PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 3 : ARITHMÉTIQUE
À RENVOYER AU PLUS TARD LE 13 FÉVRIER 2023

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe junior est constitué des élèves nés en 2008 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe senior.
- Les exercices classés “Juniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés “Seniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Exercices Juniors

Exercice 1. Soient a, b deux entiers. Montrer que $ab(a-b)$ est divisible par 2.

Exercice 2. Montrer qu'il existe une infinité de couples (m, n) d'entiers strictement positifs distincts tels que $m!n!$ soit un carré parfait.

Exercice 3. Trouver les triplets d'entiers (x, y, n) tels que $n^2 = 17x^4 - 32x^2y^2 + 41y^4$.

Exercice 4. Déterminer tous les entiers naturels n tels que 21 divise $2^{2^n} + 2^n + 1$.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $2n+1$ et $3n+1$ sont des carrés parfaits, alors $5n+3$ n'est pas un nombre premier.

Exercice 6. Trouver tous les nombres premiers p et q vérifiant $p^5 + p^3 + 2 = q^2 - q$.

Exercice 7. Soit $n \geqslant 2$. Montrer qu'il existe des entiers a et b tels que, pour tout entier m, le nombre $m^3 + am + b$ ne soit pas un multiple de n.

Exercice 8. Trouver tous les entiers $a, b, c \in \mathbb{N}$ tels que $1517^a + 15^b = 1532^c$.

Exercice 9. Quentin et Timothé jouent à un jeu. D'abord, Quentin choisit un nombre premier $p > 2$, puis Timothé choisit un entier strictement positif n_0. Quentin choisit alors un entier $n_1 > n_0$ et calcule $s_1 = n_0^{n_1} + n_1^{n_0}$; puis Timothé choisit un entier $n_2 > n_1$ et calcule $s_2 = n_1^{n_2} + n_2^{n_1}$. Les joueurs continuent de jouer chacun à leur tour, en choisissant au tour k un entier $n_k > n_{k-1}$ et en calculant $s_k = n_{k-1}^{n_k} + n_k^{n_{k-1}}$. Le premier joueur à choisir un entier n_k tel que p divise $s_k(s_1 + 2s_2 + 3s_3 + \ldots + ks_k)$ gagne le jeu. Déterminer lequel de Quentin et Timothé possède une stratégie gagnante.

Exercices Seniors

Exercice 10. Montrer qu'il existe une infinité de couples (m, n) d'entiers strictement positifs distincts tels que $m!n!$ soit un carré parfait.

Exercice 11. Déterminer tous les entiers naturels n tels que 21 divise $2^{2^n} + 2^n + 1$.

Exercice 12. Soient $k, m, n > 0$ des entiers tels que $m^2 + n = k^2 + k$. Montrer que $m \leqslant n$.

Exercice 13. Trouver tous les nombres premiers p et q vérifiant $p^5 + p^3 + 2 = q^2 - q$.

Exercice 14. Anna et Elie jouent à un jeu. On leur donne à tous les deux le même ensemble A composé d'un nombre fini d'entiers strictement positifs et distincts. Anna choisit un entier $a \in A$ secrètement. Si Elie choisit un entier b (pas forcément dans A) et le donne à Anna, Anna lui donne le nombre de diviseurs strictement positifs de ab. Montrer que Elie peut choisir b de sorte à retrouver à coup sûr l'entier choisi par Anna.

Exercice 15. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $u_n = 1 + 2! + \ldots + n!$. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers divisant au moins l'un des termes de la suite (u_n).

Exercice 16. Soient $n \geqslant 2$ et p un nombre premier impair. Soit U l'ensemble des entiers positifs inférieurs ou égaux à p^n et premiers avec p et soit $N = |U|$. Montrer qu'il existe une permutation $a_1, \ldots, a_N$ des éléments de U telle que $\sum_{k=1}^{N} a_k a_{k+1}$ (avec $a_{N+1} = a_1$) soit divisible par p^{n-1} mais pas par p^n.

Exercice 17. Soit $(a_n)_{n \geqslant 1}$ une suite d'entiers strictement positifs telle que a_1 et a_2 soient premiers entre eux et, pour tout $n \geqslant 1$, $a_{n+2} = a_n a_{n+1} + 1$. Montrer que pour tout entier $m > 1$, il existe $n > m$ tel que $a_m^m \mid a_n^n$. Le résultat est-il encore vrai lorsque $m = 1$?

Exercice 18. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^\star \to \mathbb{N}^\star$ telles que :

(i) Les entiers $f(1), f(2), \ldots$ sont premiers entre dans leur ensemble.

(ii) Il existe $N \geqslant 1$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $f(n) \neq 1$ et pour tous $a, b \in \mathbb{N}^\star$,

$$f(a)^n \mid f(a+b)^{a^{n-1}} - f(b)^{a^{n-1}}.$$