PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 11 JANVIER 2023

DURÉE : 4H

## Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

  **Chaque exercice est noté sur 7 points.**

# Énoncés Junior

*Exercice 1.* Martin a écrit le couple d'entiers $(1011, 1012)$ au tableau. Puis, chaque minute, si le couple $(a, b)$ est écrit au tableau, il l'efface et le remplace, selon son choix, par l'un des couples $(b, a)$, $(b+1, a-1)$ ou $(b-2, a+2)$, en s'imposant uniquement de n'écrire que des couples dont les deux nombres sont positifs ou nuls.

Quels sont les couples d'entiers que Martin peut écrire au tableau après un nombre fini de telles opérations ?

*Exercice 2.* Soit $A$, $B$, $C$, $D$ et $E$ cinq points situés dans cet ordre sur un cercle $\Omega$, de sorte que $(CD)$ soit parallèle à $(BE)$ et que $(AB)$ soit parallèle à $(DE)$. Soit $X$, $Y$ et $Z$ les milieux respectifs des segments $[BD]$, $[CE]$ et $[AE]$.

Démontrer que la droite $(AE)$ est tangente au cercle circonscrit à $XYZ$.

*Exercice 3.* Soit $x$, $y$ et $z$ des réels strictement positifs tels que $xy + yz + zx = 3$.

Démontrer que

$$\frac{x+3}{y+z} + \frac{y+3}{z+x} + \frac{z+3}{x+y} + 3 \geqslant 27\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2}{(x+y+z)^3}.$$

*Exercice 4.* Soit $n \geqslant 3$ un entier. Pour chaque couple de nombres premiers $p$ et $q$ tels que $p < q \leqslant n$, Morgane a écrit la somme $p + q$ au tableau. Elle note ensuite $\mathcal{P}(n)$ le produit de toutes ces sommes. Par exemple, $\mathcal{P}(5) = (2+3) \times (2+5) \times (3+5) = 280$.

Trouver toutes les valeurs de $n \geqslant 3$ pour lesquelles $n!$ divise $\mathcal{P}(n)$.

*Note :* Si deux sommes $p + q$ formées à partir de deux couples différents sont égales l'une à l'autre, Morgane les écrit toutes deux. Par exemple, si $n = 13$, elle écrit bien les deux sommes $3 + 13$ et $5 + 11$.

# Énoncés Senior

*Exercice 5.* Soit $n \geqslant 3$ un entier. Pour chaque couple de nombres premiers $p$ et $q$ tels que $p < q \leqslant n$, Morgane a écrit la somme $p + q$ au tableau. Elle note ensuite $\mathcal{P}(n)$ le produit de toutes ces sommes. Par exemple, $\mathcal{P}(5) = (2+3) \times (2+5) \times (3+5) = 280$.

Trouver toutes les valeurs de $n \geqslant 3$ pour lesquelles $n!$ divise $\mathcal{P}(n)$.

*Note :* Si deux sommes $p + q$ formées à partir de deux couples différents sont égales l'une à l'autre, Morgane les écrit toutes deux. Par exemple, si $n = 13$, elle écrit bien les deux sommes $3 + 13$ et $5 + 11$.

*Exercice 6.* On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ telles que

$$f(x + f(y)) = f(x) + f(y)$$

pour tous les réels $x$ et $y$. Trouver tous les nombres rationnels $q$ tels que, pour toute fonction $f \in \mathcal{F}$, il existe un réel $z$ tel que $f(z) = qz$.

*Exercice 7.* Lucile a écrit au tableau $s$ 2023-uplets d'entiers. Elle s'autorise alors des opérations de la forme suivante : elle choisit deux 2023-uplets $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_{2023})$ et $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_{2023})$, non nécessairement distincts, parmi ceux qu'elle a déjà écrits, puis elle écrit également au tableau les deux 2023-uplets $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, \ldots, u_{2023} + v_{2023})$ et $\max(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\max(u_1, v_1), \ldots, \max(u_{2023}, v_{2023}))$.

Quelles sont les valeurs de $s$ pour lesquelles, si Lucile choisit judicieusement les $s$ 2023-uplets qu'elle a écrits initialement, et en répétant les opérations ci-dessus, elle pourra écrire n'importe quel 2023-uplet d'entiers ?