PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 4 : COMBINATOIRE
À RENVOYER AU PLUS TARD LE 20 MARS 2023

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe junior est constitué des élèves nés en 2008 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe senior.
- Les exercices classés “Juniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés “Seniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Exercices Juniors

Exercice 1. Six paniers à fruits contiennent des poires, des pêches et des pommes. Le nombre de pêches dans chaque panier est égal au nombre total de pommes dans les autres paniers. Le nombre de pommes dans chaque panier est égal au nombre total de poires dans les autres paniers. Montrez que le nombre total de fruits est un multiple de 31.

Exercice 2. Une ligne maritime Est-Ouest voit partir chaque matin 10 bateaux à des moments tous distincts, 5 bateaux partent du côté Ouest et 5 du côté Est. On suppose qu'ils naviguent tous à la même vitesse et que dès que deux bateaux se rencontrent ils se retournent et repartent chacun de leur côté, toujours à la même vitesse. Quel est le nombre possible de rencontres entre bateaux ?

Exercice 3. Soit $n \geqslant 6$. Prouvez que chaque carré peut être découpé en exactement n carrés (pas nécessairement de même taille).

Exercice 4. Un certain nombre de diagonales divisent un polygone convexe en triangles. Ces segments ne peuvent s'intersecter que sur un sommet du polygone. Sur chaque sommet du polygone on écrit le nombre de triangles qui touchent ce sommet. Est-il possible de reconstruire les diagonales en connaissant seulement les nombres sur les sommets ?

Exercice 5. Nimatha et Thanima jouent à un jeu sur un échiquier 8×8. Tour par tour en commençant par Nimatha, chaque joueur choisit une case qui n'a pas encore été choisie et la colorie dans sa couleur (rouge pour Nimatha, bleu pour Thanima). Montrez que Thanima peut toujours faire que Nimatha ne puisse colorier aucun carré 2×2 entièrement en rouge.

Exercice 6. Au moins $n(\sqrt{n} + \frac{1}{2})$ carrés d'un échiquier $n \times n$ ont été marqués. Montrer qu'il existe quatre cases marquées qui forment les coins d'un rectangle.

Exercice 7. Soit $n \geqslant 3$ un entier. Chaque ligne d'un tableau $(n-2) \times n$ contient les nombres de 1 à n en un exemplaire chacun, on suppose de plus que dans chaque colonne tous les nombres sont différents. Montrer que l'on peut compléter le tableau en un tableau $n \times n$ de telle sorte que dans chaque ligne et dans chaque colonne il y ait tous les nombres de 1 à n.

Exercice 8. Dans un tournoi organisé entre 6 équipes, chaque équipe joue contre chaque autre équipe exactement une fois. Lorsqu'une équipe gagne, elle obtient 3 points, et l'équipe perdante reçoit 0 point. Si la partie est nulle, les deux équipes reçoivent un point. Déterminez les a pour lesquels il est possible que les scores finaux des équipes puissent être les six nombres consécutifs $a, a+1, \ldots, a+5$?

Exercice 9. Plusieurs nombres sont écrits sur un ligne. Thanima a le droit de choisir deux nombres adjacents de telle sorte que le nombre de gauche soit strictement plus grand que le nombre de droite, elle échange alors ces deux nombres et les multiplie par 2. Montrer que Thanima ne peut effectuer qu'un nombre fini de telles opérations.

Exercices Seniors

Exercice 10. Comptez le nombre de réarrangements $a_1, a_2, \ldots, a_{2023}$ de la séquence $1, 2, \ldots, 2023$ telle que $a_k > k$ pour exactement une valeur de k.

Exercice 11. Un terrible groupe de bandits se prépare à se partager un butin. Chaque bandit vise deux autres bandits avec ses pistolets. Les bandits sont appelés dans un certain ordre. Lorsqu'un bandit est appelé, s'il est encore en vie, il tire sur les bandits qu'il visait. Après que tous les bandits ont été appelés, il y a eu 28 victimes. Montrez que quelque soit l'ordre dans lequel on avait appelé les bandits, il y aurait eu au moins 10 victimes.

Exercice 12. Les nombres $0, 1, \ldots, n$ sont écrits sur un tableau. À tout moment, Thanima peut effacer un nombre s'il est la moyenne arithmétique de deux nombres encore présents sur le tableau. L'objectif de Thanima est d'effacer le plus de nombres possible, et elle joue de façon optimale. En fonction de n, combien de nombres reste t-il à la fin sur le tableau ?

Exercice 13. Un rectangle est divisé en dominos 1×2 et 2×1. Dans chaque domino, une diagonale est tracée. Deux diagonales n'ont jamais d'extrémité commune. Montrez qu'exactement deux coins du rectangle sont des extrémités de ces diagonales.

Exercice 14. Soit G un graphe à n sommets. Une arête e de G est un cul-de-sac s'il est possible de partitionner G en deux ensembles A et B tels que :

— Il y a au plus 2023 arêtes de G ayant une extrémité dans A et une extrémité dans B.
— L'arête e a l'une de ses extrémités dans A et l'autre dans B.

Montrez qu'il y a au plus $2023(n-1)$ culs-de-sac.

Exercice 15. On place un certain nombre de segments ouverts dans le plan, aucun d'entre eux n'est parallèle aux axes x et y. Ces segments sont **disjoints**. Thanima commence à se déplacer depuis $(0, 0)$ parallèlement à l'axe x. À chaque fois qu'elle rencontre un mur, elle tourne de 90 degrés, et continue à se déplacer sans traverser le mur.
Démontrez qu'il est impossible que Thanima visite les deux côtés de tous les murs.

Exercice 16. Soit $k \geqslant 1$ un entier. Quel est le plus petit entier n tel que, quelque soit la manière de placer n points dans le plan, il est possible de choisir un sous-ensemble S constitué de k de ces points qui vérifie soit "pour toute paire P, Q de points de S, la distance entre P et Q est inférieure ou égale à 2" soit "pour toute paire P, Q de points de S, la distance entre P et Q est strictement plus grande que 1."

Exercice 17. Soit $k, n \geqslant 1$ deux entiers fixés. Thanima possédait $2n$ bonbons de chaque couleur. Elle a donné deux bonbons de couleurs différentes à chacun des enfants de sa famille. Sachant que quelque soit la manière de choisir $k+1$ enfants, il y en a deux parmi eux qui ont reçu une couleur de bonbon en commun, trouvez le nombre maximum possible d'enfants.

Exercice 18. Thanima possède un magnifique collier constitué de rubis, d'émeraudes et de saphirs, que l'on représente par une suite de R, E et S. En une opération magique, elle peut faire l'une des actions suivantes :

— Remplacer un motif RR dans le collier par un motif ES (ou ES par RR).
— Remplacer un motif EEE par un motif SR (ou SR par EEE).
— Supprimer un motif SS, ou ajouter un motif SS n'importe où.
— Supprimer un motif RES, ou ajouter un motif RES n'importe où.

Il n'est pas possible de déplacer les lettres cycliquement à cause du fermoir. Elle ne peut pas non plus retourner le collier.
Est-il possible de passer d'un collier contenant uniquement un saphir à un collier contenant uniquement une émeraude avec des opérations magiques ?