TD groupe B **2023**
Domaine : Combinatoire

Invariants

Exercice 1

Un fermier plante des carottes dans un potager, qui contient initialement 33 carottes. Certains jours, le fermier ramasse une carotte et en plante 7. D’autres jours, un lapin très maniaque vient et mange exactement 4 carottes. Est-il possible qu’un jour il n’y ait plus aucune carotte dans le potager ?

Exercice 2

On écrit sur le tableau les entiers de 1 à 2023. A chaque étape, on en efface deux et on écrit à la place leur somme ou leur différence. Le nombre d’entiers diminue donc de 1. Le dernier entier obtenu à la deux mille vingt deuxième étape peut-il être égal à 1 ?

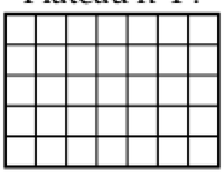
Exercice 3

144 ampoules sont rangées en grille 12 × 12. On dispose d’un interrupteur pour chaque ligne, qui quand il est utilisé éteint toutes les ampoules allumées de la ligne et allume les ampoules éteintes. De même, il y a un interrupteur pour chaque colonne. Igor affirme : “quand je suis arrivé il y avait exactement une ampoule allumée, mais après avoir manipulé certains interrupteurs j’ai réussi à toutes les éteindre”. Qu’en pensez-vous ?

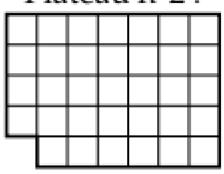
Exercice 4

Peut-on paver les plateaux tronqués suivants à l’aide de dominos 2 × 1 que l’on peut placer verticalement ou horizontalement ?

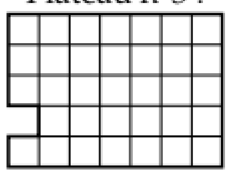
Plateau n°1 :



Plateau n°2 :



Plateau n°3 :

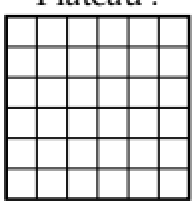


Domino :

Même question pour un échiquier de taille $2n \times 2n$, dont on découpe la case en haut à gauche et la case en bas à droite.

Peut-on paver le plateau suivant à l’aide de tétraminos 4×1 que l’on peut placer verticalement ou horizontalement ?

Plateau :



Tétramino :

Exercice 5
Est-il possible de répartir les entiers 1, 2, . . . , 33 en 11 groupes disjoints de trois éléments chacun, de sorte que dans chaque groupe, l'un des éléments soit la somme des deux autres ?

Exercice 6
6 arbres se trouvent aux 6 sommets d'un hexagone régulier. Sur chaque arbre se pose un oiseau. Toutes les minutes, deux oiseaux simultanément vont de leur arbre à l'un des deux arbres voisins. Peut-on avoir, après un certain nombre de minutes, tous les oiseaux regroupés sur un même arbre ?

Exercice 7
Trois fourmis se déplacent sur le plan cartésien de la manière suivante. Chaque minute, deux des fourmis vont rester immobiles, et la troisième fourmi se déplacera sur une droite parallèle à la droite formée par ses deux comparses ; elle peut bien sûr rester immobile elle aussi si cela lui chante. Originellement, les trois fourmis se situent en trois points de coordonnées (0, 0), (0, 1) et (1, 0). Est-il possible que, au bout d'un certain temps, nos trois fourmis se retrouvent en les points de coordonnées (−1, 0), (0, 1) et (1, 0) ?

Exercice 8
Sur une île se trouvent 2023 caméléons. Parmi eux, on comptait jadis 1201 caméléons bleus, 301 caméléons verts, et 521 caméléons rouges. Puis, lorsque deux caméléons de couleurs différentes se rencontrent, ils changent tous les deux de couleur, et prennent la troisième couleur. Un jour, Félix le pirate arriva sur l'île, et découvrit que tous les caméléons étaient de la même couleur. Quelle était cette couleur ? (Il faut en particulier montrer que c'est la seule possible.)

Exercice 9
On écrit les nombres 1, 2, 3, . . . , 100 000 sur une feuille de papier, puis on remplace chaque nombre par la somme de ses chiffres, et ainsi de suite, jusqu'à ce que chaque nombre ne soit constitué que d'un seul chiffre. Quel est le chiffre le plus fréquent de la liste obtenue ?

Exercice 10
On fait un jeu : on commence avec une pile de 2022 jetons. On retire un jeton, puis on coupe la pile en deux petites piles (pas forcément égales). À chaque étape, on enlève un jeton à l'une des piles et on coupe une pile en deux (pas forcément la même). Le but du jeu est d'arriver à une configuration où toutes les piles sont hautes de 3 jetons, est-ce possible ? (Si on retire un jeton à une pile de 1 jeton, on considère qu'on a une pile de 0 jetons)

Exercice 11
Sur un cercle sont placées 2n pièces avec chacune un côté blanc et un côté noir. Dans l'état initial, elles sont toutes côté blanc sauf une qui est côté noir. On s'autorise les opérations suivantes :

• Choisir deux pièces adjacentes de même couleur et les retourner toutes les deux.
• Choisir deux pièces espacées d'une pièce, et de couleur différente, et les retourner toutes les deux.
Est-il possible d'arriver, après un certain nombre de ces opérations, à la configuration où les pièces affichent toutes la face de la couleur opposée à leur couleur initiale ?

Exercice 12
À partir d'un triplet (a, b, c), on peut effectuer l'opération suivante :
– On choisit deux des nombres du triplet, mettons x et y
– On remplace x par $(x - y)/\sqrt{2}$ et y par $(x + y)/\sqrt{2}$, en laissant le troisième nombre inchangé.
Peut-on passer du triplet initial $(2, \sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ au triplet $(1, \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$ en respectant ces règles ?

Exercice 13
On a tracé quatre droites dans le plan, deux à deux non parallèles, et l'on constate que, depuis la nuit des temps, on trouve sur chaque droite une fourmi qui avance à vitesse constante (pas forcément la même vitesse pour deux fourmis différentes). Une éternité ayant passé, on remarque que, parmi les six paires possibles de fourmis, cinq se sont croisées. Démontrer que la sixième paire de fourmis s'est également croisée.