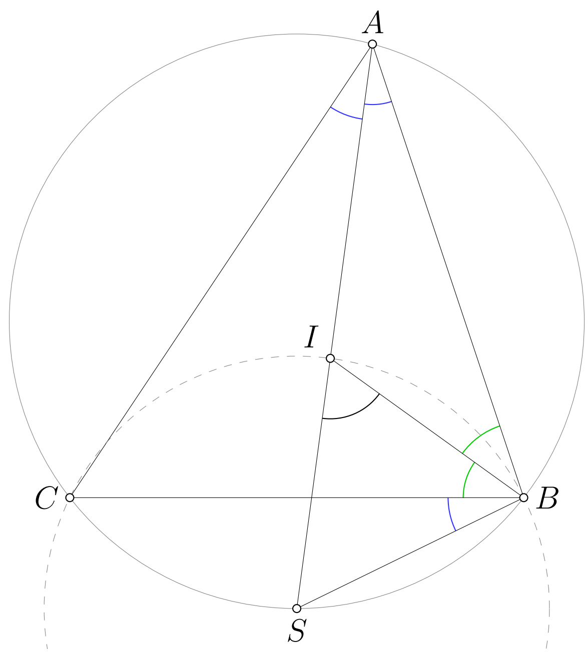
- Un point S est défini comme point d'intersection de la médiatrice d'un segment $[BC]$ avec un cercle passant par A, B et C. Alors le théorème nous donne gratuitement l'appartenance de S à la bissectrice de $\widehat{BAC}$.
- Un point S est défini comme point d'intersection de la bissectrice de $\widehat{BAC}$ avec un cercle passant par A, B et C. Alors le théorème nous donne gratuitement l'appartenance de S à la médiatrice du segment $[BC]$.
- Un point S est défini comme point d'intersection de la bissectrice de $\widehat{BAC}$ avec la médiatrice de $[BC]$. Alors le théorème nous donne immédiatement l'appartenance de S au cercle passant par A, B et C.

Dans les deux premières situations, on peut retrouver le résultat rapidement à la main. **C'est dans la troisième situation qu'il est important de connaître le théorème du pôle Sud. Lorsqu'un point est défini comme point d'intersection d'une bissectrice et d'une médiatrice, pensez au théorème du pôle Sud.**

Passons à de nouvelles propriétés du pôle Sud, moins centrales mais dont la preuve permet de manipuler un peu plus ce point.

Théorème 3.1. Soit ABC un triangle et I le centre de son cercle inscrit. Soit S le pôle Sud du sommet A. Alors S est le centre du cercle passant par les points B, I et C.

Le cercle passant par B, I et C est appelé le cercle antarctique du sommet A.



Démonstration.

On montre que $SB = SI$. Puisque $SB = SC$, on a alors que S est équidistant des points C, I et B, comme voulu.

Pour montrer que $SI = SB$, on montre que $\widehat{SIB} = \widehat{IBS}$.
Pour cela, en utilisant la somme des angles du triangle AIB :

$$\widehat{SIB} = 180° - \widehat{AIB} = \widehat{IAB} + \widehat{IBA}$$

Puisque I est sur les bissectrices des angles $\widehat{CAB}$ et $\widehat{ABC}$, on a

$$\widehat{IAB} + \widehat{IBA} = \widehat{IAC} + \widehat{IBC}$$

Or, d'après le théorème de l'angle inscrit, $\widehat{IAC} = \widehat{SAC} = \widehat{SBC}$, de sorte que

$$\widehat{IAC} + \widehat{IBC} = \widehat{SBC} + \widehat{IBC} = \widehat{IBS}$$

donc on a bien $\widehat{SIB} = \widehat{SBI}$, comme voulu.

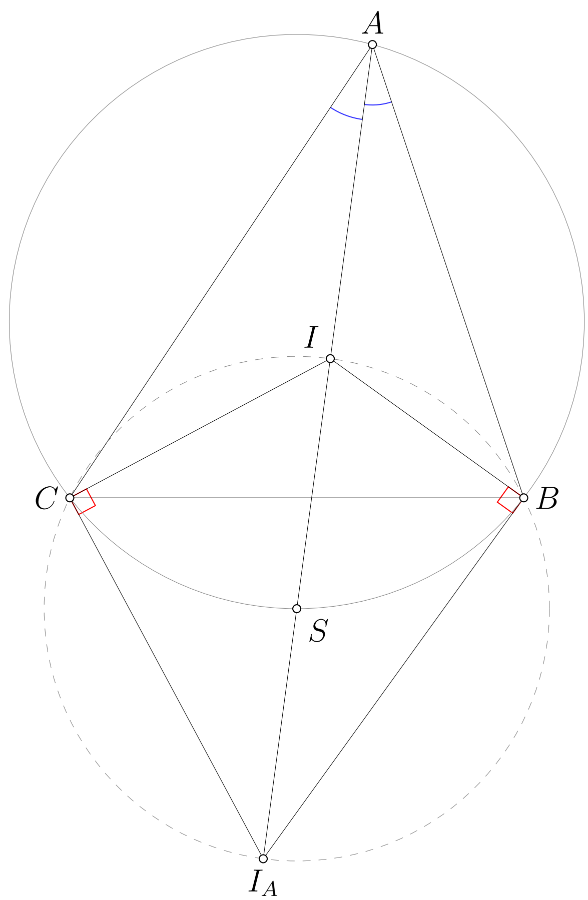
□

Ce théorème nous donne une façon de tracer le point I sans tracer de bissectrice : on trace le cercle circonscrit au triangle ABC puis on trace le point S comme point d'intersection de la médiatrice du segment $[BC]$ et enfin on trace le point I sur la droite (AS) à l'aide du cercle de centre S et de rayon SB.

Le théorème suivant achève la liste des points particuliers appartenant au cercle antarctique :

Théorème 3.2 (S)**.** Soit ABC un triangle, I le centre du cercle inscrit au triangle ABC, S le pôle Sud du sommet A et soit I_A le centre du cercle $A-$exinscrit au triangle ABC.

Alors S est le centre du cercle passant par les points I, B, I_A et C.



Démonstration.

Il suffit de montrer que les points I, B, C et I_A sont cocycliques. Puisque S est le centre du cercle circonscrit au triangle BIC d'après le théorème 3.1, il sera le centre du cercle circonsconscrit au quadrilatère $BICI_A$.

Puisque I_A est sur la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{ABC}$, les droites (IB) et (I_AB) sont perpendiculaires. On a donc $\widehat{IBI_A} = 90°$. De la même façon, on a $\widehat{ICI_A} = 90°$. On a donc

$$\widehat{IBI_A} + \widehat{ICI_A} = 90° + 90° = 180°$$

donc les points B, I, C et I_A sont cocycliques.

$\square$

Avant de passer aux exercices, mentionnons seulement l'existence de propriétés similaires pour la bissectrice extérieure d'un angle. Autrement dit, il existe un point appelé le "pôle Nord" possédant des propriétés analogues à celles du pôle Sud et un "cercle arctique". Ces propriétés sont développées dans les premiers exercices. Les premiers exercices ont pour but de remanipuler les preuves proposées et les points utilisés. Les exercices qui suivent sont des exercices d'olympiades utilisant le pôle Sud et ses propriétés.

Exercice 58. Soit ABC un triangle et I le centre de son cercle inscrit. Les droites (AB) et (AC) recoupent le cercle circonscrit au triangle BIC respectivement aux points C' et B'. Montrer que $AB = AB'$ et $AC = AC'$.

Exercice 59. (Cercle arctique, S) Soit ABC un triangle et N le point d'intersection de la médiatrice du segment $[BC]$ avec la bissectrice extérieur de l'angle $\widehat{BAC}$. Soient I_B et I_C les centres respectifs des cercles $B-$ et $C-$ exinscrits. Montrer que les points B, C, I_B et I_C sont sur un même cercle de centre N.

Exercice 60. Soit ABC un triangle et I le centre de son cercle inscrit. Soient S_A, S_B et S_C les pôles Sud respectifs des points A, B et C. Montrer que le point I est l'orthocentre du triangle $S_A S_B S_C$.

Exercice 61. * Soit $BCDE$ un carré et soit O son centre. Soit A un point situé à l'extérieur du carré $BCDE$ tel que le triangle ABC est rectangle en A. Montrer que le point O appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

Exercice 62. (Canada MO 2001) Soit ABC un triangle avec $AC > AB$. Soit P le point d'intersection de la médiatrice du segment $[BC]$ et de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$. Soit X le projeté orthogonal de P sur (AB) et Y le projeté orthogonal de P sur (AC). La droite (XY) coupe (BC) en Z. Déterminer $\frac{BZ}{ZC}$.

Exercice 63. * (Tour final Suisse 2019) Soit k un cercle et A un point sur ce cercle. Soient B et C deux autres points sur le cercle k. Soit X le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ avec le cercle k. Soit Y le symétrique du point A par rapport au point X. Soit D le point d'intersection de la droite (YC) avec le cercle k. Montrer que le point D obtenu ne dépend pas du choix des points B et C sur le cercle k.

Exercice 64. (JBMO SL 2015 G3) Soit Γ un cercle de centre O. Soient A et B deux points de Γ tels que A, O et B ne sont pas alignés. La bissectrice de l'angle $\widehat{OBA}$ recoupe le cercle Γ en C, recoupe le cercle circonscrit au triangle OAB en K et recoupe le cercle circonscrit au triangle OAC en L. Montrer que K est le centre du cercle circonscrit au triangle AOC et que L est le centre du cercle inscrit au triangle AOB.

Exercice 65. * (BXMO 2011) Soit ABC un triangle soit I le centre de son cercle inscrit. Les bissectrices $(AI), (BI)$ et (CI) coupent les côtés opposés en D, E et F respectivement. La médiatrice du segment $[AD]$ coupe les droites (BI) et (CI) en M et N respectivement. Montrer que les points A, I, M et N sont cocycliques.

Exercice 66. * (JBMO 2010) Soit ABC un triangle et soit L le pied de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ et soit K le pied de la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$. La médiatrice du segment $[BK]$ coupe la droite (AL) en un point M. La parallèle à la droite (KM) passant par le point M coupe la droite (BK) au point N. Montrer que $LN = NA$.

Exercice 67. * (Caucase MO 2018 Senior P2) Soit ABC un triangle, P, Q et R sur les côtés AB, BC et CA tels que $AP = AR$, $BP = BQ$ et $\widehat{PIQ} = \widehat{BAC}$. Montrer que les droites (QR) et (AC) sont perpendiculaires.

Exercice 68. * (IMO 2004 P1) Soit ABC un triangle acutangle non isocèle en A. Le cercle de diamètre $[BC]$ coupe $[AB]$ et $[AC]$ en M et N respectivement. Soit O le milieu de $[BC]$. Les bissectrices de $\widehat{BAC}$ et $\widehat{MON}$ se coupent en R. Montrer que les cercles circonscrits de BMR et CNR se coupent sur $[BC]$.

Exercice 69. * (IMO 2006 P1) Soit ABC un triangle et I le centre de son cercle inscrit. Soit P un point un point à l'intérieur du triangle ABC vérifiant

$$\widehat{PBA} + \widehat{PCA} = \widehat{PBC} + \widehat{PCB}$$

Montrer que $AP \geqslant AI$ avec égalité ssi $P = I$

3.2 L'axe radical

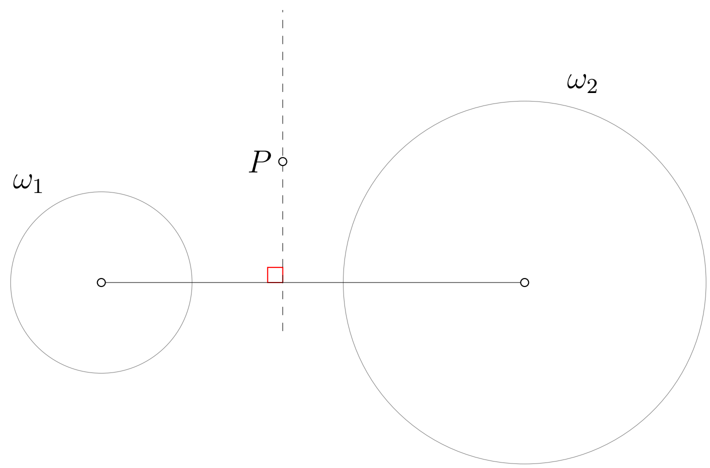
L'axe radical est la première technologie de ce polycopié qui n'est pas directement issue de la chasse aux angles. Il s'agit donc d'un excellent outil lorsque les tentatives de chasses aux angles et d'identifications de triangles semblables ont échoué. Les utilisations sont multiples : montrer l'alignement de trois points, la concourance de trois droites ou, indirectement la cocyclicité de quatre points.

Avant de lire ce chapitre, on prendra soin de maitriser la puissance d'un point par rapport à un cercle. On notera dans la suite $\mathcal{P}_\omega(P)$ la puissance du point P par rapport au cercle ω.

3.2.1 Premier contact

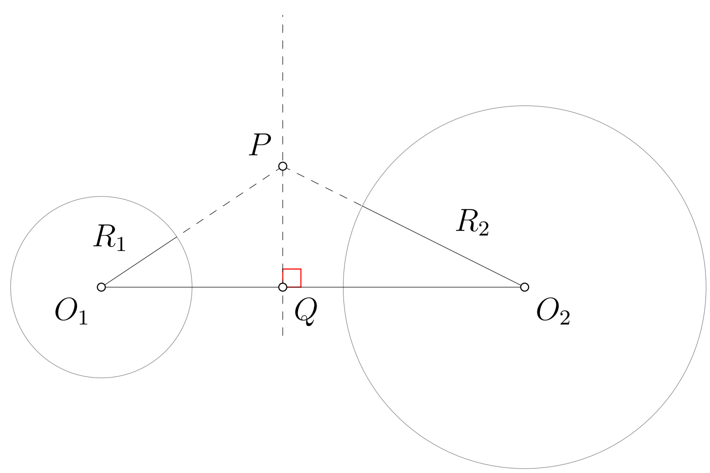
Définition 3.2 (Théorème de l'axe radical)**.** Soient ω_1 et ω_2 deux cercles, respectivement de centre O_1 et O_2. L'ensemble des points P pour lesquels $\mathcal{P}_{\omega_1}(P) = \mathcal{P}_{\omega_2}(P)$ est une droite perpendiculaire à (O_1O_2).

Cette droite est appelée l'axe radical des cercles ω_1 et ω_2.



Démonstration. Il suffit de montrer que tous les points P ayant même puissance par rapport aux deux cercles admettent la même projection orthogonale sur la droite (O_1O_2). Cela impliquera bien que tous les points P sont sur une même droite orthogonale à la droite joignant les centres O_1 et O_2.

Soit P un point tel que $\mathcal{P}_{\omega_1}(P) = \mathcal{P}_{\omega_2}(P)$. Soit Q son projeté orthogonal sur la droite (O_1O_2).



On note R_1 et R_2 les rayons respectifs des cercles ω_1 et ω_2.
On utilise la formule de la puissance du point P par rapport à chacun des cercles : pour $i = 1, 2$, on a $\mathcal{P}_{\omega_i}(P) = PO_i^2 - R_i^2$. D'autre part, d'après le théorème de Pythagore, $PO_i^2 = PQ^2 + QO_i^2$ pour $i = 1, 2$. Ainsi, puisque $PO_1^2 - R_1^2 = PO_2^2 - R_2^2$, on a $PQ^2 + QO_1^2 - R_1^2 = PQ^2 + QO_2^2 - R_2^2$, soit $QO_1^2 - R_1^2 = QO_2^2 - R_2^2$.
En réarrangeant les termes, on obtient

$$R_1^2 - R_2^2 = QO_1^2 - QO_2^2 = (QO_1 + QO_2)(QO_1 - QO_2) = O_1O_2(O_1O_2 - 2QO_2)$$

Ainsi, la quantité QO_2 ne dépend pas du point P choisi, ce qui signifie bien que l'ensemble des points P ayant même puissance par rapport aux deux cercles admet la même projection orthogonale. Ils sont donc tous sur une même droite perpendiculaire à (O_1O_2). Réciproquement, en remontant les égalités on peut vérifier que tout point de cette droite est bien à égale puissance des cercles Γ_1 et Γ_2.

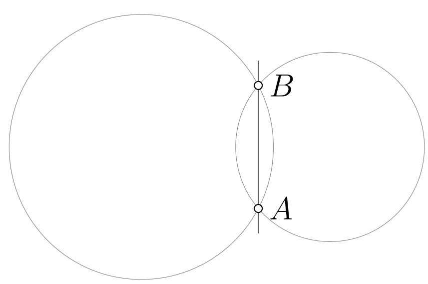
□

Remarques :

- La preuve ne traite que le cas où les deux centres sont situés à l'extérieur des cercles opposés. Pour traiter le cas général (par exemple le cas où O_1 est à l'intérieur de Γ_2) il faut réécrire la preuve en utilisant des longueurs orientées.
- Nous disions en début de section que l'axe radical est une technologie distincte de celles que l'on peut obtenir par la chasse aux angles. Pour s'en rendre compte, on remarque que les arguments employés étaient le théorème de Pythagore ainsi qu'un argument de calcul de longueur. Si le théorème de Pythagore peut être retrouvé avec des triangles semblables et de la chasse aux angles, c'est de façon très détournée. Le calcul de longueur visant à isoler QO_2 est quant à lui bien distinct des raisonnements que l'on a fait jusqu'ici. Autrement dit, il y a des résultats obtenus avec l'axe radical que l'on ne peut pas espérer retrouver de façon directe avec la chasse aux angles.
- Une erreur courante est de penser que l'axe radical coupe le segment $[O_1O_2]$ en son milieu. On notera que cela n'a aucune raison d'être vrai.

On prêtera attention au cas particulier suivant :

Propriété 3.1. Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles se coupant en deux points A et B. Alors l'axe radical des cercles Γ_1 et Γ_2 est la droite (AB).



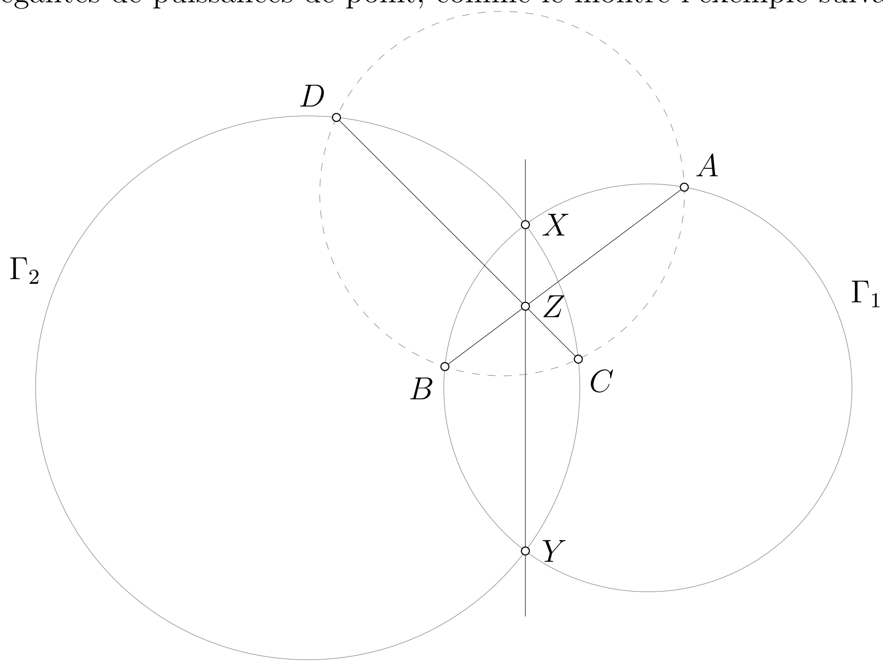
Démonstration.
Le point A appartient au cercle Γ_1 donc $\mathcal{P}_{\Gamma_1}(A) = O_1A^2 - R_1^2 = 0$. De même, $\mathcal{P}_{\Gamma_1}(A) = 0$. A possède donc la même puissance par rapport aux deux cercles, donc A est sur leur axe radical. Il en est de même pour B. Puisque l'axe radical est une droite, il s'agit bien de la droite passant par A et B.

□

Un deuxième cas particulier est le cas où les deux cercles sont tangents. L'axe radical est alors la tangente commune aux deux cercles en le point de tangence des deux cercles.

Les applications de ce théorème sont diverses :

- Pour montrer que trois points X, Y et Z sont alignés, on peut montrer que (XY) est l'axe radical de deux cercles bien choisis et que Z est sur cet axe en calculant la puissance de Z par rapport à chacun des cercles.
- Pour montrer que deux droites (XY) et (O_1O_2) sont perpendiculaires, on peut montrer que (XY) est l'axe radical de deux cercles respectivement centrés en O_1 et O_2.
- Générer des égalités de puissances de point, comme le montre l'exemple suivant :



Sur la figure ci-dessus, le point Z appartient à l'axe radical des deux cercles. Une droite passant par Z coupe Γ_1 en A et B. Une deuxième droite passant par Z coupe Γ_2 en C et D. Puisque Z a même puissance par rapport à Γ_1 et Γ_2, on a

$$ZA \cdot ZB = \mathcal{P}_{\Gamma_1}(Z) = \mathcal{P}_{\Gamma_2}(Z) = ZC \cdot ZD$$

donc, par la réciproque de la puissance d'un point, les points A, C, B et D sont cocycliques.

Exercice 70. * (Lemme utile) Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles se coupant en A et B. Une tangente commune ℓ à Γ_1 et Γ_2 touche le cercle Γ_1 en X et Γ_2 en Y. Soit M le point d'intersection des droites (AB) et (XY). Montrer que M est le milieu du segment $[XY]$.

Exercice 71. * (IMO 2000 P1) Soit $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux cercles qui se coupent en deux points M et N. Une tangente commune au deux cercles touche $\mathcal{C}_1$ en A et $\mathcal{C}_2$ en B, de sorte que M est plus proche de la droite (AB) que N. La parallèle à la droite (AB) passant par M recoupe $\mathcal{C}_1$ en C et $\mathcal{C}_2$ en D. Les droites (AC) et (BD) se coupent en E. Les droites (AN) et (CD) se coupent en P tandis que les droites (BN) et (CD) se coupent en Q. Montrer que $EP = EQ$.

Exercice 72. Soit ABC un triangle acutangle, soient P et Q les deux points d'intersection du cercle de diamètre $[AC]$ avec la hauteur issue de B (dans ABC), et R et S les deux points d'intersection du cercle de diamètre $[AB]$ avec la hauteur issue de C (dans ABC). Montrer que les points P, Q, R, S sont cocycliques.

Exercice 73. ⋆ (IMO 1995 P1) Soient A, B, C et D quatre points distincts alignés dans cet ordre. Soient Γ_1 et Γ_2 les cercles de diamètre respectifs $[AC]$ et $[BD]$, qui s'intersectent en X et Y. On considère O un point arbitraire sur la droite (XY) qui ne soit pas sur la droite (AB). La droite (CO) recoupe le cercle Γ_1 en un point M, la droite (BO) recoupe le cercle Γ_2 en un point N. Montrer que les droites $(AM), (DN)$ et (XY) sont concourantes.

Exercice 74. ⋆ Soit ABC un triangle, H le point d'intersection des hauteurs issues des sommets du triangle. Soit M un point quelconque sur $[AB]$ et N un point quelconque sur $[AC]$. Soient Γ_1 et Γ_2 les cercles de diamètre respectifs $[CM]$ et $[BN]$. Les cercles Γ_1 et Γ_2 se coupent en X et Y. Montrer que X, H et Y sont alignés.

Exercice 75. ⋆ (USA TSTST 2017 P1) Soit ABC un triangle et Γ son cercle circonscrit. Soit O le centre du cercle Γ et H l'orthocentre du triangle ABC. Soient M et N les milieux des segments $[AB]$ et $[AC]$ respectivement. Soient E et F les pieds des hauteurs issues respectivement des sommets B et C. Soit P le point d'intersection de la droite (MN) avec la tangente au cercle Γ au point A. Soit Q le second point d'intersection du cercle Γ avec le cercle circonscrit au triangle AEF. Soit R le point d'intersection des droites (AQ) et (EF). Montrer que les droites (PR) et (OH) sont perpendiculaires.

Exercice 76. ⋆ (IMO 2008 P1) Soit ABC un triangle dont les angles aigus et soit H son orthocentre. Le cercle passant par H et dont le centre est le milieu du segment $[BC]$ coupe le segment $[BC]$ en les points A_1 et A_2. On définit de la même façon les points B_1 et B_2 et les points C_1 et C_2. Montrer que les points A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 et C_2 sont cocycliques.

3.2.2 Centre radical

Une fois que l'on a étudié l'ensemble des points à même puissance de deux cercles, un question naturelle à se poser est l'étude de l'ensemble des points à même puissance de trois cercles. La réponse est donnée par le théorème suivant :

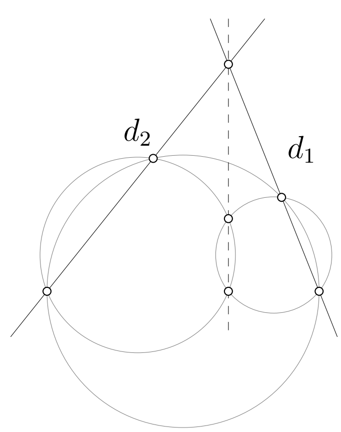
Théorème 3.3 (Centre radical)**.** Soient $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ trois cercles. Soient

— d_1 l'axe radical de $\mathcal{C}_2$ et de $\mathcal{C}_3$
— d_2 l'axe radical de $\mathcal{C}_3$ et de $\mathcal{C}_1$
— d_3 l'axe radical de $\mathcal{C}_1$ et de $\mathcal{C}_2$

Alors les droites d_1, d_2 et d_3 sont concourantes ou parallèles.

Dans le cas où les droites sont concourantes, le point de concours est appelé *centre radical* des cercles $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$.

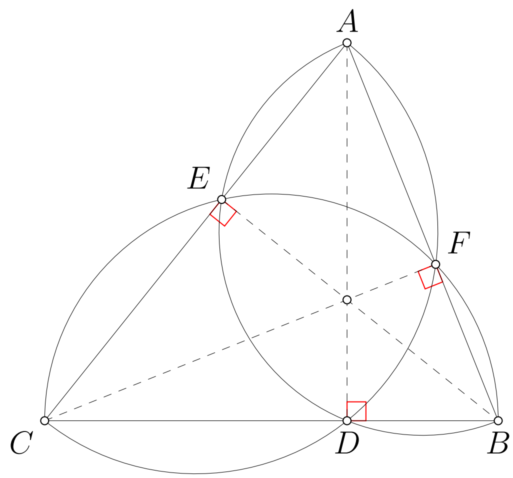
Démonstration. La preuve est similaire à la preuve de la concourance des trois médiatrices d'un triangle.



Soit P le point d'intersection de d_1 et d_2. Comme P appartient à d_1, $\mathcal{P}_{\mathcal{C}_2}(P) = \mathcal{P}_{\mathcal{C}_3}(P)$. Comme P appartient à d_2, $\mathcal{P}_{\mathcal{C}_3}(P) = \mathcal{P}_{\mathcal{C}_1}(P)$. On déduit que $\mathcal{P}_{\mathcal{C}_2}(P) = \mathcal{P}_{\mathcal{C}_1}(P)$.
Donc P appartient à d_3 et les trois droites sont bien concourantes.

On a montré que si deux des trois droites d_1, d_2 ou d_3 sont sécantes alors les trois droites sont concourantes. Par contraposée, si les trois droites ne sont pas concourantes, elles sont parallèles entre elles. $\square$

L'intérêt de ce résultat est d'avoir un nouvel outil pour démontrer la concourance de trois droites. On peut notamment démontrer la concourance des trois hauteurs d'un triangle :



On note D, E et F les pieds des hauteurs issues respectivement des sommets A, B et C. Alors $\widehat{CEB} = 90° = \widehat{CFB}$ donc les points C, B, E et F sont cocycliques. De la même façon, les points A, E, D et B ainsi que les points A, F, D et C sont cocycliques. Les trois cercles obtenus sont notés ω_1, ω_2 et ω_3. Alors (AD) est l'axe radical de ω_2 et ω_3, (BE) celui de ω_1 et ω_2 et (CF) celui de ω_1 et ω_3. Ces trois axes sont concourants en un point d'après le théorème du centre radical.

Lorsque plusieurs cercles sont présents, il est important de regarder les axes radicaux de ces cercles pour obtenir des résultats de concourances.

Exercice 77. * Montrer que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Exercice 78. * Soit ABC un triangle, Γ_1 un cercle passant par B et C et dont le centre O se trouve sur la bissectrice de $\widehat{BAC}$. Soit Γ_2 un cercle passant par O et A qui coupe Γ_1 en P et Q. Soit X le point d'intersection des droites (PQ) et (AO). Montrer que X appartient à $[BC]$.

Exercice 79. * (Envoi Géométrie 2022-2023 P14) Soit ABC un triangle non isocèle en A et I le centre de son cercle inscrit. On note D le point de la droite (BC) tel que $\widehat{DIA} = 90°$. On note E le pied de la hauteur issue de I dans le triangle ADI. Montrer que le point E est sur le cercle circonscrit du triangle ABC.

Exercice 80. (Envoi Géométrie 2021-2022 P14) Soit ABC un triangle, ω son cercle inscrit et I le centre de ω. Le cercle de centre A de rayon AI recoupe le cercle circonscrit au triangle ABC en les points P et Q. Montrer que la droite (PQ) est tangente au cercle ω.

Exercice 81. Soient ABC un triangle et ω son cercle circonscrit. Soit S le milieu de l'arc BC ne contenant pas A. Une droite parallèle à (BC) coupe le segment $[AB]$ en X et le segment $[AC]$ en Y. La droite (SX) recoupe ω en P et la droite (SY) recoupe ω en Q. Les droites (PQ) et (XY) se coupent en R. Montrer que (AR) est tangente au cercle ω.

Exercice 82. * (IMO 2013 P4) Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus. Soit W un point sur le segment $[BC]$. Soient M et N les pieds des hauteurs respectivement issues des sommets B et C et soit H le point d'intersection des droites (BM) et (CN). Soit ω_1 le cercle circonscrit au triangle BWN et X le point sur le cercle ω_1 diamétralement opposé à W. De même ω_2 est le cercle circonscrit à CWM et Y le point sur ω_2 diamétralement opposé à W. Montrer que X, Y et H sont alignés.

Exercice 83. (IMO SL 2014 G3) Soit ABC un triangle tel que $AB > BC$, Ω son cercle circonscrit et O le centre de Ω. La bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ recoupe Ω en M. Soit Γ le cercle de diamètre $[BM]$. Les bissectrices des angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$ coupent Γ respectivement en P et Q. Soit R le point de la droite (PQ) tel que $BR = MR$. Montrer que (BR) et (AC) sont parallèles.

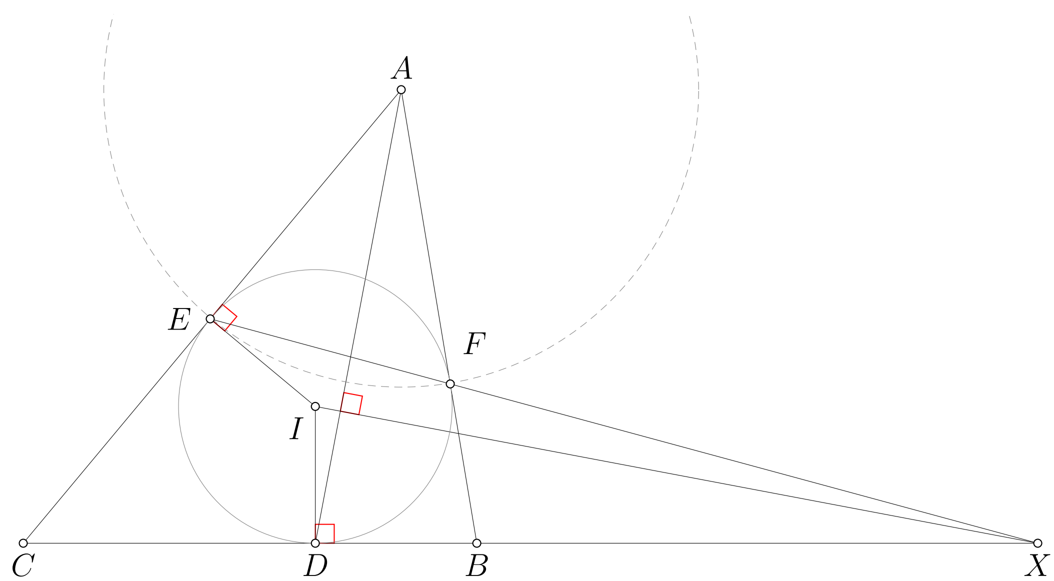
3.2.3 Cas dégénéré

Quel est l'axe radical de deux cercles chacun réduits à un point ? Puisque la puissance d'un point par rapport à un cercle réduit à un point est le carré de sa distance au point, l'axe radical de deux points est la médiatrice du segment les reliant.

Le cas dégénéré évoqué plus haut n'est pas très intéressant. Mais un cas dégénéré déjà apparu en olympiade et qui mérite d'être mentionné est le cas où l'un des cercles est réduit à un point. Les conséquences sont alors non triviales (ie, les cas dégénérés ne sont pas des résultats élémentaires). On l'illustre par l'exemple suivant :

Exemple :
Soit ABC un triangle, I le centre de son cercle circonscrit et D, E et F les points de contact respectifs du cercle inscrit avec les côtés $[BC], [CA]$ et $[AB]$. Soit X le point d'intersection de la droite (EF) avec la droite (BC). Montrer que les droites (AD) et (IX) sont perpendiculaires.

Solution :



On va essayer de définir la droite (XI) comme l'axe radical de deux cercles, l'un de centre A et l'autre de centre D.

Notons déjà que par la puissance d'un point $XE \cdot XF = XD^2$ donc le point X est sur l'axe radical du cercle de centre A de rayon AE et du cercle de centre D de rayon nul. Puisque $\widehat{IEA} = 90°$, la droite (IE) est tengente au cercle de centre A de rayon AE et $ID^2 = IE^2$ donc le point I a la même puissance par rapport aux mêmes deux cercles. La droite (IX) est l'axe radical du cercle de centre A de rayon AE et du cercle de centre D et de rayon nul. Les droites (IX) et (AD) sont donc bien perpendiculaires.

Exercice 84. (Suisse TST 2019 P6) Soit ABC un triangle et Γ sont cercle circonscrit. La tangente au cercle Γ au point A coupe la droite (BC) en un point P. Soient E et F les pieds des hauteurs issues des sommets B et C respectivement. Soit Q le point d'intersection de la droite (EF) avec la parallèle à la droite (BC) passant par le point A. Soit M le milieu du segment $[BC]$. Montrer que les droites (AM) et (PQ) sont perpendiculaires.

Exercice 85. (Iran TST 2010) Soit ABC un triangle tel que $\widehat{ABC} > \widehat{ACB}$. Soit M le milieu de $[BC]$. Soient D et E les pieds des hauteurs issues des sommets B et C. Soient K et L les milieux des segments $[ME]$ et $[MD]$. La droite (KL) coupe la parallèle à (BC) passant par A en T. Montrer que $TA = TM$.

Exercice 86. (IMO SL 2009 G3) Soit ABC un triangle. Le cercle inscrit au triangle ABC touche les côtés $[AB]$ et $[AC]$ respectivement en les points Z et Y. Soit G le point d'intersection des droites (BY) et (CZ). Soient R et S les points tels que les deux quadrilatères $BCYR$ et $BCSZ$ sont des parallélogrammes.
Montrer que $GR = GS$.

3.3 Les similitudes

Les similitudes sont une famille de transformations géométriques du plan, comprenant notamment les homothéties et les rotations. Toutefois, il est possible de les découvrir et de les comprendre sans forcément s'attarder sur le formalisme conceptuel des transformations du plan. C'est le choix que nous effectuons dans cette section. L'objectif ici est d'identifier une configuration récurrente et d'en voir les propriétés, tout en restant accessible aux élèves junior qui ne seraient pas forcément à l'aise avec les transformations du plan. Cette approche est suffisante pour les problèmes qui nous intéressent.

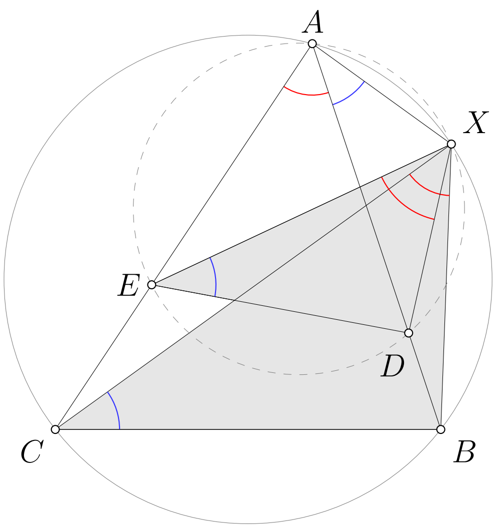
Pour avoir une véritable vue d'ensemble sur les similitudes en rajoutant l'aspect "transformation du plan", je vous renvoie au polycopié très complet de transformations du plan de Thomas Budzinski.

3.3.1 Similitudes directes

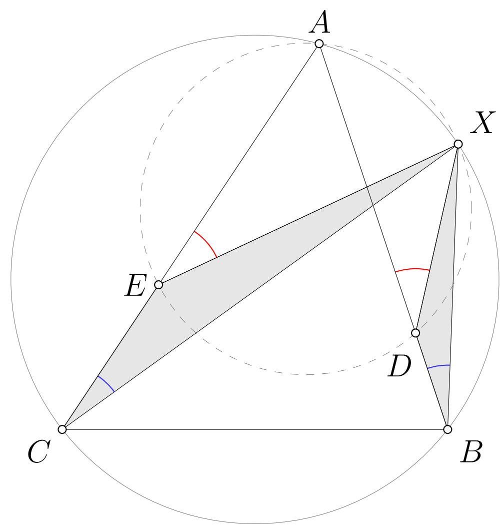
La configuration d'étude est la suivante :

Propriété 3.2 (Similitude)**.** Soit ABC un triangle et Ω son cercle circonscrit. Soient D et E des points des segments $[AB]$ et $[AC]$. Soit X le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles ABC et ADE. Alors

- $\Delta XDE \sim \Delta XBC$
- $\Delta XBD \sim \Delta XCE$



$\Delta XDE \sim \Delta XBC$



$\Delta XDB \sim \Delta XCE$

Démonstration. On prouve que les angles sont égaux deux à deux. Il suffit en particulier de deux égalités d'angles.

Pour la première paire de triangles semblables (figure de gauche), d'après le théorème de l'angle inscrit d'abord dans le cercle Ω puis dans le cercle passant par A, X, D et E :

$$\widehat{BCX} = \widehat{BAX} = \widehat{DAX} = \widehat{DEX}$$

On a de plus

$$\widehat{BXC} = \widehat{BAC} = \widehat{DAE} = \widehat{DXE}$$

ce qui conclut bien que $\Delta XDE \sim \Delta XBC$.

Pour la deuxième paire de triangles semblables (figure de droite), on a dans le même esprit :

$$\widehat{DBX} = \widehat{ABX} = \widehat{ACX} = \widehat{ECX}$$

et avec le théorème de l'angle inscrit uniquement dans le cercle passant par A, X, D et E :

$$\widehat{BDX} = 180° - \widehat{ADX} = 180° - \widehat{AEX} = \widehat{CEX}$$

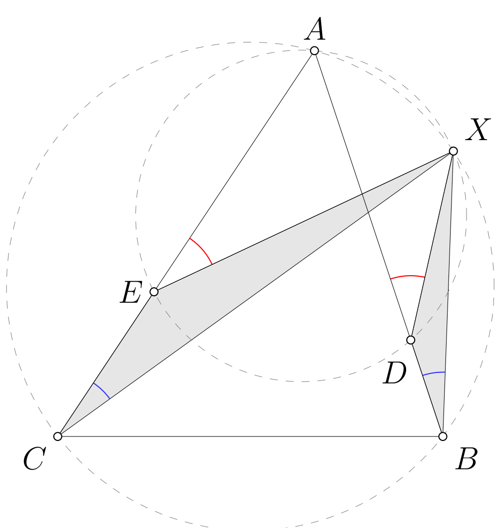
ce qui conclut bien que $\Delta XBD \sim \Delta XCE$. □

Ce qui est intéressant dans cette configuration, c'est d'abord la troisième égalité d'angle qu'on récupère avec la deuxième relation de similitude ($\widehat{DXB} = \widehat{EXC}$) mais surtout les égalités de rapport :

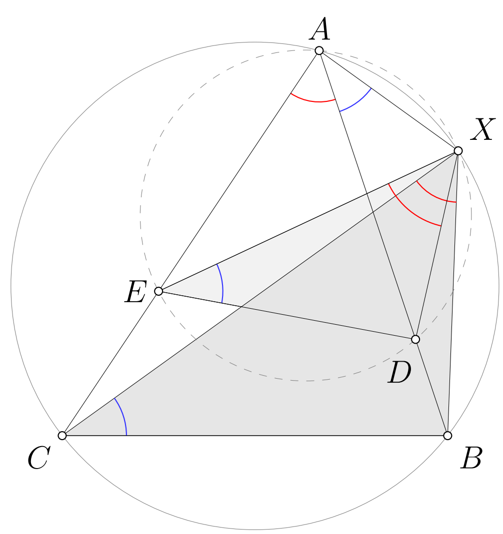
$$\frac{EC}{DB} = \frac{XE}{XD} = \frac{XC}{XB} \quad \text{et} \quad \frac{ED}{BC} = \frac{XE}{XC} = \frac{XB}{XD}$$

On examine désormais la réciproque de cette propriété (c'est d'ailleurs souvent par la réciproque que l'on commence dans un cours de présentation de la notion de similitude en tant que transformation du plan).

Propriété 3.3 (Réciproque)**.** Soit ABC un triangle, D un point sur le segment $[AB]$ et E un point sur le segment $[AC]$. Soit X un point tel que les triangles ΔXDB et ΔXEC sont semblables. Alors X appartient aux cercles Ω et $\mathcal{C}_{ADE}$.
De la même manière, si Y est un point tel que $\Delta YBC \sim \Delta YDE$, alors Y appartient aux cercle Ω et $\mathcal{C}_{ADE}$. En particulier, $Y = X$.



$\Delta XDB \sim \Delta XCE$



$\Delta XDE \sim \Delta XBC$

Démonstration. Comme souvent en géométrie pour prouver la réciproque d'une propriété, on remonte le raisonnement.
Ici, puisque $\Delta XDB \sim \Delta XEC$:

$$\widehat{XBA} = \widehat{XBD} = \widehat{XCE} = \widehat{XCA}$$

donc X appartient à Ω et

$$\widehat{AEX} = 180° - \widehat{CEX} = 180° - \widehat{BDX} = \widehat{ADX}$$

donc X appartient à $\mathcal{C}_{ADE}$.

Montrons la deuxième partie de la réciproque. Soit Y tel que $\Delta YDE \sim \Delta YBC$. Il suffit de se ramener à la première partie de la propriété et de montrer que $\Delta YCE \sim \Delta YBD$. Pour cela, on remarque que

$$\widehat{EYC} = \widehat{YED} - \widehat{CYD} = \widehat{CYB} - \widehat{CYD} = \widehat{DYB}$$

et d'après les rapports dérivés de la relation de similitude $\Delta YDE \sim \Delta YBC$

$$\frac{EY}{CY} = \frac{DY}{BY}$$

Les triangles EYC et DYB sont donc semblables et par la première partie de la propriété, Y est le second point d'intersection des cercles Ω et $\mathcal{C}_{ADE}$. $\square$

L'importance de cette réciproque est de pouvoir récupérer des résultats de cocyclicités à partir de triangles semblables.

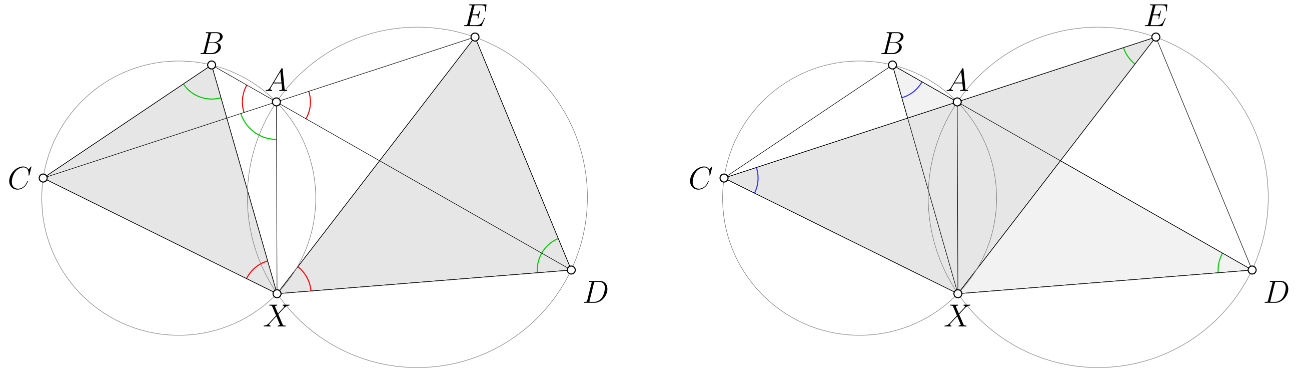
Remarques :

- En conséquence de la propriété 3.3, il existe un unique point X tel que $\Delta XDB \sim \Delta XCE$, appelé centre de la similitude envoyant (D, B) sur (E, C). Ce point ne dépend que des points B, C, D et E (même pas du point A).
- La seconde partie de la propriété 3.3 établit que X, le centre de la similitude envoyant (D, B) sur (E, C) est également le centre de la similitude envoyant (D, E) sur (B, C).
- Dans le cas particulier où les droites (DE) et (BC) sont parallèles, les points A et X sont confondus et les cercles $\mathcal{C}_{ADE}$ et Ω sont tangents en A.

Terminons cette sous-sous-section par la mention d'une autre configuration possible :

Propriété 3.4 (similitude croisée)**.** Soient B, C, D et E quatre points du plan et A le point d'intersection des segment $[BD]$ et $[CE]$. Soit X le second point d'intersection des cercles $\mathcal{C}_{ABC}$ et $\mathcal{C}_{ADE}$. Alors $\Delta XBC \sim \Delta XDE$ et $\Delta XBD \sim \Delta XCE$.

Réciproquement, si X est un point tel que $\Delta XBC \sim \Delta XDE$ ou tel que $\Delta XBD \sim \Delta XCE$, alors X est le second point d'intersection des cercles $\mathcal{C}_{ABC}$ et $\mathcal{C}_{ADE}$.



La preuve de la propriété 3.4 est similaire à celle des propriétés 3.2 et 3.3 et la retrouver en adaptant les chasses aux angles est un bon exercice d'assimilation.

Exercice 87. $\star$ Soit ABC un triangle et N le pôle Nord du sommet A. Un cercle passant par les points A et N coupe les segments $[AB]$ et $[AC]$ en X et Y respectivement. Montrer que $XB = YC$.

Exercice 88. $\star$ (Polish Mo 2017 Finals Day 1 P1) Soit ABC un triangles et soient P et Q des points respectivement sur les segments $[AB]$ et $[AC]$ tels que $BP = CQ$. Les droites (BQ) et (CP) se coupent au point R. Les cercles circonscrits aux triangles BPR et CQR se recoupent au point S. Montrer que le point S appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

Exercice 89. $\star$ (Caucase MO 2020 Senior P7) Soit ABC un triangle non isocèle en A et soit K le milieu de l'arc BC contenant le point A. Soit M le milieu du segment $[AB]$. La médiatrice du segment $[AC]$ coupe la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ au point P. Montrer que les points A, M, K et P sont cocycliques.

Exercice 90. $\star$ (Envoi géométrie 2020/2021 Exo 15) Soit ABC un triangle. On note H son orthocentre et D, E et F les pieds des hauteurs issues des sommets A, B et C. On note F' le symétrique du point F par rapport au point B et on note E' le symétrique du point E par rapport au point C. On note X le second point d'intersection du cercle circonscrit au triangle $AF'E'$ avec la droite (AD). Montrer que $HX = 4 \times HD$.

Exercice 91. $\star$ (S)(Olympiade Francophone de Mathématiques 2020) Soit ABC un triangle aux angles aigus tel que $AB < AC$. Soit D, E et F les points de contact respectifs du cercle inscrit au triangle ABC avec les côtés $[BC], [CA]$ et $[AB]$. La droite perpendiculaire au semgent $[EF]$ passant par le point D recoupe le segment $[AB]$ en un point G. Le cercle circonscrit au triangle AEF recoupe le cercle circonscrit au triangle ABC au point X. Montrer que les points X, G, D et B sont cocycliques.

Exercice 92. $\star$ (Balkan MO 2006) Soit ABC un triangle. Soit d une droite qui intersecte les segments $[AB]$ et $[AC]$ en des points D et F respectivement et qui intersecte la droite (BC) en un point E tel que C soit situé entre les points B et E. Les droites parallèles à la droite d passant par les points A, B et C recoupent chacune le cercle circonscrit au triangle ABC respectivement en les points A_1, B_1 et C_1. Montrer que les droites $(A_1E), (B_1F)$ et (C_1D) sont concourantes.

Exercice 93. $\star$ (Cyberspace Math Conmpetition 2020 P3) Soit ABC un triangle avec $AB > BC$ et D un point variable sur le segment $[BC]$. Soit E le point de l'arc BC ne contenant pas le point A tel que $\widehat{BAE} = \widehat{DAC}$. Soit I le centre du cercle circonscrit au triangle ABD et J celui du cercle inscrit au triangle ACE. Montrer que lorsque le point D varie, la droite (IJ) passe par un point fixe.

3.3.2 Le point de Miquel

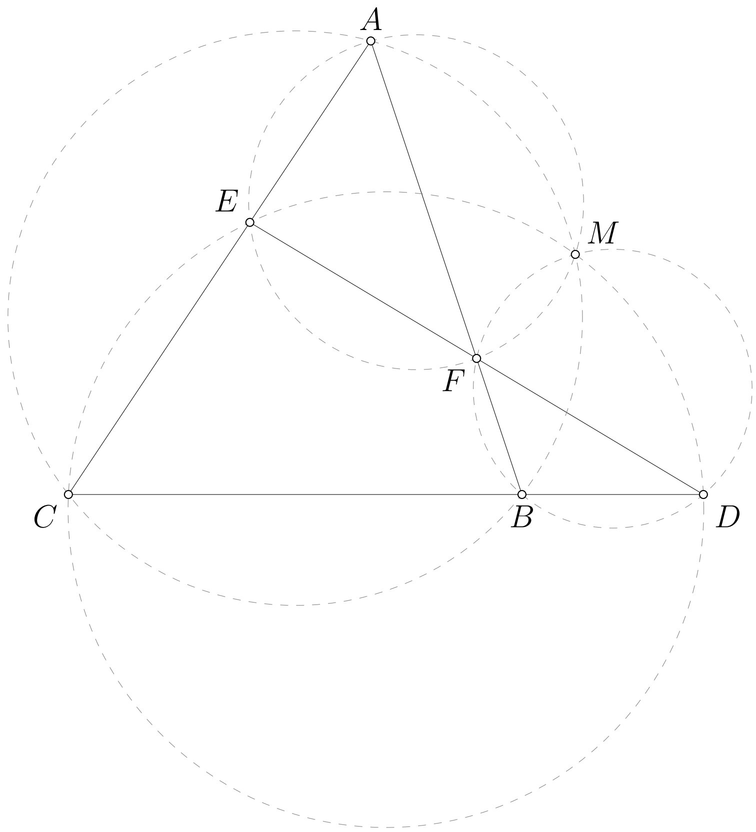
Le point de Miquel est à la fois l'aboutissement de la théorie de la similitude et à la fois une porte vers de nouveaux résultats. On ne présente ici qu'une entrée en la matière, en espérant que les propriétés vous donnent envie d'en apprendre plus sur ce point. Le cas particulier des quadrilatères cycliques est développé en détail sur la page de Yufei Zhao dans le cours intitulé *Cyclic Quadrilaterals - The Big Picture*.

On commence par la présentation du point de Miquel d'un quadrilatère complet. On développe ensuite le cas particulier où le quadrilatère complet définit un quadrilatère cyclique et quelques propriétés.

Définition 3.3 (Quadrilatère complet)**.** Soit ABC un triangle. Une droite d coupe les droites $(BC), (CA)$ et (AB) respectivement en les points D, E et F. Le quadrilatère $AFDBCE$ est appelé un *quadrilatère complet.*

Autrement dit un quadrilatère complet est le polygone obtenu en croisant quatre droites quelconques telles que deux quelconques ne sont jamais parallèles et trois d'entre elles ne sont jamais concourantes.

Propriété 3.5 (Existence du point de Miquel)**.** Soit $ABCDEF$ un quadrilatère complet. Alors les cercles $\mathcal{C}_{ABC}, \mathcal{C}_{AEF}, \mathcal{C}_{DBF}$ et $\mathcal{C}_{DCE}$ sont concourants en un même point M, appelé point de Miquel du quadrilatère complet $ABCDEF$.



Démonstration. Il existe deux preuves possibles. La première est élémentaire et consiste à faire une chasse aux angles. On en présente une deuxième, conceptuelle, qui repose sur la propriété 3.3, mais qui prend donc seulement quelques lignes.

Soit M le second point d'intersection des cercles $\mathcal{C}_{ABC}$ et $\mathcal{C}_{AEF}$. D'après la propriété 3.2, les triangles MEF et MBC sont semblables. D'après la propriété 3.3, puisque les triangles MEF et MBC sont semblables et puisque $D = (BC) \cap (EF)$, le point M est le second point d'intersection des cercles $\mathcal{C}_{BDF}$ et $\mathcal{C}_{CDE}$. Ceci achève la preuve. $\square$

Je voudrais, à titre pûrement personnel, signaler l'aspect particulièrement impressionnant de la propriété précédente. Pour une configuration extrêmement générale (quatre droites sécantes entre elles), on récupère une figure extrêmement rigide (quatre cercles sont toujours concourants). La géométrie est décidément très bien rangée ! Et ça ne s'arrête pas là, comme le montre la propriété qui suit !

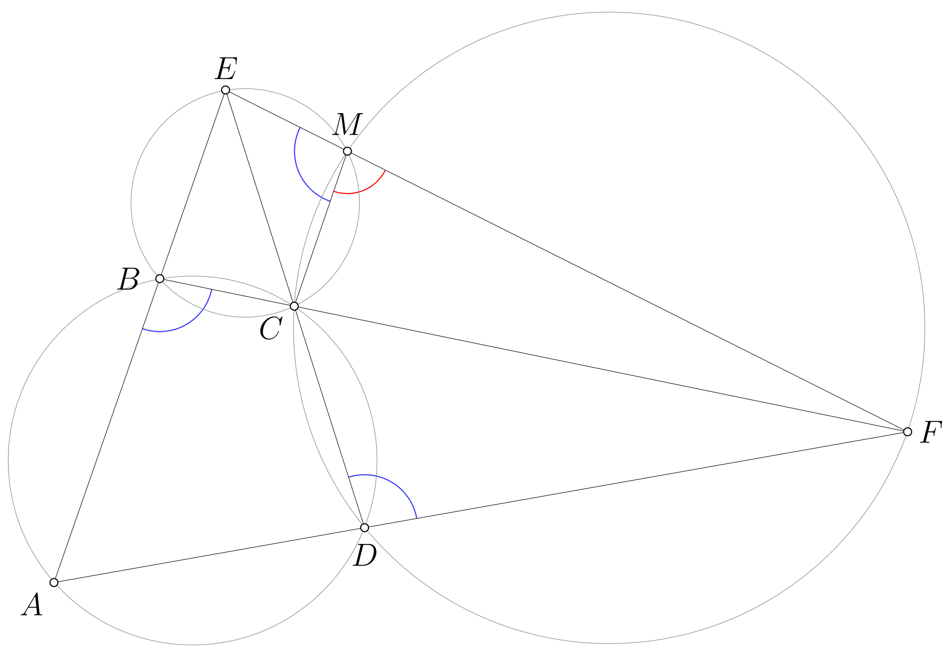
Propriété 3.6. Soit $ABCDEF$ un quadrilatère complet et M sont point de Miquel. Alors l point M ainis que les centres des quatre cercles $\mathcal{C}_{ABC}, \mathcal{C}_{AEF}, \mathcal{C}_{DBF}$ et $\mathcal{C}_{DCE}$ sont tous les cinq sur un même cercle.

Une fois que l'on a fini de s'extasier devant le merveilleux spectacle du point de Miquel, on peut prendre un peu de recul et s'interroger sur les conséquences théoriques. La première est qu'on a eu quatre cercles pour le prix de deux. Ainsi, si l'on a deux cercles qui se coupent en deux points, on ne doit pas oublier qu'il y a deux autres cercles cachés. On n'hésitera donc pas à compléter la configuration de la propriété 3.2 en introduisant le point d'intersection des droites (BC) et (DE).

Une fois encore, si impressionnant que soit le point de Miquel pour les yeux, il ne s'agit que d'un raccourci pour s'éviter de refaire systématiquement les chasses aux angles montrant la concourance des quatre cercles (en tout cas à ce stade).
Du fait de la configuration extrêmement générale dont il est issu, le point de Miquel est fréquent dans les exercices, qu'il intervienne comme point d'intersection de plusieurs cercles ou comme le centre d'une similitude.

On mentionne désormais des propriétés supplémentaires du point de Miquel dans le un cas particulier où quatre des points du quadrilatère complet sont cocycliques.

Propriété 3.7. Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique. Les droites (AB) et (CD) se coupent en E. Les droites (AD) et (BC) se coupent en F. Soit M le point di Miquel du quadrilatère complet $ABECFD$. Alors M appartient au segment $[EF]$.



Démonstration. Saurez-vous reconnaître en cette configuration le premier théorème de Miquel, abordé dans les exercices de la première section ?

Puisque le point M appartient aux cercles $\mathcal{C}_{EBC}$ et $\mathcal{C}_{CDF}$, on a

$$\widehat{EMC} = 180^\circ - \widehat{EBC} = \widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{ADC} = \widehat{CDF} = 180^\circ - \widehat{CMF}$$

ce qui signifie que $\widehat{EMC} + \widehat{CMF} = 180^\circ$ et les points E, M et F sont bien alignés. □

On peut même aller encore plus loin (on ne le démontrera pas ici) : si P est le point d'intersection des diagonales (BD) et (AC) et O le centre du quadrilatère cyclique, le point M est également le point d'intersection des droites (EF) et (OP). Ces deux droites sont d'ailleurs perpendiculaires. Enfin, la droite (MO) est la bissectrice commune des angles $\widehat{BMD}$ et $\widehat{AMC}$.

Exercice 94. Soit $ABCDEF$ un quadrilatère complet et M sont point de Miquel. Montrer que le point M aisni que les centres des quatre cercles $\mathcal{C}_{ABC}, \mathcal{C}_{AEF}, \mathcal{C}_{DBF}$ et $\mathcal{C}_{DCE}$ sont tous les cinq sur un même cercle.

Exercice 95. (IMO 1985 P5) Soit O le centre d'un cercle passant par les points A et C d'un trinagle ABC. Le cercle coupe AB et BC en K et N. Soit M l'intersection des cercles circonscrits aux triangles ABC et KBN. Montrer que $\widehat{OMB} = 90°$.

Exercice 96. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe, E l'intersection de (AD) et (CB), F l'intersection de (AB) et (CD). Montrer que $ABCD$ est cyclique si et seulement si $EA{\cdot}ED{+}FA{\cdot}FB = EF^2$

Exercice 97. Soit $ABCD$ un quadrilatère inscriptible, soit P l'intersection de (AD) et (BC) et Q l'intersection de (AB) et (CD). On suppose $\widehat{APQ} = 90$. Montrer que la perpendiculaire à (AB) passant par P coupe $[DB]$ en son milieu.

Exercice 98. * (Japan MO 2020 P2) Soit ABC un triangle tel que $BC < AB$ et $BC < AC$. Soient E et F des points appartenant respectivement aux segments $[AB]$ et $[AC]$ tels que $BE = BC = CF$. Les droites (BF) et (CE) se coupent en un point P. Les cercles circonscrits aux triangles ABF et ACE se recoupent en un point Q. Montrer que la droite (PQ) est perpendiculaire au segment $[BC]$

Exercice 99. * (Envoi Géométrie 2022-2023 P16) Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe tel que $AC = BD$ et tel que les côtés AB et CD ne sont pas parallèles. Soit P le point d'intersection des diagonales (AC) et (BD). Soient E et F des points respectivement sur les segments $[BP]$ et $[AP]$ tels que $PC = PE$ et $PD = PF$. Montrer que le cercle circonscrit au triangle formé par les droites (AB), (CD) et (EF) est tangent au cercle circonscrit au triangle ABP.

3.4 L'orthocentre

Il est à noter que les lemmes sur l'orthocentre apparaissent de moins en moins dans les compétitions senior mais restent d'excellents compléments pour connaître un peu plus l'orthocentre, dont l'apparition reste très courante tout de même. Autrement dit, les seniors peuvent prendre ces résultats comme des exercices afin de développer des automatismes autour de l'orthocentre (quels points sont cocycliques, quelles égalités d'angles et de rapports a-t-on ?). **En revanche, ces propriétés restent toujours d'actualité pour les compétitions juniors.**

Le cadre d'étude est le suivant : ABC est un triangle, H son orthocentre, O le centre du cercle circonscrit et H_A, H_B et H_C les pieds des hauteurs issues des sommets A, B et C.

On adoptera les notations canoniques $\alpha = \widehat{BAC}, \beta = \widehat{ABC}$ et $\gamma = \widehat{BCA}$.

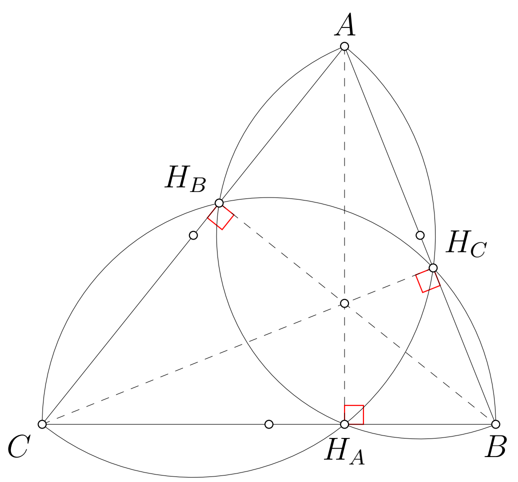
3.4.1 Les propriétés fondamentales

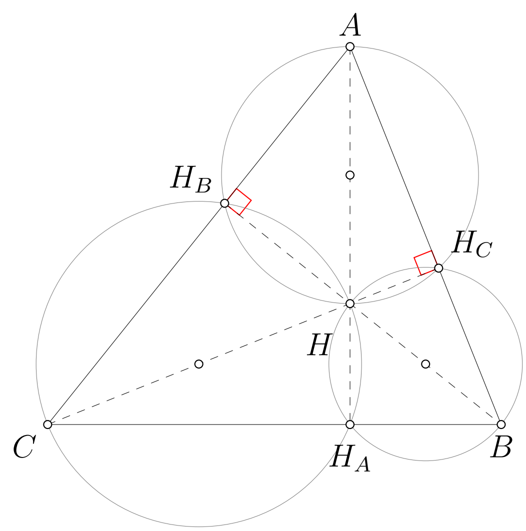
Les propriétés de cette sous-section sont à connaître et on doit savoir les retrouver rapidement.

Propriété 3.8.

(i) Les quadrilatères suivants sont cocycliques : BCH_BH_C, ABH_AH_B et ACH_AH_C. Les centres des cercles sont les milieux des côtés du triangle ABC.

(ii) Les quadrilatères suivants sont cocycliques : AH_BHH_C, BH_AHH_C et CH_AHH_B. Les centres des cercles sont les milieux des segments joignant H aux sommets du triangle ABC.





Démonstration. (i) : On a $\widehat{BH_BC} = 90° = \widehat{BH_CC}$ donc les points B, C, H_B et H_C sont cocycliques. Puisque le triangle BCH_B est rectangle en H_B, le centre de son cercle circonscrit est le milieu de son hypoténuse, à savoir le milieu du segment $[BC]$. On procède de même pour les autres quadrilatères.

(ii) : On a cette fois-ci $\widehat{HH_BA} = \widehat{BH_BA} = 90° = 180° - 90° = 180° - \widehat{AH_CC} = 180° - \widehat{AH_CH}$ donc les points A, H_B, H et H_C sont bien cocycliques. Puisque le triangle AH_CC est rectangle en H_C, le centre de son cercle circonscrit est le milieu de son hypoténuse, à savoir le milieu de $[AH]$. On procède de même pour les autres quadrilatères. □

Une conséquence importante est l'avalanche de relations d'angles qui découle de toutes ces similitudes. On peut la résumer par la propriété suivante.

Propriété 3.9.

(i) On a la relation de similitude suivante : $\Delta ABC \sim \Delta AH_BH_C \sim \Delta H_ABH_C \sim \Delta H_AH_BC$

(ii) On a la relation de similitude suivante : $\Delta AH_CH \sim \Delta AH_AB \sim \Delta CH_AH \sim \Delta CH_CB$ (ainsi que des relations similaires pour les autres triplets de points).

(iii) $\Delta BHC \sim \Delta H_CHH_B$ et des relations similaitres pour les autres triplets de points.

Exercice 100. Une droite d parallèle à (H_BH_C) coupe (AB) en X et (AC) en Y. Montrer que les points B, Y, X et C sont cocycliques.

Exercice 101. Montrer que la tangente en A au cercle circonscrit au triangle ABC est parallèle à la droite (H_BH_C)

Cet exo ne serait-il pas un cas dégénéré du précédent ?

Exercice 102. Montrer que le point H est le centre du cercle inscrit au triangle $H_AH_BH_C$.

Exercice 103. Soit M le milieu du segment $[BC]$. Montrer que les droites (H_BM) et (H_CM) sont tangentes au cercle de diamètre $[AH]$.

3.4.2 Symétriques et conjugués

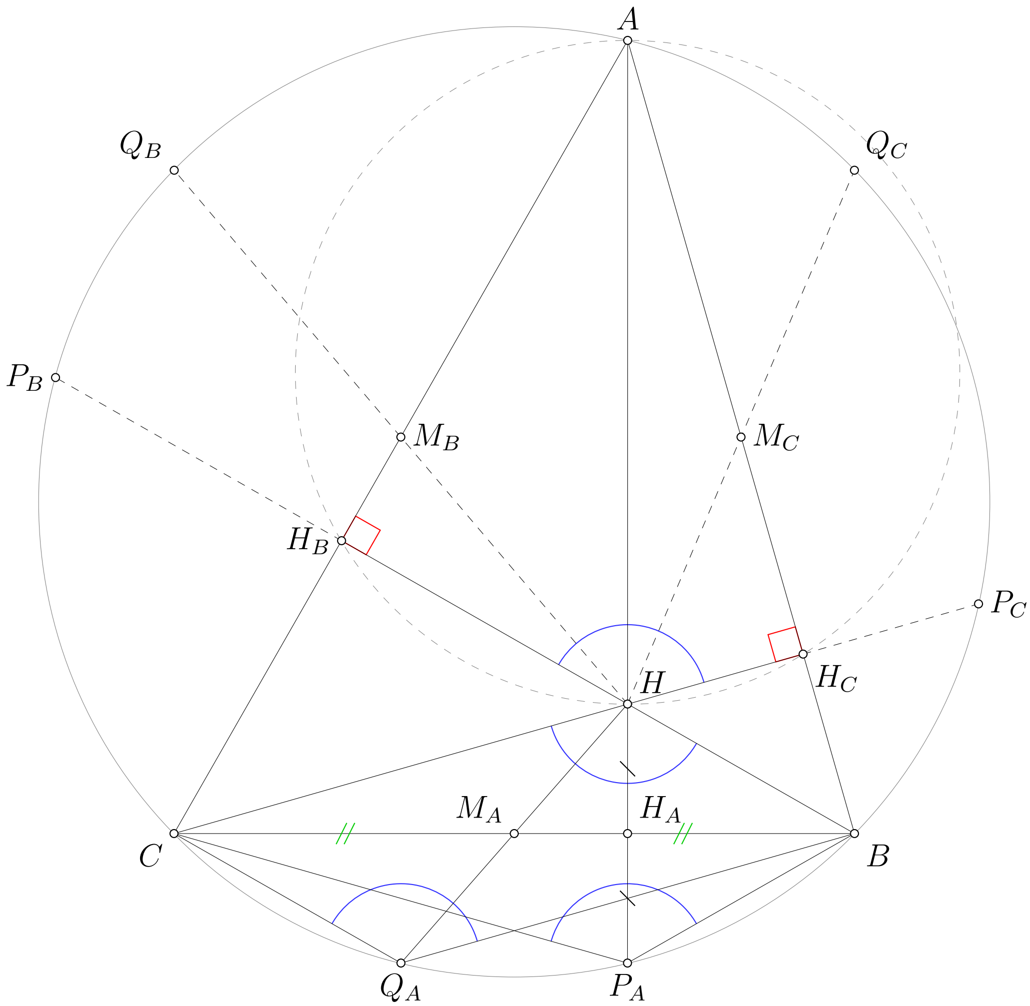
Les propriétés qui suivent sont désormais des grands classiques de la géométrie du triangle. Ainsi, il y a eu une vague d'exercices d'olympiades utilisant abondamment ces propriétés, que ce soit pour redéfinir certains points connus de fçaons cachés, ou pour simplement appliquer la configuration. Ces propriétés sont désormais moins à la mode, il ne faut donc pas espérer tomber sur un exercice qui en soit l'application directe. Mais au contraire, elle peuvent constituer une première étape d'un problème ou seulement une trame de fond. Leur connaissance reste donc essentiels, puisque de tels problèmes sont alors très discriminants.

La première famille de propriétés concerne les symétriques de l'orthocentre par rapport à divers points et axes particuliers du triangles.

Propriété 3.10. Soient M_A, M_B et M_C les milieux des segments $[BC], [CA]$ et $[AB]$.

(i) Montrer que les symétriques du point H par rapport aux points H_A, H_B et H_C appartiennent au cercle circonscrit du triangle ABC.

(ii) Montrer que les symétriques du point H par rapport aux points M_A, M_B et M_C appartiennent au cercle circonscrit au triangle ABC.



Démonstration. (i) Soient P_A, P_B et P_C les symétriques respectifs de l'orthocentre par rapport aux côtés $[BC], [CA]$ et $[AB]$.
On montre que P_A appartient au cercle circonscrit au triangle ABC, la démonstration s'adaptant pour les points P_B et P_C.
Puisque la symétrie conserve les angles, $\widehat{CP_AB} = \widehat{CHB}$. Puisque les angles $\widehat{BHC}$ et $\widehat{H_BHH_C}$ sont opposés par le sommet, $\widehat{BHC} = \widehat{H_BHH_C}$.
Enfin, le quadrilatère AH_BHH_C est cyclique, on a donc $\widehat{H_BHH_C} = 180° - \widehat{H_BAH_C}$ d'après le théorème de l'angle inscrit.
En résumé :

$$\widehat{CP_AB} = \widehat{BHC} = \widehat{H_BHH_C} = 180° - \widehat{H_BAH_C} = 180° - \widehat{BAC}$$

donc le point P_A appartient au cercle circonscrit au triangle ABC d'après le théorème de l'angle inscrit.

(ii) Soient Q_A, Q_B et Q_C les symétriques du point H respectivement par rapport aux points M_A, M_B et M_C. De même que pour la partie (i), on se contente de montrer que le point Q_A appartient au cercle circonscrit au triangle ABC.
Puisque les segments $[HQ_A]$ et $[BC]$ se coupent en leur milieu, le quadrilatère HBQ_AC est un parallélogramme. On a donc $\widehat{CQ_A} = \widehat{CHB}$. En utilisant les mêmes égalités d'angles qu'à la partie précédente, on a donc

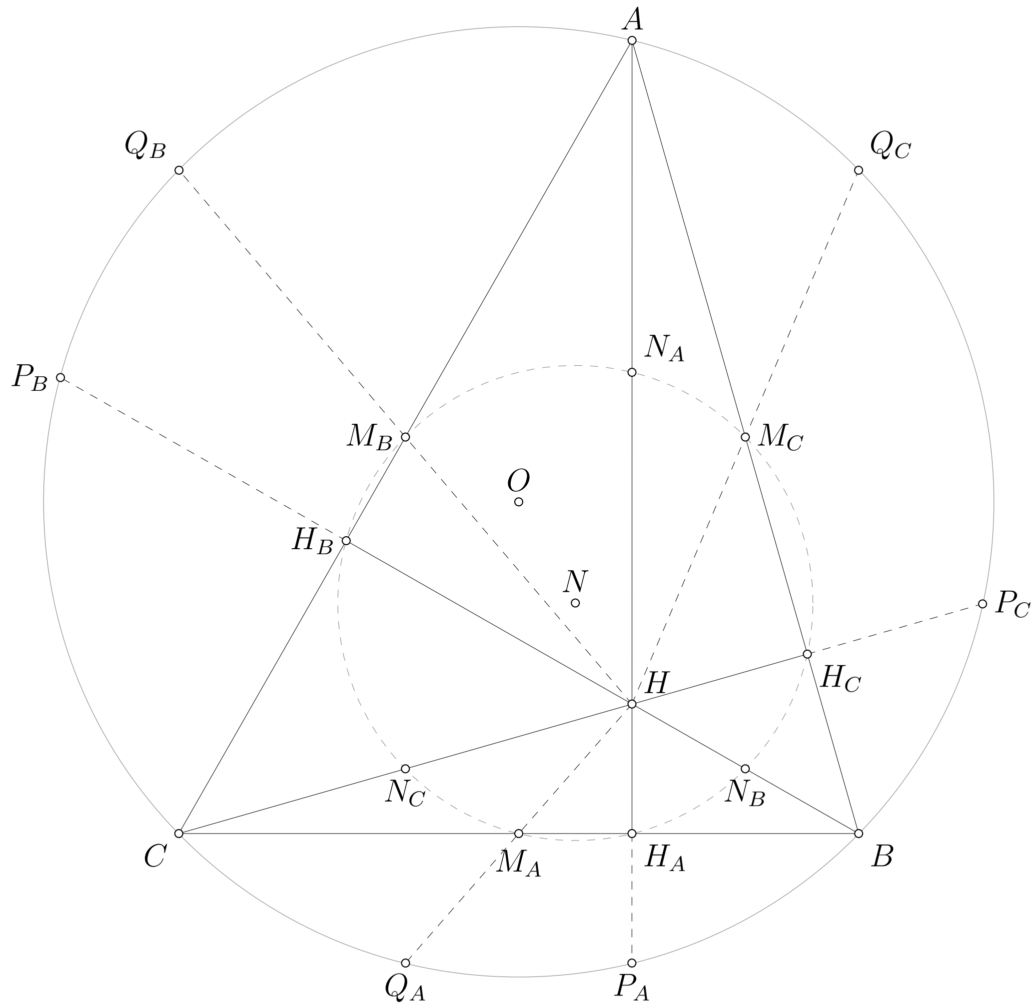
$$\widehat{CQ_AB} = \widehat{CHB} = 180° - \widehat{BAC}$$

et l'on conclut à nouveau par réciproque du théorème de l'angle inscrit. □

Pour qui maitrise les homothéties, une conséquence de ce résultat est l'existence du cercle d'Euler :

Corollaire 3.1 (Cercle d'Euler)**.** Soit O le centre du cercle passant par A, B et C. Soient N_A, N_B et N_C les milieux des segments $[AH]$, $[BH]$ et $[CH]$. Alors les neuf points $H_A, H_B, H_C, M_A, M_B, M_C, N_A, N_B$ et N_C sont sur un même cercle, dont le centre est le milieu du segment $[OH]$. ce cercle est appelé le cercle d'Euler.

Démonstration.



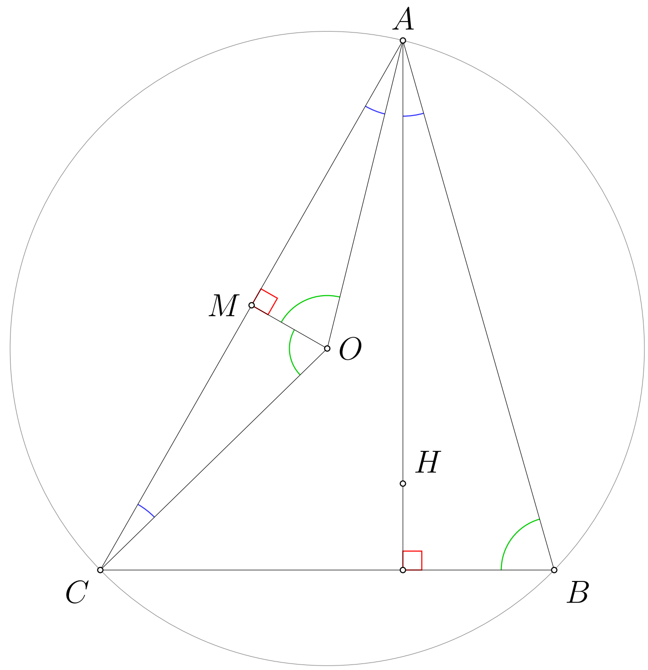
On applique une homothétie de centre H et de rayon $\frac{1}{2}$. Celle-ci envoie les points P_X sur les points H_X, les points Q_X sur les points M_X, les points X sur les points N_X et le point O sur le milieu du segment $[OH]$. Comme les neuf points $A, B, C, P_A, P_B, P_C, Q_A, Q_B$ et Q_C sont sur un même cercle, il en est de même pour leur neuf images, qui sont précisément les points cités dans le théorème. De plus, le centre de ce cercle est l'image du point O. $\square$

Il peut être bon de garder ce résultat en mémoire lorsqu'apparaissent au moins trois des neuf points du cercle d'Euler.

La deuxième partie de cette sous-section concerne un résultat très important reliant le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC et l'orthocentre.

Propriété 3.11. On a les égalités $\widehat{CAO} = \widehat{HAB}$, $\widehat{CBO} = \widehat{ABH}$ et $\widehat{BCO} = \widehat{ACH}$.

On dit que O et H sont des *conjugués isogonaux* pour le triangle ABC.



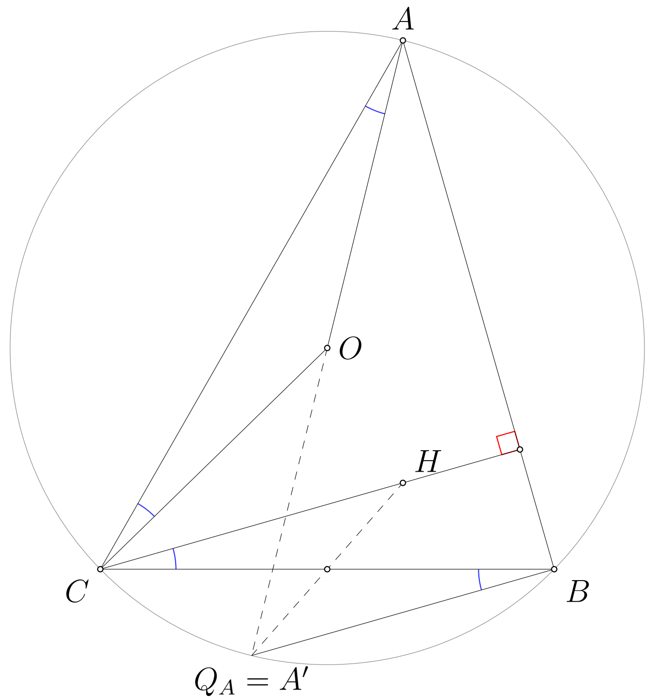
Démonstration. On se contente de démontrer que $\widehat{HAB} = \widehat{CAO}$, les autres égalités se démontrant de façon symétrique.

On note M le milieu du segment $[AC]$.

Puisque le triangle OAC est isocèle au point O, la droite (MO) est la bissectrice de l'angle $\widehat{AOC}$ est aussi la médiatrice du segment $[AC]$. Le triangle $\widehat{MOA}$ est donc rectangle en M avec $\widehat{MOA} = \frac{1}{2}\widehat{COA} = \widehat{CBA}$ d'après le théorème de l'angle au centre. Les triangles MOA et H_ABA ont donc deux angles égaux deux à deux (en rouge et vert sur la figure). Ils sont donc semblables. Ainsi, $\widehat{MAO} = \widehat{H_AAB} = \widehat{HAB}$, ce qui est l'égalité voulue. $\square$

Un corollaire intéressant est une information supplémentaire sur le point Q_A, le symétrique de H par rapport au milieu du segment $[BC]$.

Corollaire 3.2. Soit A' le point diamétralement opposé à A dans le cercle circonscrit au triangle ABC. Alors A' est le symétrique de H par rapport au milieu de $[BC]$.



Démonstration. Soit Q_A le symétrique de H par rapport au milieu du segment $[BC]$. Montrer que $\widehat{CAO} = \widehat{CAQ_A}$, ce qui montrera que A, O et Q_A sont alignés. Puisque Q_A est sur le cercle passant par A, B et C, cela concluera que $Q_A = A'$ est diamétralement opposé à A.

La quadrilatère HCQ_AB étant un parallélogramme, $\widehat{CBQ_A} = \widehat{HCB}$. D'après le théorème de l'angle inscrit, on a $\widehat{CBQ_A} = \widehat{CAQ_A}$. D'après la propriété précédente, on a $\widehat{BCH} = \widehat{ACO}$. En mettant ces égalités bout à bout, on a donc

$$\widehat{CAQ_A} = \widehat{CBQ_A} = \widehat{HCB} = \widehat{OCA} = \widehat{OAC}$$

□

Il y a bien sûr d'autres façon de démontrer ce résultat. On aurait par exemple pu montrer directement que $\widehat{ACQ_A} = 90°$.

Les exercices suivants exploitent les propriétés démontrées dans cette sous-section.

Exercice 104. Montrer que (P_AQ_A) et (BC) sont parallèles. Déduire que $P_AB = Q_AC$.

Exercice 105. Soit M le milieu de $[BC]$. Montrer que $OM = \frac{1}{2}AH$.

Exercice 106. Montrer que les droites (AO) et (H_BH_C) sont perpendiculaires. En se rappelant que les triangles AH_BH_C et ABC sont semblables et que O et H sont conjugués isogonaux, pourquoi cela n'est pas surprenant ?

Exercice 107. Soit X le point d'intersection de la parallèle à (BC) passant par A avec le cercle passant par A, B et C. Montrer que les droites (XQ_A) et (BC) sont perpendiculaires.

Exercice 108. Soit ABC un triangle dans lequel $\widehat{BAC} = 60°$. On note O le centre du cercle circonscrit, H l'orthocentre et I le centre du cercle inscrit au triangle ABC. Montrer que $IH = IO$.

Exercice 109. * (Estonie TST 2015) Soit ABC un triangle et H son orthocentre. Soient K et P les milieux des segments $[BC]$ et $[AH]$, respectivement. La bissectrice intérieure issue de A dans le triangle ABC coupe la droite (KP) en D. Prouver que $\widehat{ADH} = 90°$.

Exercice 110. * (Envoi Géométrie 2019-2020 P8) Soit ABC un triangle acutangle non isocèle en A. Soit M le milieu du segment $[BC]$, H l'orthocentre du triangle ABC, O_1 le milieu du segment $[AH]$ et O_2 le centre du cercle circonscrit au triangle CBH. Montrer que le quadrilatère O_1AMO_2 est un parallélogramme.

Exercice 111. (France TST 2016/2017) Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus. Les hauteurs $[AA_1], [BB_1]$ et $[CC_1]$ se coupent au point H. Soit A_2 le symétrique de A par rapport à (B_1C_1), et soit O le centre du cercle circonscrit du triangle ABC.
1) Prouver que les points O, A_2, B_1 et C sont cocycliques.
2) Prouver que les points O, H, A_1 et A_2 sont cocycliques.

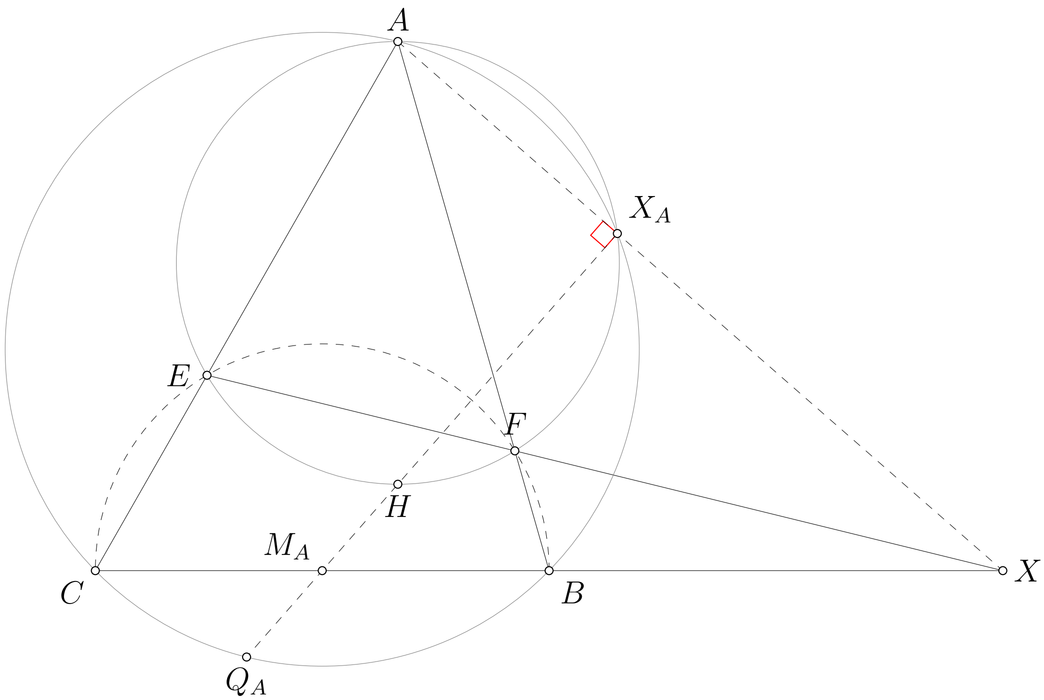
Exercice 112. * (JBMO 2013) Soit ABC un triangle tel que $AB < AC$ et soit O le centre de son cercle circonscrit k. Soit D un point du segment $[BC]$ tel que $\widehat{BAD} = \widehat{CAO}$. Soit E le second point d'intersection du cercle k avec la droite (AD). Soient M, N et P les milieux respectifs des segments $[BE], [OD]$ et $[AC]$. Montrez que les points M, N, P sont alignés.

3.4.3 Un point un peu particulier

On présente ici un point particulier du triangle sur lequel on trouve relativement peu de littérature alors qu'il apparaît dans de nombreux problèmes.

Comme nous le disions pour le pôle Sud, une configuration est intéressante si un point appartient à beaucoup d'objets en même temps. Lorsque c'est le cas, le point peut être défini de plusieurs façons différentes, dépendant des propriétés dont on a besoin et des propriétés que le problème veut nous cacher. Connaître tous les objets supprimer immédiatemment cette difficulté.

Propriété 3.12. Soit ABC un triangle et soit X_A le second point d'intersection du cercle circonscrit au triangle ABC avec le cercle de diamètre $[AH]$. Alors :
(i) Les droites $(AX_A), (H_BH_C)$ et (BC) sont concourantes.
(ii) Les points Q_A, M_A, H et X_A sont alignés.



Démonstration. (i) Les droites (AX_A), (EF) et (BC) sont les axes radicaux des paires prises parmi les trois cercles $\mathcal{C}_{ABC}, \mathcal{C}_{AEF}$ et $\mathcal{C}_{BCE}$, ces trois droites sont donc concourantes.

(ii) Les points Q_A, M_A et H sont déjà alignés. Puisque $[AH]$ est un diamètre de $\mathcal{C}_{AEF}$, $\widehat{AX_AH} = 90°$. Puisque $[AQ_A]$ est un diamètre de $\mathcal{C}_{ABC}$, $\widehat{AX_AQ_A} = 90°$. Ainsi, $\widehat{AX_AH} = \widehat{AX_AQ_A}$ et les points X_A, H et Q_A sont alignés, ce qui achève la propriété. $\square$

Le point X_A est le point de Miquel du quadrilatère complet $AECBXF$!

Exercice 113. Montrer que les droites (M_AH) et (AX) sont perpendiculaires.

Exercice 114. Soit ABC un triangle, E et F les pieds des hauteurs issues de B et C. Soit M le milieu de $[BC]$. Montrer que les cercles $\mathcal{C}_{ABC}, \mathcal{C}_{CFM}$ et $\mathcal{C}_{BME}$ sont concourants.

Exercice 115. ⋆ (JBMO 2019) Soit ABC un triangle tel que $AB < AC$. La médiatrice du segment $[BC]$ coupe les droites (AB) et (AC) respectivement aux points P et Q. Soit H l'orthocentre du triangle ABC et soient M et N les milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[PQ]$. Montrer que les droites (HM) et (AN) se coupent sur le cercle circonscrit au triangle ABC.

Exercice 116. ⋆ (Brésil MO 2011 P5) Soit ABC un triangle aux angles aigus et soit H son orthocentre. Soient D et E les pieds des hauteurs issues des sommets B et C respectivement. Le cercle circonscrit au triangle ADE recoupe le cercle circonscrit au triangle ABC au point F. Montrer que la bissectrice de l'angle $\widehat{BFC}$ et la bissectrice de l'angle $\widehat{BHC}$ se coupent sur le segment $[BC]$.

Exercice 117. ⋆ (Mongolie TST 2018, adapté du IMO SL 2005 G5) Soit ABC un triangle aux angles aigus et H son orthocentre. Une droite passant par H recoupe les côtés $[AB]$ et $[AC]$ respectivement en D et E de sorte que $AD = AE$. Soit M le milieu du segment $[BC]$. La droite (MH) recoupe le cercle circonscrit au triangle ABC en un point K de sorte que K est sur l'arc BC contenant A. Montrer que A, D, E et K sont cocycliques.

4 Prendre son envol

Les exercices qui suivent ne sont pas nécessairement classés par thème ou par difficulté. Entraînez-vous !

Exercice 118. $\star$ (France TST Junior 2022) Soit ABC un triangle et Ω son cercle circonscrit. Soit D le pied de la hauteur issue du sommet A. La bissectrice issue du sommet A coupe le segment $[BC]$ au point P et recoupe le cercle Ω au point S. Soit A' le point diamétralement opposé au sommet A dans le cercle Ω. Montrer que les droites (SD) et $(A'P)$ se coupent sur le cercle Ω.

Exercice 119. $\star$ (JBMO 2014 G1) Soit ABC un triangle tel que $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 40°$. La bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ coupe le segment $[AC]$ en D. Montrer que $BD + DA = BC$.

Exercice 120. $\star$ (JBMO 2015 P3) Soit ABC un triangle. Soient ℓ_1 et ℓ_2 les droites perpendiculaires à (AB) respectivement en A et B. Soit M le milieu de $[AB]$. La perpendiculaire à (AC) passant par M coupe ℓ_1 en E et la perpendiculaire à (BC) passant par M coupe ℓ_2 en F. Soit D le point d'intersection des droites (EF) et (CM). Montrer que $\widehat{ADB} = \widehat{EMF}$.

Exercice 121. $\star$ (JBMO SL 2014 G5) Soit ABC un triangle non isocèle en B. Soit D le pied de la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$. Soit M le milieu de l'arc $\overset{\frown}{AC}$ contenant B sur le cercle circonscrit au triangle ABC. Le cercle circonscrit au triangle BDM coupe la segment $[AB]$ en un point K distinct de B. Soit J le symétrique du point A par rapport au point K. La droite (DJ) intersecte la droite (AM) en un point O. Montrer que les points J, B, M et O sont cocycliques.

Exercice 122. (France TST 2019/2020) Soit ABC un triangle acutangle tel que $\widehat{CAB} > \widehat{BCA}$ et soit P le point du segment $[BC]$ tel que $\widehat{PAB} = \widehat{BCA}$. Soit Q le point d'intersection, autre que A, entre le cercle circonscrit à ABP et la droite (AC). Soit ensuite D le point du segment $[AP]$ tel que $\widehat{QDC} = \widehat{CAP}$, puis E le point de (BD), autre que D, tel que $CE = CD$. Enfin, soit F le point d'intersection, autre que C, entre le cercle circonscrit à CQE et la droite (CD), et soit G le point d'intersection des droites (QF) et (BC). Démontrer que les points B, D, F et G sont cocycliques.

Exercice 123. $\star$ (JBMO 2016 G4) Soit ABC un triangle dont le côté BC est le côté de plus petite longueur. Soit P un point variable sur le segment $[BC]$. Soit D le point du segment $[AB]$ tel que $BD = BP$. Soit E le point du segment $[AC]$ tel que $CP = CE$. Montrer que lorsque le point P varie, le cercle circonscrit au triangle ADE passe par un point fixe.

Exercice 124. (JBMO SL 2019 G6) Soit ABC un triangle non isocèle et soit I le centre de son cercle circonscrit. Soit D un point du segment $[BC]$. Le cercle circonscrit au triangle BID recoupe le segment $[AB]$ en E. Le cercle circonscrit au triangle CID recoupe $[AC]$ en F. Le cercle circonscrit au triangle DEF recoupe les droites (AB) et (AC) respectivement en M et N. Soit P le point d'intersection des droites (BI) et (DE) et soit Q le point d'intersection des droites (CI) et (DF). Montrer que les droites $(EN), (FM)$ et (PQ) sont parallèles.

Exercice 125. (JBMO 2021 P3) Soit ABC un triangle aux angles aigus et soit O le centre de son cercle circonscrit. Soit D le pied de la hauteur issue du sommet A. Soit E le point d'intersection des droites (AO) et (BC). Soit s la droite perpendiculaire à (AO) passant par E. La droite s coupe (AB) en K et (AC) en L. Soit ω le cercle circonscrit au triangle AKL. La droite (AD) recoupe le cercle ω au point S. Montrer que ω et les cercles circonscrits aux triangles ABC et DEX se coupent en un même point.

Exercice 126. $\star$ (JBMO 2022 P2) Soit ABC un triangle tel quel, si D est le pied de la hauteur issue du sommet A et H l'orthocentre du triangle ABC, alors $AH = HD$. La tangente au cercle circonscrit au triangle BHC coupe le côté $[AB]$ en S et le côté $[AC]$ en T. Soit M le milieu de $[BH]$ et N le milieu de $[CH]$. Montrer que les droites (MS) et (NT) sont parallèles.

Exercice 127. $\star$ (France TST novembre 2022) Soit $ABCD$ un parallélogramme et G le centre de gravité du triangle ABD. Soient P et Q les points de la droite (BD) tels que les droites (GP) et (PC) sont perpendiculaires et les droites (GQ) et (QC) sont perpendiculaires.

Montrer que la droite (AG) est la bissectrice de l'angle $\widehat{PAQ}$.

Exercice 128. $\star$ (Iran TST 2019 P1) Soit ABC un triangle et soit H son orthocentre. Les points M et N sont les milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[AH]$. La parallèle à la droite (BC) passant par le point A coupe la droite (MH) en un point D. Le cercle circonscrit au triangle DMN recoupe la droite (AH) en un point K. Soit E un point du segment $[AC]$ tel que $\widehat{EHM} = \widehat{ACB}$ et soit F un point sur le segment $[AB]$ tel que $\widehat{FHM} = \widehat{ABC}$. Montrer que les points D, E, F et K sont cocycliques.

Exercice 129. (RMM SL 2020 G1) Soit ABC un triangle et soient E et F les point de contact de son cercle inscrit avec les côtés $[AC]$ et $[AB]$. Soit P le point tel que $PA = PE$ et $\widehat{EPA} = \widehat{ACB}$. Soit Q le point tel que $QA = QF$ et $\widehat{AQF} = \widehat{ABC}$. Soit M le milieu du segment $[BC]$. Exprimer en fonction des angles du triangle ABC la valeur de l'angle $\widehat{PMQ}$.

Exercice 130. $\star$ (IMO 2014 P4) Soit ABC un triangle. Les points P et Q appartiennent au segment $[BC]$ de telle sorte que $\widehat{PAB} = \widehat{BCA}$ et $\widehat{CAQ} = \widehat{ABC}$. Les points M et N appartiennent respectivement aux droites (AP) et (AQ) de telle sorte que le point P soit le milieu du segment $[AM]$ et que le point Q soit le milieu du segment $[AN]$. Montrer que le point d'intersection des droites (BM) et (CN) appartient au cercle circonscrit du triangle ABC.

Exercice 131. (IMO 2015 P4) Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle Ω de centre O. Un cercle Γ de centre A coupe le segment $[BC]$ en D et E, de sorte que B, D, E et C sont alignés dans cet ordre. Soient F et G les points d'intersection des cercles Ω et Γ, avec F appartenant à l'arc AB de Ω ne contenant pas C et G appartenant à l'arc AC de Ω ne contenant pas B. Les cercles circonscrits aux triangles BDF et CEG recoupent les côtés $[AB]$ et $[AC]$ en K et L. Soit X le point d'intersection des droites (FK) et (GL). Montrer que A, X et O sont alignés.

Exercice 132. $\star$ (IMO 2017 P4) Soient R et S des points distincts appartenant à un cercle Ω tels que le segment $[RS]$ n'est pas un diamètre du cercle Ω. Soit ℓ la tangente au cercle Ω au point R. Le point T est tel que le point S est le milieu du segment $[RT]$. Le point J est choisi sur le plus petit arc RS du cercle Ω de sorte que le cercle Γ circonscrit au triangle JST rencontre la droite ℓ en deux points distincts. Soit A le point commun du cercle Γ et de la droite ℓ qui est le plus proche du point R. La droite (AJ) recoupe le cercle Ω au point K. Prouver que la droite (KT) est tangente au cercle Γ.

Exercice 133. $\star$ (IMO 2020 P1) Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe et soit P un point à l'intérieur du quadrilatère. On suppose que les égalités de rapports suivantes sont vérifiées :

$$\widehat{PAD} : \widehat{PBA} : \widehat{DPA} = 1 : 2 : 3 = \widehat{CBP} : \widehat{BAP} : \widehat{BPC}$$

Montrer que les trois droites suivantes sont concourrantes : la bissectrice de l'angle $\widehat{ADP}$, la bissectrice de l'angle $\widehat{PCB}$ et la médiatrice du segment $[AB]$.

Exercice 134. (IMO 2016 P1) Soit $ABCDE$ un pentagone convexe. Soit F un point sur (AC) tel que $\widehat{FBC} = 90°$. On suppose que les triangles ABF, ACD et ADE sont isocèles et semblables avec

$$\widehat{FAB} = \widehat{FBA} = \widehat{DAC} = \widehat{DCA} = \widehat{EAD} = \widehat{EDA}$$

Soit M le milieu du segment $[CF]$. Soit X le point tel que $AMXE$ est un parallélogramme. Montrer que les droites $(BD), (EM)$ et (FX) sont concourantes.

Exercice 135. (EGMO 2020 P5) Soit ABC un triangle dans lequel $\widehat{BCA} > 90$. Soit Γ son cercle circonscrit et soit R le rayon de Γ. Soit P un point du segment $[AB]$ tel que $PB = PC$ et $PA = R$. La médiatrice du segment $[PB]$ coupe le cercle Γ en deux points D et E. Montrer que P est le centre du cercle inscrit au triangle CDE.

Exercice 136. * (IMO 2022 P4) Soit $ABCDE$ un pentagone convexe tel que $BC = DE$. On suppose qu'il existe un point T à l'intérieur de $ABCDE$ tel que $TB = TD, TC = TE$ et $\widehat{ABT} = \widehat{AET}$. On note P et Q les points d'intersection respectifs des droites (CD) et (CT) avec la droite (AB) ; on suppose que les points P, B, A et Q sont alignés dans cet ordre. De même, on note R et S les points d'intersection respectifs des droites (CD) et (DT) avec la droite (AE), et on suppose que les points R, E, A et S sont eux aussi alignés dans cet ordre. Démontrer que les points P, S, Q et R sont cocycliques.