

Équations Diophantiennes, Groupe C

15 janvier 2023

Exercice 1. Trouver tous les entiers $n \geq 1$ tels que $3^{n-1} + 5^{n-1}$ divise $3^n + 5^n$.

Exercice 2. Montrer que $n^4 + 4^n$ n'est jamais un nombre premier pour $n > 1$.

Exercice 3. L'équation $a^2 + b^2 = 1003$ n'admet aucune solution.

Exercice 4. Soient $m, n \geq 1$ des entiers. Montrer que $3^m + 3^n + 1$ n'est pas un carré parfait.

Exercice 5. Trouver tous les entiers $a, b \geq 1$ tels que les deux quantités

$$\frac{a^2 + b}{b^2 - a} \quad \text{et} \quad \frac{b^2 + a}{a^2 - b}$$

soient des nombres entiers.

Exercice 6. Trouver tous les entiers x, y tels que $15x^2 - 7y^2 = 9$.

Exercice 7. Trouver les deux derniers chiffres de 1032^{1032} .

Exercice 8. Soit p un nombre premier. Montrer que tout diviseur premier de $2^p - 1$ est strictement plus grand que p .

Exercice 9. Montrer que quel que soit $n > 1$, $n^5 + 7$ n'est pas un carré.

Exercice 10. Montrer que 19^{19} ne peut pas s'écrire comme somme d'un cube et d'une puissance quatrième.

Exercice 11. Trouver tous les entiers $x, y \geq 1$ tels que $x^3 - y^3 = xy + 61$.

Exercice 12. Trouver tous les couples d'entiers (m, n) tels que $m^5 - n^5 = 16mn$.