PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 23 NOVEMBRE 2022

DURÉE : 4H

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Chaque exercice est noté sur 7 points.

Énoncés

Exercice 1. Pour tout entier $k \geqslant 0$, on note a_k le premier chiffre du nombre 2^k, écrit en base 10. Par exemple, $a_5 = 3$ est le premier chiffre de $2^5 = 32$.

Soit $n \geqslant 1$ un entier. Démontrer que, parmi les chiffres de 1 à 9, il y en a un qui est égal à au plus $n/17$ des n chiffres $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$.

Exercice 2. Soit $ABCD$ un parallélogramme et soit G le centre de gravité du triangle ABD. Soit P et Q les points de la droite (BD) tels que les droites (GP) et (PC) sont perpendiculaires et les droites (GQ) et (QC) sont perpendiculaires.

Démontrer que la droite (AG) est la bissectrice de l'angle $\widehat{PAQ}$.

Exercice 3. On dit qu'un entier $n \geqslant 1$ est *nippon* s'il admet trois diviseurs d_1, d_2 et d_3 tels que $1 \leqslant d_1 < d_2 < d_3$ et $d_1 + d_2 + d_3 = 2022$.

Quel est le plus petit entier nippon ?

Exercice 4. Soit $n \geqslant 3$ un entier, et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des nombres réels appartenant à l'intervalle $[0, 1]$. On suppose que la somme $s = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ vérifie l'inégalité $s \geqslant 3$.

Démontrer qu'il existe des entiers i et j tels que $2^{j-i} x_i x_j > 2^{s-3}$.