PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 2 : ALGÈBRE

À RENVOYER AU PLUS TARD LE 10 JANVIER 2023

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe junior est constitué des élèves nés en 2008 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe senior.
- Les exercices classés "Juniors" ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés "Seniors" ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Exercices Juniors

Exercice 1. Soient x, y deux réels strictement positifs. Montrer que

$$\left(x+\frac{2}{y}\right)\left(\frac{y}{x}+2\right) \geqslant 8.$$

Quand a-t-on égalité ?

Solution de l'exercice 1
Dans cet exercice, on a affaire à des termes strictement positifs dont le produit $x \cdot \frac{2}{y} \cdot \frac{y}{x} \cdot 2 = 4$ est connu. On pense donc à utiliser l'inégalité arithmético-géométrique qui donne à la fois

$$x+\frac{2}{y} \geqslant 2\sqrt{\frac{2x}{y}}$$

et

$$\frac{y}{x}+2 \geqslant 2\sqrt{\frac{2y}{x}}.$$

Les deux inégalités ne font intervenir que des termes positifs donc on peut les combiner pour avoir

$$\left(x+\frac{2}{y}\right)\left(\frac{y}{x}+2\right) \geqslant 2\sqrt{\frac{2x}{y}}\left(\frac{y}{x}+2\right) \geqslant 4\sqrt{\frac{2x \cdot 2y}{yx}} = 8.$$

Cherchons les cas d'égalité. Pour ceci, il faut avoir égalité dans les deux inégalités précédentes.
Comme $\frac{y}{x}+2>0$, on a égalité dans la première égalité si et seulement si on a égalité dans la première application de l'inégalité arithmético-géométrique, c'est-à-dire si $x = \frac{2}{y}$, soit $xy = 2$.
De même, pour avoir égalité dans la deuxième inégalité, il faut que $\frac{y}{x} = 2$. En multipliant les deux équations ensemble, on trouve $y^2 = 4$, donc $y = 2$ car y est positif. Ensuite, on obtient $x = 1$. Réciproquement, $x = 1$ et $y = 2$ est un cas d'égalité, c'est le seul.

Commentaire des correcteurs : Si nle problème a été bien réussi dans l'ensemble, voilà quelques pistes de progression :

— Beaucoup d'élèves ne connaissent pas l'IAG et la redémontrent.
— Le cas d'égalité a souvent été oublié.
— Beaucoup d'élèves développent l'expression avant d'y appliquer l'IAG, plutôt que de l'appliquer directement dans les parenthèses.

Exercice 2. Trouver tous les réels x, y tels que

$$x(x-2y)+y(2y-4)+4=0$$

<u>*Solution de l'exercice 2*</u>
Développons l'équation pour obtenir

$$x^2-2xy+2y^2-4y+4=0.$$

Les termes x^2-2xy nous font penser à l'identité remarquable $x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$. On sépare alors le $2y^2$ en y^2+y^2 pour écrire

$$(x-y)^2+y^2-4y+4=0.$$

Mais on reconnaît alors une deuxième identité remarquable $y^2-4y+4=(y-2)^2$. En factorisant, ceci donne

$$(x-y)^2+(y-2)^2=0.$$

Or, une somme de carrés de nombre réels est forcément positive, et ne peut être nulle que si les deux carrés sont tous les deux nuls. Ainsi, si x et y sont solution de l'équation, on a à la fois

$$x-y=0 \quad \text{et} \quad y-2=0.$$

Ainsi, l'unique solution possible de l'équation est $x=y=2$. On peut vérifier réciproquement que ceci est bien une solution, c'est donc la seule.

<u>*Commentaire des correcteurs :*</u> Les élèves ont en général trouvé la solution avec la méthode présentée dans le corrigé. Malheureusement, la plupart oublient de vérifier que la solution qu'ils ont trouvé est bien solution du problème. Il suffit en effet qu'à une seule étape, l'équivalence ne soit pas justifiée pour que la vérification soit nécessaire. Certains ont considéré l'expression comme un polynôme en x, dont il s'agit de trouver les racines, celles-ci n'existant que pour certianes valeurs de y.

Exercice 3. Pour un réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x (par exemple, $\lfloor 2,7 \rfloor = 2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$ et $\lfloor -1,5 \rfloor = -2$).
Soient a, b deux réels tels que

$$a + \lfloor a \rfloor = b + \lfloor b \rfloor.$$

Montrer que $a = b$.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u>
Supposons par l'absurde $a \neq b$. Par symétrie (c'est-à-dire que a et b jouent le même rôle), on peut supposer $a < b$. On a alors

$$\lfloor a \rfloor \leqslant a < b$$

donc $\lfloor a \rfloor$ est un entier relatif inférieur ou égal à b, et donc par définition on a $\lfloor a \rfloor \leqslant \lfloor b \rfloor$. En ajoutant $a < b$, on obtient alors

$$a + \lfloor a \rfloor < b + \lfloor b \rfloor$$

ce est absurde. On a donc bien $a = b$.

<u>*Solution alternative*</u>

Pour un réel x, posons $\{x\}$ la partie fractionnaire de x donnée par $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. C'est un nombre réel compris entre 0 inclus et 1 exclus.
On réécrit alors l'équation en posant $a = \lfloor a \rfloor + \{a\}$ et $b = \lfloor b \rfloor + \{b\}$ pour avoir

$$2\lfloor a \rfloor + \{a\} = 2\lfloor b \rfloor + \{b\}.$$

En réarrangeant les termes, on obtient

$$2\lfloor a \rfloor - 2\lfloor b \rfloor = \{b\} - \{a\}.$$

Mais on a

$$\{b\} - \{a\} \leqslant \{b\} < 1$$

et

$$\{b\} - \{a\} \geqslant -\{a\} > -1.$$

Mais d'après l'égalité au-dessus, $\{b\} - \{a\}$ est un entier, et il est donc nul. On a donc $\{b\} - \{a\} = 0$, ce qui donne ensuite $2\lfloor a \rfloor - 2\lfloor b \rfloor = 0$.
Ainsi, on a

$$\lfloor a \rfloor = \lfloor b \rfloor \quad \text{et} \quad \{a\} = \{b\}$$

donc

$$a = \lfloor a \rfloor + \{a\} = \lfloor b \rfloor + \{b\} = b.$$

<u>*Commentaire des correcteurs :*</u> Exercice très bien réussi, avec une certaine diversité dans les approches. Quelques rares points sont perdus par étourderie. Certains élèves semblent confus sur le fonctionnement de la partie entière dans les négatifs.

Exercice 4. Soit n un entier strictement positif et $x \geqslant n$ un réel. Montrer que $x + \frac{n}{x} \geqslant n + 1$ et donner les cas d'égalité.

Solution de l'exercice 4

Le réel x est strictement positif donc on peut multiplier l'équation par x pour avoir que l'équation est équivalente à

$$x^2 + n \geqslant (n+1)x$$

ce qui donne, en réarrangeant les termes,

$$x^2 - (n+1)x + n \geqslant 0.$$

On reconnait alors une factorisation

$$(x-n)(x-1) \geqslant 0.$$

Mais ceci est vrai car $x \geqslant n$ et $x \geqslant 1$.

On a égalité lorsque $x = n$ ou $x = 1$. Mais si $x = 1$, alors $n = 1$ et $x = n$. Ainsi, dans tous les cas, le seul cas d'égalité est $x = n$.

Solution alternative de l'exercice 4

On repart de l'équation développée $x^2 - (n+1)x + n \geqslant 0$.

La condition $x \geqslant n$ est très peu naturelle, on préfère des conditions de type $t \geqslant 0$. On pose donc $x = n+t$ avec $t \geqslant 0$. L'équation se réécrit alors

$$n^2 + 2nt + t^2 - (n+1)(n+t) + n \geqslant 0$$

ou encore

$$t^2 + (n-1)t \geqslant 0.$$

Mais cette nouvelle équation est clairement vraie car $t \geqslant 0$ et $n \geqslant 1$. De plus, on a égalité si et seulement si $t = 0$, ou encore $x = n$.

Commentaire des correcteurs : Le problème a été bien réussi par les élèves, les solutions rendues étaient presque toutes abouties et suivaient le même schéma que les solutions du corrigé. En revanche, la plupart de ses copies ont été pénalisées pour des manques de justifications, notamment des justifications de signes. On rappelle que lorsqu'on multiplie ou divise une inégalité par une quantité, il faut s'assurer du signe de cette quantité : si elle est strictement positive, ça conserve le sens de l'inégalité, si elle est strictement négative, ça change le sens de l'inégalité, et si on multiplie par une quantité nulle, on n'a pas équivalence. C'est donc un détail qui a toute son importance. En ce qui concerne le cas d'égalité, plusieurs élèves ont oublié de le traiter, et d'autres ont oublié la condition $x \geqslant n$, de sorte qu'ils considéraient que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x = 1$ était un cas d'égalité. Ce n'était vrai que pour $n = 1$, et donc c'était déjà compté dans le cas $x = n$.

Exercice 5. Trouver tous les triplets de réels positifs ou nuls (a, b, c) tels que

$$\begin{cases} a^2 + ab = c \\ b^2 + bc = a \\ c^2 + ca = b \end{cases}$$

Solution de l'exercice 5

Supposons d'abord qu'un des réels est nul, sans perte de généralité $a = 0$. Alors la première équation donne $c = 0$ et la dernière équation donne $b = 0$. Réciproquement, le triplet $a = b = c = 0$ est bien solution, on suppose à présent que les trois réels sont non nuls.

Supposons maintenant que deux des réels soient égaux, sans perte de généralité $a = b$. On peut alors soustraire les deuxième et troisième équations pour avoir $b^2 - c^2 = 0$. Comme b et c sont tous les deux positifs, on a donc $a = b = c$. Dans la première équation, on a alors $2a^2 = a$. Mais a est non nul donc on peut diviser par $2a$ pour avoir $a = \frac{1}{2}$. Réciproquement, le triplet $a = b = c = \frac{1}{2}$ est bien solution. On suppose désormais que les trois réels sont deux à deux distincts.

Faisons le produit des équations pour obtenir

$$a(a + b)b(b + c)c(c + a) = abc.$$

On a supposé précédememnt que les réels étaient tous non nuls donc on peut diviser par abc pour avoir

$$(a + b)(b + c)(c + a) = 1.$$

En faisant la différence des deux premières équations, on obtient $a^2 - b^2 + ba - bc = c - a$ ce qui se factorise en

$$(a - b)(a + b) = (c - a)(b + 1).$$

En faisant de même avec les deuxième et troisième lignes puis avec les troisième et première lignes, on obtient en plus

$$\begin{cases} (b - c)(b + c) = (a - b)(c + 1) \\ (c - a)(c + a) = (b - c)(a + 1) \end{cases}$$

En faisant le produit de ces trois équations et en divisant par $(a - b)(b - c)(c - a)$ des deux côtés (qui est non nul car on a supposé a, b, c deux à deux distincts), on obtient

$$(1 + a)(1 + b)(1 + c) = (a + b)(b + c)(c + a)$$

Mais on a montré précédemment que ce deuxième terme vaut 1, ce qui est absurde car

$$(1 + a)(1 + b)(1 + c) > 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

Ainsi, les seules solutions sont celles trouvées au début de la solution, c'est-à-dire $a = b = c = 0$ et $a = b = c = \frac{1}{2}$.

Commentaire des correcteurs : Le problème a été abordé et plutôt bien réussi. Néanmoins, plusieurs erreurs sont récurrentes :

- Certains obtiennent les deux triplets solutions, mais ne vérifient pas qu'ils sont solution. Quand on raisonne à coup d'implication, il n'est pas du tout sûr que les triplets trouvés soient solution.
- Beaucoup supposent par exemple $a > b > c$. Deux problèmes : on oublie que plusieurs variables peuvent être égales. Mais surtout pour faire cela, il faut que le système soit symétrique : c'est-à-dire que si on inverse deux variables, par exemple a et b, alors le système ne change pas. Ce n'est pas du tout le cas : le système est complètement changé.

Exercice 6. Montrer que pour tous réels a, b, c strictement positifs :

$$\frac{bc}{a^2+2bc}+\frac{ca}{b^2+2ca}+\frac{ab}{c^2+2ab} \leqslant 1 \leqslant \frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ca}+\frac{c^2}{c^2+2ab}$$

Solution de l'exercice 6

Commençons par résoudre une des inégalités. Dans ce problème, l'inégalité la plus simple à étudier est celle de droite. On applique l'inégalité arithmético-géométrique sur les dénominateurs pour avoir $2bc \leqslant b^2+c^2$ par exemple, ce qui donne

$$\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ca}+\frac{c^2}{c^2+2ab} \geqslant \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}=1.$$

Pour le côté gauche, on remarque que celui-ci ressemble beaucoup au côté droit. Appelons G et D les côtés gauche et droit de l'équation respectivement. On a alors

$$G+2\cdot D=\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ca}+\frac{c^2}{c^2+2ab}+\frac{2bc}{a^2+2bc}+\frac{2ca}{b^2+2ca}+\frac{2ab}{c^2+2ab}.$$
$$\frac{a^2+2bc}{a^2+2bc}+\frac{b^2+2ca}{b^2+2ca}+\frac{c^2+2ab}{c^2+2ab}=3.$$

On a donc

$$G=\frac{1}{2}(3-D) \leqslant \frac{1}{2}(3-1)=1$$

par l'inégalité de droite que l'on a montré précédemment.

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été bien réussi. Un certain nombre d'élève n'a trouvé qu'une seule des deux inégalités : il est important d'envoyer tout ce qui a été trouvé sur l'envoi, même si on n'a trouvé que la moitié de l'exercice. Un certain nombre d'élèves ont juste tout mis au même dénominateur, et ensuite prouvé l'inégalité, ce qui n'était pas très élégant mais fonctionnait bien.

Exercice 7. Soient x, y, z des réels strictement positifs tels que $xy + yz + zx = 1$. Montrer que

$$2(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} + \frac{1}{z^2+1}\right) \geqslant 5.$$

Solution de l'exercice 7

Dans cet exercice, on aimerait bien appliquer l'inégalité arithmético-géométrique de façon à obtenir une minoration du type $(x^2+1) + \frac{1}{x^2+1} \geqslant 2$. Mais si on s'y prend mal, on n'arrive pas à conclure. En effet, on aurait pu s'en douter en étudiant le cas d'égalité de l'équation. Au vu de la condition $xy + yz + zx = 1$, on se doute que l'égalité va se produire pour $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$. En introduisant ces valeurs dans l'équation, on trouve bien que l'on a égalité, mais ceci n'est pas un cas d'égalité de l'inégalité arithmético-géométrique plus tôt.

Dans le cas d'égalité $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$, on a $x^2 + 1 = \frac{4}{3}$ et $\frac{1}{x^2+1} = \frac{3}{4}$. On applique donc l'inégalité arithmético-géométrique avec des coefficients appropriés pour avoir l'égalité des deux termes dans ce cas :

$$\frac{3}{4}(x^2+1) + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{x^2+1}\right) \geqslant 2.$$

En sommant ces trois équations, on a

$$\frac{3}{4}(x^2 + y^2 + z^2 + 3) + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} + \frac{1}{z^2+1}\right) \geqslant 6.$$

qui donne

$$\frac{3}{4}(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} + \frac{1}{z^2+1}\right) \geqslant \frac{15}{4}.$$

Par rapport à l'inégalité de l'énoncé, il nous reste un terme $\frac{5}{4}(x^2 + y^2 + z^2)$ à minorer. Mais on a, par l'inégalité arithmético-géométrique,

$$\frac{5}{4}(x^2 + y^2 + z^2) \geqslant \frac{5}{4}(xy + yz + zx) = \frac{5}{4}.$$

En ajoutant cette inégalité à l'inégalité obtenue précédemment, on obtient bien

$$2(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} + \frac{1}{z^2+1}\right) \geqslant \frac{15}{4} + \frac{5}{4} = 5.$$

Solution alternative de l'exercice 7

Posons $s = x^2 + y^2 + z^2$. Notons que par l'inégalité des mauvais élèves,

$$\frac{4}{3}\left(\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} + \frac{1}{z^2+1}\right) \geqslant \frac{4}{3}\frac{(1+1+1)^2}{x^2+y^2+z^2+3} = \frac{12}{s+3}.$$

Ainsi il suffit de montrer que $2s + \frac{12}{s+3} \geqslant 5$. En multipliant des deux côtés par $s + 3$ qui est positif, il suffit de montrer que $2s(s+3) + 12 \geqslant 5(s+3)$. Ceci est équivalent à $2s^2 + 6s + 12 \geqslant 5s + 15$ et donc à $2s^2 + s \geqslant 3$. Or par le lemme du tourniquet, $s \geqslant xy + yz + xz = 1$, donc $2s^2 + s \geqslant 3$. On a bien le résultat voulu.

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été bien résolu par les élèves l'ayant cherché. Attention à ne pas s'emmêler dans les inégalités. Ici on pouvait directement utiliser l'inégalité des mauvais élèves : poser $s = x^2 + y^2 + z^2$ permettait de conclure en multipliant par $s + 3$. Notons qu'il n'est pas nécessaire de reprouver à chaque fois $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + yz + xz$ pour l'utiliser : c'est le lemme du tourniquet, qui est présent dans le cours de la POFM.

Exercice 8. Soient a et b deux réels. On définit les suites (a_n) et (b_n) par $a_0 = a, b_0 = b$ et pour tout n entier naturel, $a_{n+1} = a_n + b_n$ et $b_{n+1} = a_n b_n$. Déterminer toutes les paires (a, b) telles que $a_{2022} = a_0$ et $b_{2022} = b_0$.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u>
Supposons que (a, b) soit une solution de l'énoncé. On calcule

$$\sum_{i=1}^{2022} a_i = \sum_{i=1}^{2022} (a_{i-1} + b_{i-1}) = \sum_{i=0}^{2021} a_i + \sum_{i=0}^{2021} b_i$$

Mais on a

$$\sum_{i=0}^{2021} a_i = a_0 + \sum_{i=1}^{2021} a_i = a_{2022} + \sum_{i=1}^{2021} a_i = \sum_{i=1}^{2022} a_i$$

donc on peut réécrire l'équation précédente comme

$$\sum_{i=0}^{2021} b_i = 0$$

De la même manière, on a

$$0 = \sum_{i=1}^{2022} b_i = \sum_{i=1}^{2022} a_{i-1} b_{i-1} = \sum_{i=0}^{2021} a_i b_i.$$

Pour faire apparaître les produits $a_i b_i$, on élève l'équation $a_{i+1} = a_i + b_i$ au carré pour avoir $a_{i+1}^2 = a_i^2 + b_i^2 + 2a_i b_i$. On somme ceci entre $i = 0$ et 2021 pour avoir

$$\sum_{i=1}^{2022} a_i^2 = \sum_{i=0}^{2021} a_i^2 + \sum_{i=0}^{2021} b_i^2 + 2 \sum_{i=0}^{2021} a_i b_i.$$

Mais encore une fois,

$$\sum_{i=1}^{2022} a_i^2 = \sum_{i=0}^{2021} a_i^2$$

donc

$$\sum_{i=0}^{2021} b_i^2 = 0.$$

Une somme de carrés de nombres réels est nécessairement positive, et ne peut être nulle que si tous les b_i sont nuls. Ceci implique notamment $b = 0$. Réciproquement, si a est un réel, le couple $(a, 0)$ fonctionne car on montre par récurrence que pour tout n, $a_n = a$ et $b_n = 0$, et alors $a_{2022} = a = a_0$.

<u>*Commentaire des correcteurs :*</u> L'exercice était très difficile, a été peu abordé, et encore moins réussi. Plusieurs élèves arrivent cependant à obtenir que $b_0 + \cdots + b_{2021} = 0$ ce qui est un bon début.

Exercice 9. Soient $b_1, \ldots, b_n$ des réels positifs ou nuls tels que $b_1 + b_2 + \ldots + b_n = 2$. Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels tels que $a_0 = a_n = 0$. Supposons que pour tout i compris entre 1 et n inclus,

$$|a_i - a_{i-1}| \leqslant b_i.$$

Montrer que l'on a

$$(a_0 + a_1)b_1 + (a_1 + a_2)b_2 + \ldots + (a_{n-1} + a_n)b_n \leqslant 2.$$

<u>*Solution de l'exercice 9*</u>
Pour tout indice i, on a deux majorations de a_i. En effet, on peut écrire

$$\begin{aligned} a_i = a_i - a_0 &= (a_i - a_{i-1}) + (a_{i-1} - a_{i-2}) + \ldots + (a_1 - a_0) \\ &\leqslant b_i + b_{i-1} + \ldots + b_1 = \sum_{j=1}^{i} b_j \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} a_i = a_i - a_n &= (a_i - a_{i+1}) - (a_{i+1} - a_{i+2}) + \ldots + (a_{n-1} - a_n) \\ &\leqslant b_{i+1} + b_{i+2} + \ldots + b_n = \sum_{j=i+1}^{n} b_j. \end{aligned}$$

Afin de majorer efficacement a_i, on voudrait trouver le plus petit de ces deux termes. Mais la somme des deux vaut 2, donc il faut simplement déterminer si $\sum_{j=1}^{i} b_j$ est inférieur ou supérieur à 1.
Soit m l'entier minimal tel que $\sum_{j=1}^{m} b_j > 1$. On écrit alors

$$\sum_{i=1}^{n} (a_{i-1} + a_i)b_i = \sum_{i=1}^{m-1} (a_{i-1} + a_i)b_i + (a_{m-1} + a_m)b_m + \sum_{i=m+1}^{n} (a_{i-1} + a_i)b_i.$$

Pour $i < m$, on majore a_i par $\sum_{j=1}^{i} b_j$, et pour $i \geqslant m$, on majore a_i par $\sum_{j=i+1}^{n} b_j$ pour obtenir

$$\sum_{i=1}^{n} (a_{i-1} + a_i)b_i \leqslant \sum_{i=1}^{m-1} \left(b_i + 2\sum_{j=1}^{i-1} b_j \right) b_i + \left(\sum_{j=1}^{m-1} b_j + \sum_{j=m+1}^{n} b_j \right) b_m + \sum_{i=1}^{m} \left(b_i + 2\sum_{j=i+1}^{n} b_j \right) b_i.$$

Posons $x = \sum_{j=1}^{m-1} b_j$ et $y = \sum_{j=m+1}^{n} b_j$. Par définition de m, on a $x \leqslant 1$ et $y \leqslant 1$. Considérons la première somme dans le terme précédent. Dans celle-ci, on a un terme b_i^2 pour tout $i \leqslant m-1$ et un terme $2b_ib_j$ pour tous $j < i \leqslant m-1$. Ainsi, cette somme n'est rien d'autre que x^2. De même, la somme de droite n'est rien d'autre que y^2. On peut donc écrire, comme $x + b_m + y = 2$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} (a_{i-1} + a_i)b_i &\leqslant x^2 + (x+y)(2-x-y) + y^2 \\ &= 2(x+y) - 2xy. \end{aligned}$$

Il nous reste enfin à voir que $2(x+y) - 2xy \leqslant 2$ pour conclure, ou encore $x + y - xy \leqslant 1$. Mais ceci se réécrit, en passant tous les termes à droite de l'inégalité,

$$(1-x)(1-y) \geqslant 0$$

ce qui est vérifié car on a vu que $x \leqslant 1$ et $y \leqslant 1$.

<u>*Commentaire des correcteurs :*</u> L'exercice était très difficile, a été très peu abordé et résolu par personne. Il est dommage de voir que peu d'élèves ont écrit leur piste de recherche : typiquement à (b_i) fixé de trouver les (a_i) maximisant la somme.

Exercices Seniors

Exercice 10. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite périodique de période 2022 et de période 5. Montrer que (u_n) est constante.
Une suite (u_n) *est dite périodique de période* t *si, pour tout entier naturel* n, $u_{n+t} = u_n$.

Solution de l'exercice 10
Commençons par remarquer que si une suite (u_n) est t-périodique, alors on a pour tout n, $u_n = u_{n+t} = u_{n+2t}$ par exemple. Ainsi, on peut montrer par récurrence que pour tous les entiers naturels k et n, $u_{n+kt} = u_n$: la suite est kt-périodique pour tout k.
Soit n un entier naturel. On a alors, comme la suite est 2022-périodique,

$$u_{n+1} = u_{n+1+2\times 2022} = u_{n+4045} = u_{n+5\times 809}.$$

Mais la suite est 5-périodique donc ceci vaut aussi u_n. Ainsi, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = u_n$.
On en déduit par récurrence que pour tout n, $u_n = u_0$ et donc la suite (u_n) est constante.

Commentaire des correcteurs : L'exo a été réussi par qusiment toutes les personnes l'ayant abordé, avec 3 méthodes principales :
- Montrer que $u_0 = u_1 = u_2 = u_3 = u_4$.
- Montrer que $u_n = u_{n+1}$.
- Utiliser le théorème de Bezout pour montrer $u_0 = u_n$.

Les quelques élèves qui n'ont pas eu 7 points ont la plupart du temps utilisé des propriétés un peu fortes sans les justifier (même rapidement, cela aurait suffit).

Exercice 11. Soit n un entier strictement positif et $x \geqslant n$ un réel. Montrer que $x + \frac{n}{x} \geqslant n+1$ et donner les cas d'égalité.

Solution de l'exercice 11

Le réel x est strictement positif donc on peut multiplier l'équation par x pour avoir que l'équation est équivalente à

$$x^2 + n \geqslant (n+1)x$$

ce qui donne, en réarrangeant les termes,

$$x^2 - (n+1)x + n \geqslant 0.$$

On peut chercher les racines de ce polynôme de degré 2 ou alors reconnaitre la factorisation

$$(x-n)(x-1) \geqslant 0.$$

Mais ceci est vrai car $x \geqslant n$ et $x \geqslant 1$.
On a égalité lorsque $x = n$ ou $x = 1$. Mais si $x = 1$, alors $n = 1$ et $x = n$. Ainsi, dans tous les cas, le seul cas d'égalité est $x = n$.

Solution alternative de l'exercice 11

On repart de l'équation développée $x^2 - (n+1)x + n \geqslant 0$.
La condition $x \geqslant n$ est très peu naturelle, on préfère des conditions de type $t \geqslant 0$. On pose donc $x = n+t$ avec $t \geqslant 0$. L'équation se réécrit alors

$$n^2 + 2nt + t^2 - (n+1)(n+t) + n \geqslant 0$$

ou encore

$$t^2 + (n-1)t \geqslant 0.$$

Mais cette nouvelle équation est clairement vraie car $t \geqslant 0$ et $n \geqslant 1$. De plus, on a égalité si et seulement si $t = 0$, ou encore $x = n$.

Commentaire des correcteurs : Le problème a été bien réussi par les élèves, les solutions rendues étaient presque toutes abouties. Les solutions étaient assez variées, certaines passaient par l'étude d'un trinôme, d'autres par un calcul de dérivée, ou encore par l'inégalité arithmético-géométrique. Néanmoins, un certain nombre de copies ont été pénalisées pour des manques de justifications, notamment des justifications de signes. On rappelle que lorsqu'on multiplie ou divise une inégalité par une quantité, il faut s'assurer du signe de cette quantité : si elle est strictement positive, ça conserve le sens de l'inégalité, si elle est strictement négative, ça change le sens de l'inégalité, et si on multiplie par une quantité nulle, on n'a pas équivalence. C'est donc un détail qui a toute son importance. En ce qui concerne le cas d'égalité, plusieurs copies ont oublié de le traiter, et d'autres ont oublié la condition $x \geqslant n$, de sorte qu'elles considérées que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x = 1$ était un cas d'égalité. Ce n'était vrai que pour $n = 1$, et donc c'était déjà compté dans le cas $x = n$.

Exercice 12. Soit (a_n) une suite de réels. On suppose que $a_0 = 1$ et que pour tout $n \geqslant 1$, a_n est la plus petite solution strictement positive de

$$(a_n - a_{n-1})(a_n + a_{n-1} - 2\sqrt{n}) = 2.$$

Trouver le plus petit entier n tel que $a_n \geqslant 2022$.

<u>*Solution de l'exercice 12*</u> Pour se donner une idée du problème, on calcule les premières valeurs de a_n : pour a_1, l'équation s'écrit

$$(a_1 - 1)(a_1 - 1) = 2$$

donc $a_1 - 1 = \sqrt{2}$ ou $-\sqrt{2}$. Seul le premier cas donne une solution positive $a_1 = 1 + \sqrt{2}$. Cherchons maintenant à calculer a_2 : l'équation devient

$$(a_2 - 1 - \sqrt{2})(a_2 + 1 - \sqrt{2}) = 2$$

ce que l'on peut développer en

$$(a_2 - \sqrt{2})^2 - 1^2 = 2$$

ou encore $a_2 - \sqrt{2} = \pm\sqrt{3}$. Un seul signe donne une solution positive $a_2 = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.
A partir de ces premières valeurs, on fait l'hypothèse que la suite a_n est donnée par $a_n = \sqrt{n} + \sqrt{n+1}$ et on montre ceci par récurrence. C'est vrai pour $n = 0$. Supposons que ceci soit vrai pour $n-1$ et montrons le au rang n : l'équation donnant a_n est

$$(a_n - \sqrt{n-1} - \sqrt{n})(a_n + \sqrt{n-1} - \sqrt{n}) = 2$$

ce que l'on développe en

$$(a_n - \sqrt{n})^2 - (\sqrt{n-1})^2 = 2$$

et donc

$$(a_n - \sqrt{n})^2 = n + 1$$

donc $a_n - \sqrt{n} = \pm\sqrt{n+1}$. Seul le signe $+$ donne une solution positive, donc on a bien $a_n = \sqrt{n} + \sqrt{n+1}$ ce qui conclut la récurrence.
On remarque immédiatement que la suite (a_n) est croissante, et par conséquent si on trouve un n tel que $a_{n-1} < 2022 \leqslant a_n$, il s'agit du n cherché. En effet, si on a $0 \leqslant m < n$, on a alors $m \leqslant n-1$ donc $a_m \leqslant a_{n-1} < 2022$ comme voulu : n est bien le plus petit indice tel que $a_n \geqslant 2022$.
Mais maintenant on a

$$a_{1011^2-1} = \sqrt{1011^2 - 1} + 1011 < 2 \cdot 1011 = 2022 < 1011 + \sqrt{1011^2 + 1} = a_{1011^2}$$

donc le n cherché est $n = 1011^2$.

<u>*Commentaire des correcteurs :*</u> Le problème a été bien réussi par les élèves qui ont rendu une copie. Une très grande majorité a parfaitement conjecturé $a_n = \sqrt{n} + \sqrt{n+1}$ puis l'a montré par récurrence. On rappelle que calculer les premiers termes pour deviner une expression est une très bonne initiative à prendre au brouillon car ça peut être la première étape dans la résolution d'un problème (comme c'était le cas ici). À partir de là on pouvait rapidement conclure, mais il fallait faire attention à ne pas faire d'erreurs de calculs, et à bien justifier (notamment des arguments de croissance étaient pertinents). Ces points là manquaient dans certaines copies. On notera aussi qu'en test ou en compétition, il n'y a pas de calculatrice, il faut donc prendre l'habitude de chercher à faire des calculs efficaces à la main.

Exercice 13. Soit $n \geqslant 3$ et soient $x_1, \ldots, x_n$ des réels. Montrer que

$$2(x_1 + \cdots + x_n)^2 \leqslant n(x_1^2 + \cdots + x_n^2 + x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n + x_nx_1)$$

Solution de l'exercice 13
La difficulté de l'exercice est le fait que l'énoncé n'est pas symétrique. Au vu de celui-ci, on veut faire apparaître les produits x_ix_{i+1} ; pour cela, on peut penser à utiliser le développement de $(x_i + x_{i+1})^2$. On a

$$\begin{aligned}(x_1+x_2)^2+\cdots+(x_{n-1}+x_n)^2+(x_n+x_1)^2 &= (x_1^2+2x_1x_2+x_2^2)+\cdots+(x_{n-1}^2+2x_{n-1}x_n+x_n^2)+(x_n^2+2x_nx_1+x_1^2)\\ &= 2(x_1^2 + \ldots x_n^2 + x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n + x_nx_1)\end{aligned}$$

et on reconnaît le membre de droite de l'énoncé, avec un coefficient 2 au lieu de n. L'inégalité de l'énoncé se réécrit alors

$$4(x_1 + \ldots + x_n)^2 \leqslant n((x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^3 + \ldots + (x_{n-1} + x_n)^2 + (x_n + x_1)^2).$$

Mais ceci est alors une application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. En effet, on a

$$\begin{aligned}n((x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^3+\ldots+(x_{n-1}+x_n)^2+(x_n+x_1)^2) &= (1^2+\ldots+1^2)((x_1+x_2)^2+\ldots+(x_n+x_1)^2)\\ &\geqslant (1\cdot(x_1+x_2)+1\cdot(x_2+x_3)+\ldots+1\cdot(x_n+x_1))^2\\ &= (2x_1+2x_2+\ldots+2x_n)^2 = 4(x_1+\ldots+x_n)^2.\end{aligned}$$

Commentaire des correcteurs : Exercice très bien réussi par ceux qui l'ont tenté. L'erreur la plus fréquente était d'utiliser l'inégalité de Tchebychev en oubliant l'hypothèse sur l'ordre des termes. Les élèves ayant pensé à réécrire le terme de droite comme somme de $(x_i + x_{i+1})^2$ ont réussi à conclure avec Cauchy-Schwarz, AM-QM, Tchebychev, Jensen ou les mauvais élèves.

Exercice 14. Soient $a, b, c, x, y, z > 0$ tels que $a + b + c = x + y + z$ et $abc = xyz$. On suppose de plus $a \leqslant x < y < z \leqslant c$ et $a < b < c$. Montrer que $a = x, b = y, c = z$.

Solution de l'exercice 14

Les termes $a+b+c$ et abc nous rappellent les formules de Viète qui lient les coefficients d'un polynôme à ses racines. Ceci nous invite à considérer les polynômes $P(X) = (X-a)(X-b)(X-c)$ et $Q(X) = (X-x)(X-y)(X-z)$. Sous forme développée, on a

$$P(X) = X^3-(a+b+c)X^2+(ab+bc+ca)X-abc, \quad Q(X) = X^3-(x+y+z)X^2+(xy+yz+zx)X-xyz$$

et l'énoncé nous assure que les coefficients de degrés 0 et 2 sont identiques pour les deux polynômes. Mais on peut considérer la différence $P(X) - Q(X)$ qui est alors un monôme de la forme αX, pour un certain α réel.

Au vu de l'énoncé, il faut montrer que $P(X) = Q(X)$, ou encore que $\alpha = 0$. Mais pour ceci, on évalue simplement $P(X) - Q(X)$ en $X = a$ et $X = c$. En ces deux points, on a $P(X) = 0$, et alors

$$\alpha a = -Q(a) = -(a-x)(a-y)(a-z) \geqslant 0$$

car a est inférieur à x, y et z. Comme $a > 0$, on en déduit $\alpha \geqslant 0$. Mais on a aussi

$$\alpha c = -Q(c) = -(c-x)(c-y)(c-z) \leqslant 0$$

car c est supérieur à x, y et z. Comme $c > 0$, on en déduit $\alpha \leqslant 0$. Ainsi, on a $\alpha = 0$ comme voulu, c'est-à-dire que $P(X) = Q(X)$.

Mais alors les deux polynômes doivent avoir les mêmes racines qui sont $a < b < c$ pour $P(X)$ et $x < y < z$ pour $Q(X)$. On a donc bien

$$a = x, b = y, c = z.$$

Commentaire des correcteurs : L'exercice n'a pas été beaucoup abordé mais il a été dans l'ensemble très bien réussi par ceux qui l'ont tenté. La solution la plus courante était de passer par des polynômes de degré 3 comme dans le corrigé. D'autres solutions ont été trouvées, comme passer par des polynômes de degré 2, faire des disjonctions de cas sur les signes ou encore utiliser l'inégalité de réarrangement. Notons que plusieurs copies ont évoqué le théorème des valeurs intermédiaires : lors de son utilisation il faut rappeler toutes les hypothèses, notamment l'hypothèse de continuité doit être écrite même si elle est évidente à vérifier. Une autre erreur faite plusieurs fois est celle du sens des inégalités : lorsqu'on utilise une inégalité, il faut vérifier qu'on l'utilise dans le bon sens. Parfois utiliser une inégalité dans le mauvais sens (donc fausse) peut donner l'impression d'aboutir, mais vu que l'inégalité utilisée initialement est fausse, la solution l'est aussi.

Exercice 15. Pour une fonction f et n un entier strictement positif, on note f^n la composée n-ième de f définie par $f^n = f \circ f \circ \ldots \circ f$ pù f apparaît n fois dans le membre de droite.
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que

$$f^{f(n)}(m) + mn = f(m)f(n)$$

pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$.

<u>*Solution de l'exercice 15*</u>
En $m = n$, on trouve que $f(m)^2 = f^{f(m)}(m) + m^2 > m^2$, ce qui donne $f(m) > m$ car $f(m)$ est positif, et donc comme $f(m)$ est entier, $f(m) \geqslant m + 1$. Par une récurrence simple, on trouve que pour tous les entiers k, m strictement positifs, $f^k(m) \geqslant m + k$.

Mais on remarque qu'à part le premier terme de l'énoncé, le reste est symétrique en m et n, et on peut écrire que pour tous $m, n > 0$,

$$f^{f(n)}(m) + mn = f(m)f(n) = f^{f(m)}(n) + nm$$

et donc $f^{f(n)}(m) = f^{f(m)}(n)$. On veut maintenant utiliser le fait que l'on a affaire à une composée, et on pose donc $n = f(a)$ afin que $f^{f(m)}(n) = f^{f(m)+1}(a)$. En évaluant l'équation précédente avec $a = m$, on a

$$f^{f(m)+1}(m) = f^{f(f(m))}(m)$$

Mais ceci implique alors que $f(f(m)) = f(m) + 1$. En effet, sinon, soit $\alpha = \min(f(f(m)), f(m) + 1)$ et $k = \max(f(f(m)), f(m) + 1) - \alpha > 0$ afin que l'équation s'écrive $f^k(f^\alpha(m)) = f^\alpha(m)$. Mais c'est absurde car $f^k(f^\alpha(m)) \geqslant f^\alpha(m) + k > f^\alpha(m)$.
On déduit que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ $f(f(m)) = f(m) + 1$. Par une récurrence simple, pour tout $k \geqslant 1$, $f^k(m) = f(m) + k - 1$. Ainsi l'équation de l'énoncé donne pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$,

$$f(m) + f(n) - 1 + mn = f(m)f(n).$$

Si $n = m$, on obtient une équation liant simplement $f(n)$ et n :

$$2f(n) + n^2 - 1 = f(n)^2.$$

C'est une équation du second degré que l'on peut par exemple factoriser en $(f(n) - 1)^2 = n^2$, donc $f(n) = n + 1$ car $f(n)$ est strictement positif.
Réciproquement, si $f(n) = n + 1$ pour tout n, alors on peut écrire pour tous m, n :

$$f^{f(n)}(m) + mn = m + f(n) + mn = mn + m + n + 1 = (m + 1)(n + 1) = f(m)f(n)$$

et cette fonction est bien solution de l'équation de l'énoncé.

<u>*Commentaire des correcteurs :*</u> Les élèves ayant résolu le problème on tous une solution étudiant les antécédents du plus petit élément de l'image de f. Il est excellent d'avoir su adapter ce genre d'argument à une équation fonctionnelle. C'était d'ailleurs là que résidait la difficulté, et quelques subtilités de l'argument ont échappé à la vigilance de quelques élèves. Par ailleurs, plusieurs élèves n'ont pas hésité à proposer leur preuve de propriétés élémentaires de f, ce sur quoi il est très bon de s'entraîner : l'injectivité de f, le fait que 1 n'est pas atteint, la symétrie de l'équation fonctionnelle en m et n...

Exercice 16. Soient $b_1, \ldots, b_n$ des réels positifs ou nuls tels que $b_1 + b_2 + \ldots + b_n = 2$. Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels tels que $a_0 = a_n = 0$. Supposons que pour tout i compris entre 1 et n inclus,

$$|a_i - a_{i-1}| \leqslant b_i.$$

Montrer que l'on a

$$(a_0 + a_1)b_1 + (a_1 + a_2)b_2 + \ldots + (a_{n-1} + a_n)b_n \leqslant 2.$$

Solution de l'exercice 16

Pour tout indice i, on a deux majorations de a_i. En effet, on peut écrire

$$\begin{aligned} a_i = a_i - a_0 &= (a_i - a_{i-1}) + (a_{i-1} - a_{i-2}) + \ldots + (a_1 - a_0) \\ &\leqslant b_i + b_{i-1} + \ldots + b_1 = \sum_{j=1}^{i} b_j \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} a_i = a_i - a_n &= (a_i - a_{i+1}) - (a_{i+1} - a_{i+2}) + \ldots + (a_{n-1} - a_n) \\ &\leqslant b_{i+1} + b_{i+2} + \ldots + b_n = \sum_{j=i+1}^{n} b_j. \end{aligned}$$

Afin de majorer efficacement a_i, on voudrait trouver le plus petit de ces deux termes. Mais la somme des deux vaut 2, donc il faut simplement déterminer si $\sum_{j=1}^{i} b_j$ est inférieur ou supérieur à 1.
Soit m l'entier minimal tel que $\sum_{j=1}^{m} b_j > 1$. On écrit alors

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{i-1} + a_i)b_i = \sum_{i=1}^{m-1}(a_{i-1} + a_i)b_i + (a_{m-1} + a_m)b_m + \sum_{i=m+1}^{n}(a_{i-1} + a_i)b_i.$$

Pour $i < m$, on majore a_i par $\sum_{j=1}^{i} b_j$, et pour $i \geqslant m$, on majore a_i par $\sum_{j=i+1}^{n} b_j$ pour obtenir

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{i-1}+a_i)b_i \leqslant \sum_{i=1}^{m-1}\left(b_i + 2\sum_{j=1}^{i-1} b_j\right) b_i + \left(\sum_{j=1}^{m-1} b_j + \sum_{j=m+1}^{n} b_j\right) b_m + \sum_{i=1}^{m}\left(b_i + 2\sum_{j=i+1}^{n} b_j\right) b_i.$$

Posons $x = \sum_{j=1}^{m-1} b_j$ et $y = \sum_{j=m+1}^{n} b_j$. Par définition de m, on a $x \leqslant 1$ et $y \leqslant 1$. Considérons la première somme dans le terme précédent. Dans celle-ci, on a un terme b_i^2 pour tout $i \leqslant m-1$ et un terme $2b_ib_j$ pour tous $j < i \leqslant m-1$. Ainsi, cette somme n'est rien d'autre que x^2. De même, la somme de droite n'est rien d'autre que y^2. On peut donc écrire, comme $x + b_m + y = 2$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}(a_{i-1} + a_i)b_i &\leqslant x^2 + (x+y)(2-x-y) + y^2 \\ &= 2(x+y) - 2xy. \end{aligned}$$

Il nous reste enfin à voir que $2(x+y) - 2xy \leqslant 2$ pour conclure, ou encore $x + y - xy \leqslant 1$. Mais ceci se réécrit, en passant tous les termes à droite de l'inégalité,

$$(1-x)(1-y) \geqslant 0$$

ce qui est vérifié car on a vu que $x \leqslant 1$ et $y \leqslant 1$.

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été très peu abordé, et c'est particulièrement dommage car c'était un bon prototype d'exercice pouvant tomber à des olympiades internationales, donc il est dommage de ne pas laisser au moins des pistes pour voir comment en test chacun aurait pu avancer sur le problème. Celui-ci témoigne d'erreurs récurrentes commises par les élèves dans de tels problèmes :

— Souvent des élèves affirment que si la suite (a_i) vérifie telle propriété, on peut la changer pour agumenter la somme de l'énoncé, puis conclut directement qu'on se ramène au cas où la suite ne vérifie pas ça. Attention : cela n'est pas forcément vrai. En effet, si on dit que telle propriété est un problème, et qu'on compte le nombre de problèmes de la suite, celui-ci n'a aucune raison de décroître. Il faut donner un procédé permettant d'enlever les problèmes 1 par 1, sans en créer de nouveau : souvent une bonne technique est d'introduire un variant (soit le nombre de problème, soit autre chose). Une autre option pour cela est de montrer qu'il y a un maximisant, mais cela est souvent compliqué. Ici cela pouvait se montrer, mais dépasse le cadre des théorèmes de mathématique olympique.

— Certains, sous prétexte que l'exercice est dur, ne prouvent pas leurs affirmations. Etonnamment, souvent ce qui n'est pas prouvé se révèle être faux, difficile ou incomplet : ce n'est pas parce que l'exercice est dur, qu'il faut se permettre moins de détail.

— Beaucoup d'élèves ont essayé de montrer directement qu'on pouvait supposer la suite croissante puis décroissante. C'était difficile à prouver proprement, et surtout ce n'était pas le premier réflexe à avoir. Ici utiliser une représentation graphique était utile : en fait on a forcément $a_k \leqslant b_1 + \cdots + b_k$ et $a_k \leqslant b_{k+1} + \cdots + b_n$. on peut donc représenter graphiquement les points $(k, b_1 + \cdots + b_k)$ et $(k, b_{k+1} + \cdots + b_n)$ et relier les deux types de points pour obtenir une courbe. Il est naturel d'ensuite regarder le minimum de ces deux courbes et de poser a_k la suite correspondant à cette courbe. C'est exactement ce qui est fait dans le corrigé, et il est récurrent que les élèves oublient de représenter graphiquement les contraintes pour essayer de comprendre ce qui se passe, et voir quel est vraiment la bonne façon d'aborder l'énoncé.

Exercice 17. Soit $\alpha \neq 0$. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x, y,

$$f(x^2 + y + f(y)) = f(x)^2 + \alpha y.$$

<u>*Solution de l'exercice 17*</u>

Posons $x = 0$. Alors l'équation devient $f(y + f(y)) = f(0)^2 + \alpha y$ pour tout y. Comme α est non nul, le côté droit décrit tous les réels lorsque y varie, et ainsi f est surjective.

Posons $y = 0$. Alors on peut écrire pour tout réel x,

$$f(x)^2 = f(x^2 + f(0)) = f((-x)^2 + f(0)) = f(-x)^2.$$

On sait que f est surjective, soit donc c un antécédent de 0. L'équation de l'énoncé avec $x = 0$ et $y = c$ donne

$$\alpha c + f(0)^2 = f(0 + c + f(c)) = f(c) = 0.$$

Mais on sait que $f(-c)^2 = f(c)^2 = 0$ donc $-c$ est aussi un antécédent de 0. Par l'équation ci-dessus appliquée à c et à $-c$, on a donc $\alpha c + f(0)^2 = 0 = -\alpha c + f(0)^2$. Comme $\alpha \neq 0$, on en déduit que nécessairement $c = 0$.

Maintenant que l'on sait que 0 est le seul antécédent de 0, on annule le terme de droite dans l'équation de départ en choisissant $y = -\frac{f(x)^2}{\alpha}$, alors $f(x^2 + y + f(y)) = 0$, soit $x^2 + y + f(y) = 0$ ou encore

$$x^2 - \frac{f(x)^2}{\alpha} + f\left(-\frac{f(x)^2}{\alpha}\right) = 0$$
$$x^2 = \frac{f(x)^2}{\alpha} - f\left(-\frac{f(x)^2}{\alpha}\right)$$

pour tout réel x. Dès lors, si $f(x) = \pm f(x')$, l'équation précédente donne $x^2 = x'^2$ donc $x = \pm x'$.

Soit $x \neq 0$ un réel. Etudions l'équation $f(x') = \pm f(x)$. On a vu que celle ci avait exactement deux solutions, qui sont x et $-x$ (qui sont distincts car $x \neq 0$). Mais il existe une solution à $f(x') = -f(x)$ par surjectivité de f. Comme $f(x) \neq 0$, cela ne peut pas être $x' = x$, c'est donc $x' = -x$. Ainsi, $f(-x) = -f(x)$, et la seule solution à $f(x') = f(x)$ est $x' = x$. Comme en plus 0 est l'unique antécédent de 0, f est à la fois impaire et injective.

L'équation initiale avec $y = 0$ donne pour tout x réel, $f(x^2) = f(x)^2$. Ainsi, l'équation de l'énoncé se réécrit

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x^2 + y + f(y)) = f(x^2) + \alpha y$$

donc avec $z = x^2$,

$$\forall y \in \mathbb{R}, z \geqslant 0, \quad f(z + y + f(y)) = f(z) + \alpha y.$$

Si maintenant $z \leqslant 0$, on calcule pour tout y, par imparité de f,

$$f(z + y + f(y)) = -f(-z - y - f(y)) = -f((-z) + (-y) + f(-y))$$
$$= -(f(-z) + \alpha(-y)) = f(z) + \alpha y.$$

C'est la même équation que pour $z \geqslant 0$, d'où

$$\forall y, z \in \mathbb{R}, \quad f(z + y + f(y)) = f(z) + \alpha y.$$

Avec $z = 0$, on a notamment pour tout y, $f(y + f(y)) = \alpha y$. Posons $z = x + f(x)$ dans l'équation ci-dessus pour avoir pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x+f(x)+y+f(y)) = f(x+f(x)) + \alpha y = \alpha x + \alpha y = \alpha(x+y) = f(x+y+f(x+y))$$

et donc, par injectivité, $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Ainsi, f est solution de l'équation de Cauchy. Mais f est croissante car si $x > y$, on a

$$f(x) = f(y) + f(x-y) = f(y) + f((\sqrt{x-y})^2) = f(y) + f(\sqrt{x-y})^2 \geqslant f(y)$$

donc f est linéaire sur $\mathbb{R}$. D'après l'équation $f(x^2) = f(x)^2$, son coefficient dominant a vérifie $a^2 = a$ donc $a = 0$ ou $a = 1$, c'est-à-dire que f est soit nulle, soit l'identité sur $\mathbb{R}$. f étant surjective, nécessairement, c'est l'identité : pour tout x, $f(x) = x$.
En réinjectant dans l'équation, on obtient

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x^2 + 2y = x^2 + \alpha y$$

donc avec $x = 0, y = 1$, on a $\alpha = 2$ nécessairement. Réciproquement, si $\alpha = 2$, l'identité est bien solution par le calcul précédent. Ainsi, si $\alpha \neq 2$, il n'y a aucune solution, et si $\alpha = 2$, l'identité est solution.

<u>*Commentaire des correcteurs :*</u> L'exercice a été très peu abordé, une poignée d'élèves l'ont résolu parfaitement. Certains ont tenté des débuts de solution assez naturels, en montrant notamment que f était surjective et que $f(0) = 0$, mais ne sont pas allés plus loin. Attention à bien noter pour quelles valeurs les égalités obtenues sont effectivement vraies : lorsqu'on fait une substitution d'une variable en fonction d'une autre on perd de la généralité. Par exemple après avoir posé $y = f(-x^2)$, l'égalité qui en résute n'est pas vraie pour tout x et pour tout y.

Exercice 18. Soit $P(X)$ un polynôme à coefficients réels unitaire de degré 2022. Emile joue au jeu suivant : il écrit le polynôme $P(X)$ au tableau et à chaque étape, si le polynôme $f(X)$ est écrit au tableau, Emile peut le remplacer par :

— Le polynôme $f(X) + c$, pour c un réel de son choix, ou

— le polynôme $P(f(X))$.

Trouver tous les entiers positifs ou nuls n tels que, quelque soit le polynôme P initial, Emile peut trouver une suite d'opérations telles que le polynôme obtenu ait exactement n racines réelles distinctes.

Solution de l'exercice 18

On dit qu'un entier n *fonctionne* si quelque soit le polynôme P initial, Emile peut trouver une suite d'opérations telles que le polynôme obtenu ait exactement n racines réelles distinctes.

Commençons par faire la remarque simple qu'à chaque étape, quoique choisisse Emile, le polynôme écrit au tableau sera unitaire, de degré pair, et non constant.

On montre les points suivants :

1. Si n fonctionne, alors $n+2$ aussi :

   Soit $P(X)$ un polynôme comme dans l'énoncé. Supposons qu'Emile peut trouver une suite d'opérations qui lui permet d'obtenir un polynôme $f(X)$ avec n racines réelles distinctes écrit au tableau.

   On va chercher à trouver deux constantes a et b telles que le polynôme $g(X) = P(f(X)+a)+b$ ait exactement $n+2$ racines réelles distinctes. Alors Emile pourra simplement ajouter a, composer par P, puis ajouter b au polynôme obtenu pour avoir le polynôme voulu.

   On souhaite utiliser le fait que $f(X)$ ait exactement n racines en faisant en sorte qu'une racine de f soit une racine de $g(X) = P(f(X)+a)+b$, ce qui impose $b = -P(a)$. Les racines de $g(X)$ sont alors les réels x tels que $f(x)+a$ soit un antécédent de $P(a)$. Pour avoir le moins de cas possibles à traiter, on choisit $|a|$ très grand pour que l'équation $P(X) = P(a)$ ait exactement deux solutions réelles : c'est possible car pour c assez grand, l'équation $P(X) = c$ a exactement deux solutions réelles.

   Soient a, a' les deux solutions de $P(X) = P(a)$. Ainsi, les racines de $g(X)$ sont les racines de $f(X)$ et les solutions de $f(x) + a = a'$, c'est-à-dire les antécédents par f de $a' - a$. Encore une fois, on veut le moins d'antécédents possibles (sans pour autant en avoir aucun), donc on voudrait que $a' - a$ soit très grand. f étant unitaire de degré pair, si $a' - a$ est assez grand, $a' - a$ a exactement 2 antécédents par f, ce qui donne bien que $g(X)$ a exactement $n+2$ racines.

   Vérifions que l'on peut bien choisir a comme voulu. Prenons a négatif tel que $|a|$ soit très grand. Lorsque a tend vers $-\infty$, $P(a)$ tend vers $+\infty$ et a' est la solution la plus grande de $P(X) = P(a)$ qui tend vers $+\infty$. Si $|a|$ est assez grand, $a' - a$ peut devenir arbitrairement grand, comme voulu.

2. $n = 0$ et $n = 2021$ fonctionnent :

   Soit $P(X)$ un polynôme comme dans l'énoncé.

   Le cas de $n = 0$ est simple. En effet, $P(X)$ est unitaire de degré pair, donc il admet un minimum sur $\mathbb{R}$. Si c est strictement supérieur à l'opposé de ce minimum, $P(x) + c = 0$ n'a aucune solution sur $\mathbb{R}$. Ainsi, si Emile remplace $P(X)$ par $P(X) + c$ au premier tour, il obtient un polynôme sans racines réelles comme voulu.

   Pour $n = 2021$, c'est un peu plus subtil. Comme $x \mapsto P(x)$ est décroissant pour x assez petit et croissant pour x assez grand, P a un nombre impair d'extrema locaux. Ainsi il existe c tel qu'un nombre impair de ces extrema soient en des solutions de $P(x) = c$. En effet, supposons que les valeurs prises en ces extrema soient $c_1, \ldots, c_k$, et disons que c_i est la valeur de P en n_i extrema distincts. Alors le nombre d'extrema de P est $n_1 + \cdots + n_k$ et est impair, donc il existe i tel que n_i soit impair, et c'est ce qu'on voulait.

Supposons maintenant qu'Emile remplace le polynôme $P(X)$ initial par $P(X) - c$. Celui-ci est positif en $-\infty$ et $+\infty$ donc change de signe un nombre pair de fois. Mais par définition de c, il a aussi un nombre impair de zéros qui sont des extrema locaux (c'est-à-dire où il ne change pas de signe), et donc $P(X) - c$ a un nombre impair de racines réelles distinctes. Ce nombre est nécessairement inférieur à 2022, donc à 2021 car il est impair. Par la partie précédente de la démonstration, en ajoutant 2 à plusieures reprises au nombre de racines distinctes, Emile peut toujours obtenir, après un certain nombre d'étapes, un polynôme avec exactement 2021 racines réelles distinctes.

En combinant les deux premières parties de la démonstration, on obtient que tous les n pairs et les n impairs supérieurs ou égaux à 2021 fonctionnent. Il reste à voir que les autres ne fonctionnent pas.

3. $n \leqslant 2019$ impair ne fonctionne pas :

   Soit $n \leqslant 2019$ impair. Dans cette partie de la démonstration, il faut exhiber un polynôme $P(X)$ qui empêche Emile d'obtenir n racines réelles distinctes en un nombre fini d'étapes. D'après la preuve de la partie précédente, il faut trouver un polynôme $P(X)$ tel que si un nombre impair d'extrema locaux de P vérifient $P(x) = c$, alors $P(X) - c$ a strictement plus de 2019 racines distinctes.

   Considérons le polynôme $P(X) = X^2(X^2 - 1) \dots (X^2 - 1010)$. Il est pair donc tous ses extrema locaux vont par paires, sauf celui en 0 qui est nul. Mais le polynôme $P(X)$ a 2021 racines distinctes, et il semble donc être un bon candidat pour cette partie. Comme $P(X)$ est pair, pour tout $c \neq 0$, l'équation $P(x) = c$ a un nombre pair de solutions, et l'équation $P(x) = 0$ a un nombre impair de solutions (précisément 2021).

   Supposons par l'absurde qu'au bout d'un certain nombre d'étapes, Emile arrive à obtenir un polynôme avec n racines réelles distinctes, ce polynôme sera alors de la forme $f(P(X))$, avec $f(X)$ unitaire non constant. Soient $r_1, \dots, r_k$ les racines de $f(X)$. Les racines de $f(P(X))$ sont exactement les réels solutions d'une équation de la forme $P(x) = r_i$. Soit n_i le nombre de solutions à $P(x) = r_i$. On a $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$. Comme n est impair, un des n_i est forcément impair. Mais le seul réel r_i ayant un nombre impair d'antécédents par P est 0, qui en a 2021. Ainsi, $r_i = 0$ et $n_i = 2021$, ce qui donne $n \geqslant 2021$, absurde.

Pour conclure, les entiers n qui fonctionnent sont les entiers pairs et les entiers impairs supérieurs ou égaux à 2021.

Commentaire des correcteurs : L'exercice n'a été abordé que par une copie qui l'a réussi parfaitement. L'exercice était très difficile, néanmoins il est dommage qu'il n'y ait pas eu plus de copies proposant au moins des pistes de recherche. Il n'est pas nécessaire d'avoir résolu entièrement un problème pour rendre quelque chose, et ici il y avait plusieurs étapes intermédiaires importantes qui pouvaient rapporter des points même si la solution n'était pas aboutie.