TD groupe B **2023**
Domaine : Combinatoire

Invariants

Exercice 1
Un fermier plante des carottes dans un potager, qui contient initialement 33 carottes. Certains jours, le fermier ramasse une carotte et en plante 7. D'autres jours, un lapin très maniaque vient et mange exactement 4 carottes. Est-il possible qu'un jour il n'y ait plus aucune carotte dans le potager ?

<u>Solution de l'exercice 1</u>
On remarque tout d'abord que, les jours où le fermier passe, le nombre de carottes augmente de 6, alors que ceux où c'est le lapin, il diminue de 4. Dans tous les cas, la parité du nombre total de carottes reste inchangée. Puisqu'il y a au départ un nombre impair de carottes dans le champ, cela reste le cas à la fin de chaque jour. Comme 0 est pair, il n'est donc pas possible qu'il n'y ait plus aucune carotte dans le potager.

Exercice 2
On écrit sur le tableau les entiers de 1 à 2023. A chaque étape, on en efface deux et on écrit à la place leur somme ou leur différence. Le nombre d'entiers diminue donc de 1. Le dernier entier obtenu à la deux mille dixième étape peut-il être égal à 1 ?

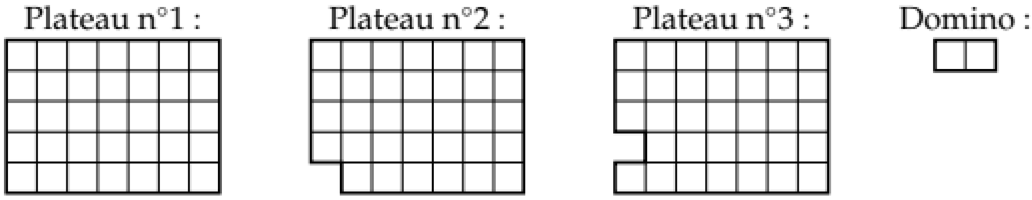
<u>Solution exercice 2</u>
Vu qu'une opération consiste à remplacer deux nombres par leur somme, un invariant envisageable est la somme des éléments écrits sur le tableau (qu'on note X)
Bien sûr, lorsque l'on remplace deux éléments par leur somme, cette valeur ne change pas. Malheureusement, ce n'est pas le cas lorsque l'on remplace deux éléments par leur différence. En effet, si on remplace les deux nombres a et b (avec $a \geq b$) par leur différence $(a - b)$, la valeur de X diminue de $a + b - (a - b) = 2b$. On constate cependant par ce calcul que $2b$ est toujours pair, ce qui signifie que la valeur de X, même si elle change, ne changera jamais de parité ! On peut donc remplacer notre invariant potentiel X par
$Y =$ parité de la somme des éléments écrits sur le tableau.
Nous avons montré que Y était bel et bien un invariant du problème. Or, au départ, la somme des éléments est égale à
$1 + 2 + \dots + 2023 = \frac{20203 \times 2024}{2} = 1012 \times 2023$,
ce qui signifie que la valeur de Y est "pair" dans la configuration initiale. Après 2022 opérations, le nombre que l'on obtiendra sur le tableau sera donc toujours pair, ce qui signifie qu'il ne pourra jamais être 1.

Exercice 3
144 ampoules sont rangées en grille 12 × 12. On dispose d'un interrupteur pour chaque ligne, qui quand il est utilisé éteint toutes les ampoules allumées de la ligne et allume les

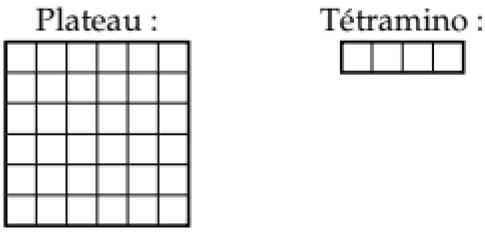
ampoules éteintes. De même, il y a un interrupteur pour chaque colonne. Igor affirme : “quand je suis arrivé il y avait exactement une ampoule allumée, mais après avoir manipulé certains interrupteurs j’ai réussi à toutes les éteindre”. Qu’en pensez-vous ?

Exercice 4
On considère un échiquier, dont on découpe la case en haut à gauche et la case en bas à droite. Peut-on paver les 62 cases restantes avec des dominos ?

Peut-on paver les plateaux tronqués suivants à l’aide de dominos 2 × 1 que l’on peut placer verticalement ou horizontalement ?



Peut-on paver le plateau suivant à l’aide de tétraminos 4×1 que l’on peut placer verticalement ou horizontalement ?



Exercice 5
Est-il possible de répartir les entiers 1, 2, . . . , 33 en 11 groupes disjoints de trois éléments chacun, de sorte que dans chaque groupe, l’un des éléments soit la somme des deux autres ?

Exercice 6
6 arbres se trouvent aux 6 sommets d’un hexagone régulier. Sur chaque arbre se pose un oiseau. Toutes les minutes, deux oiseaux simultanément vont de leur arbre à l’un des deux arbres voisins. Peut-on avoir, après un certain nombre de minutes, tous les oiseaux regroupés sur un même arbre ?

Exercice 7
Trois fourmis se déplacent sur le plan cartésien de la manière suivante. Chaque minute, deux des fourmis vont rester immobiles, et la troisième fourmi se déplacera sur une droite parallèle à la droite formée par ses deux comparses ; elle peut bien sûr rester immobile elle aussi si cela lui chante. Originellement, les trois fourmis se situent en trois points de coordonnées (0, 0), (0, 1) et (1, 0). Est-il possible que, au bout d’un certain temps, nos trois fourmis se retrouvent en les points de coordonnées (−1, 0), (0, 1) et (1, 0) ?

Solution de l’exercice 7

Lorsqu’une des fourmis se déplace, l’aire du triangle qu’elle forme avec ses comparses ne change pas : il s’agit là d’un invariant du problème ! Or, le triangle originel est d’aire 1/2, tandis que le triangle de sommets $(-1, 0)$, $(0, 1)$ et $(1, 0)$ est d’aire 1. Nos trois fourmis ne pourront jamais se retrouver simultanément en ces trois points-là.

Exercice 8

Sur une île se trouvent 2023 caméléons. Parmi eux, on comptait jadis 1201 caméléons bleus,
301 caméléons verts, et 521 caméléons rouges. Puis, lorsque deux caméléons de couleurs différentes se rencontrent, ils changent tous les deux de couleur, et prennent la troisième couleur. Un jour, Félix le pirate arriva sur l’île, et découvrit que tous les caméléons étaient de la même couleur. Quelle était cette couleur ? (Il faut en particulier montrer que c’est la seule possible.)

Solution de l’exercice 8

La configuration initiale est(1201B, 521R, 301V). On commence par constater que les caméléons peuvent être tous rouges : c’est le cas si les 301 verts rencontrent des caméléons bleus, on passe alors à (900B, 1123R, 0V). Puis 300 rouge rencontrent des bleus : (600J, 823R, 600V). Et enfin, les 600 bleus et les 600 verts se rencontrent : (0B, 2023R, 0V). Il reste à montrer que le vert est la seule couleur pour laquelle c’est possible.
Si x, y, z sont respectivement les nombres de caméléons bleus, verts et rouges, le reste dans la division euclidienne de $y - x$ par 3 est un invariant. En effet, selon les rencontres, on passera de (x, y, z) à $(x + 2, y - 1, z - 1)$, à $(x - 1, y + 2, z - 1)$ ou à $(x - 1, y - 1, z + 2)$. Dans le dernier cas, la différence entre le nombre de caméléons verts et le nombre de caméléons bleus ne change pas. Dans les deux premiers cas, elle diminue ou augmente de 3. Or au départ, cette différence est un multiple de 3, donc c’est vrai à toute étape. Comme 2023 n’est pas un multiple de 3, si tous les caméléons sont unis, ils sont forcément rouges.

Exercice 9

On écrit les nombres 1, 2, 3, . . . , 100 000 sur une feuille de papier, puis on remplace chaque nombre par la somme de ses chiffres, et ainsi de suite, jusqu’à ce que chaque nombre ne soit constitué que d’un seul chiffre. Quel est le chiffre le plus fréquent de la liste obtenue ?

Exercice 10

On fait un jeu : on commence avec une pile de 2022 jetons. On retire un jeton, puis on coupe la pile en deux petites piles (pas forcément égales). À chaque étape, on enlève un jeton à l’une des piles et on coupe une pile en deux (pas forcément la même). Le but du jeu est d’arriver à une configuration où toutes les piles sont hautes de 3 jetons, est-ce possible ? (Si on retire un jeton à une pile de 1 jeton, on considère qu’on a une pile de 0 jetons)

Exercice 11

Sur un cercle sont placées 2n pièces avec chacune un côté blanc et un côté noir. Dans l'état initial, elles sont toutes côté blanc sauf une qui est côté noir. On s'autorise les opérations suivantes :

• Choisir deux pièces adjacentes de même couleur et les retourner toutes les deux.

• Choisir deux pièces espacées d'une pièce, et de couleur différente, et les retourner toutes les deux.

Est-il possible d'arriver, après un certain nombre de ces opérations, à la configuration où les pièces affichent toutes la face de la couleur opposée à leur couleur initiale ?

<u>*Solution de l'exercice 11*</u> La réponse est non. On consruit un invariant qui prend des valeurs différentes dans l'état initial et l'état final. Numérotons les pièces de 1 à $2n$ dans l'ordre du cercle, en partant d'un pièce quelconque. Pour $0 \leqslant i \leqslant 2n$, notons c_i l'état de la pièce i : $c_i = 1$ si la pièce est côté noir et $c_i = -1$ si la pièce est côté blanc. On note

$$S = \sum_{i=1}^{2n} (-1)^i c_i.$$

On remarque que S est invariant par les opérations. En effet, la contribution de deux pièces adjacentes de même couleur est nulle (on a $c_i = c_{i+1}$ et $(-1)^{i+1} = -(-1)^i$), et elle le reste donc si on les retourne toutes les deux. Et, de même, la contribution de deux pièces espacées d'une pièce et de couleur différente est nulle, et le reste si on les retourne toutes les deux. Or si la pièce $2n$ est côté noir au départ, alors $S = 2$ à l'état initial. Or $S = -2 \neq 2$ à l'état final, donc on ne peut pas aller de l'un à l'autre à l'aide des opérations.

Exercice 12

À partir d'un triplet (a, b, c), on peut effectuer l'opération suivante :

– On choisit deux des nombres du triplet, mettons x et y

– On remplace x par $(x - y)/\sqrt{2}$ et y par $(x + y)/\sqrt{2}$, en laissant le troisième nombre inchangé.

Peut-on passer du triplet initial $(2, \sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ au triplet $(1, \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$ en respectant ces règles ?

<u>Solution de l'exercice 12</u>

Ici, un invariant est donné par $a^2 + b^2 + c^2$. Or on constate que la somme des carrés n'est pas la même pour les deux triplets, donc on ne peut pas passer de l'un à l'autre avec la transformation indiquée.

Exercice 13

On a tracé quatre droites dans le plan, deux à deux non parallèles, et l'on constate que, depuis la nuit des temps, on trouve sur chaque droite une fourmi qui avance à vitesse constante (pas forcément la même vitesse pour deux fourmis différentes). Une éternité ayant passé, on remarque que, parmi les six paires possibles de fourmis, cinq se sont croisées. Démontrer que la sixième paire de fourmis s'est également croisée.

Solution de l'exercice 13

Munissons notre plan d'un repère cartésien, et choisissons également une origine des temps. On numérote alors nos fourmis de 1 à 4, et on note d_k la droite sur laquelle se déplace la fourmi k. Puis, si cette fourmi se retrouve au point de coordonnées (x, y) à l'instant t, on lui associe, dans un repère en 3 dimensions, le point de coordonnées (x, y, t). Ce faisant, lorsque notre fourmi décrit la droite d_k, et puisqu'elle se déplace à vitesse constante, l'ensemble des points que l'on a dessinés forme également une droite, que l'on note Δ_k.

Supposons maintenant que la paire (3, 4) soit la seule paire de fourmis dont on n'est pas sûr qu'elles se sont rencontrées. Alors les droites Δ_1 et Δ_2 ont un point commun, ce qui signifie qu'elles appartiennent à un même plan P. Puis les droites Δ_3 et Δ_4 ont chacune un point commun avec Δ_1 et avec Δ_2, donc elles appartiennent aussi au plan P. Or, puisque d_3 et d_4 ne sont pas parallèles, les droites Δ_3 et Δ_4 ne sont pas parallèles non plus. Elles sont donc sécantes, ce qui signifie bien que les fourmis 3 et 4 se sont croisées.