Combinatoire A (Invariants)

12 Février

1 Exercices d'invariants

Exercice 1. Les nombres 2, 3, 5, 7, 11 sont écrits sur un tableau. Un mouvement consiste à remplacer deux nombres a et b de même parité par $(a + b)/2$ et $(b + a)/2$.
Est-il possible de suivre ce processus pour rendre tous les nombres du tableau égaux ?

Exercice 2. On dispose d'une pile de 100 pièces. De là, il est possible d'effectuer deux types d'opérations :

— Enlever une pièce d'un tas d'au moins 3 pièces et diviser le tas restant en deux tas (non vides),
— Supprimer un tas d'une seule pièce.

Est-il possible après une succession de telles opérations d'arriver à la situation où l'on n'a plus aucune pièce ?

Exercice 3. On écrit sur le tableau les entiers de 1 à 2011. A chaque étape, on en efface deux et on écrit à la place leur différence. Le nombre d'entiers diminue donc de 1. Le dernier entier obtenu à la deux mille dixième étape peut-il être égal à 1 ?

Exercice 4. 6 arbres se trouvent aux 6 sommets d'un hexagone régulier. Sur chaque arbre se pose un oiseau. Toutes les minutes, deux oiseaux simultanément vont de leur arbre à l'un des deux arbres voisins. Peut-on avoir, après un certain nombre de minutes, tous les oiseaux regroupés sur un même arbre ?

Exercice 5. (test du 12 janvier)
Martin a versé à la hâte n litres d'eau dans n bouteilles. Certaines bouteilles sont donc plus remplies que d'autres. C'est alors qu'il se rappelle que sa mission était de mettre exactement un litre d'eau dans chaque bouteille avant de refermer le bouchon de celle-ci. Comme il n'a pas encore refermé les bouchons, il est encore temps de réparer ses bêtises.
Pour ce faire, il choisit une première bouteille, verse une partie de son contenu dans une autre bouteille s'il le souhaite, puis bouche cette première bouteille. Il choisit ensuite une seconde bouteille (qui peut être celle dans laquelle il a partiellement vidé la première bouteille, ou pas), verse une partie de son contenu dans une autre bouteille (mais pas dans la première bouteille, qui est déjà bouchée) s'il le souhaite, puis la bouche. Puis il procède de même avec une troisième bouteille, et ainsi de suite, jusqu'à boucher toutes les bouteilles.
Martin pourra-t-il réparer ses bêtises ?

— Note : les bouteilles sont surdimensionnées, et pourraient chacune contenir jusqu'à n litres d'eau, ce qui les empêchera de déborder.

2 Exercices de coloriage

Exercice 6. Le jeux du taquin est formé de 15 carrés qui se déplacent dans un rectangle 4×4. On commence le jeu avec les 15 carrés dans un ordre quelconque et la case vide en bas à droite. Le but est de trier les 15 cases, en laissant la case vide de nouveaux en bas à droite. Montrer qu'il est impossible d'y arriver en exactement 2023 mouvements.

Exercice 7. Le plancher est pavé avec des dalles de type 2×2 et 1×4. Une dalle s'est brisée. Est-il possible de réarranger les dalles de façon à remplacer la dalle brisée avec une nouvelle dalle de l'autre type ?

Un exercice
Exercice 8. (Un peu plus difficile)
Toutes les cases d'un tableau de 1x2n sont initialement blanches. À chaque étape on a le droit de prendre 2 cases adjacentes de la même couleur et d'inverser leur couleur (de blanc vers noir ou de noir vers blanc). En répétant ce processus un nombre arbitraire de fois, quel nombre de configurations différentes peut-on obtenir ? (2 configurationssont dites différentes si et seulement si il existe un indice i tel que la ième case n'ait pas la même couleur dans ces configurations.)

Exercice 9. (Encore plus difficile !)
https://www.youtube.com/watch?v=4HvMd90fx14&list=PL7s6RT2p1HC-CfI-dLputEnFkzy