TD cours en ligne 15/01/2023 : modulos

January 13, 2023

<u>Ex 1:</u> Quel est le chiffre des unités de $2023^3 + 23$?

<u>Ex 2:</u> a) Montrer qu'un carré est congru à 0 ou 1 modulo 4
b) Trouver les $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tq $x^2 + 4y = 3$

<u>Ex 3:</u> Montrer que la somme de 3 cubes consécutifs est divisible par 9.

<u>Ex 4:</u> Montrer les critères de divisibilité classiques : soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\overline{a_k ... a_1 a_0}$ sont écrture en base 10,
a) $3 \mid n \iff 3 \mid a_0 + a_1 + ... + a_n$
b) $9 \mid n \iff 9 \mid a_0 + a_1 + ... + a_n$
c) $11 \mid n \iff 11 \mid a_0 - a_1 + a_2 - a_3 ... + (-1)^n \cdot a_n$
d) $7 \mid n \iff 7 \mid \overline{a_2 a_1 a_0} - \overline{a_5 a_4 a_3} + \overline{a_8 a_7 a_6} - \overline{a_{11} a_{10} a_9} + ...$

<u>Ex 5:</u> Trouver les $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, $3a^2 = b^2 + 1$

<u>Ex 6 :</u> Trouver les $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ $m^2 - 8 = 3^n$

<u>Ex 7 :</u> Trouver les $n \in \mathbb{N}$ tq $n - 1 \mid n^2 + 4$

<u>Ex 8 :</u> a) trouver les inversibles modulo 12
b) Conjecturer un critère d'inversibilité modulo n et le prouver
c) Calculer l'inverse de 42 modulo 43

NB : Soit $n \in \mathbb{N}$. $a \in \mathbb{Z}$ est dit inversible modulo n s'il existe $b \in \mathbb{Z}$ tel que $ab \equiv 1 \pmod n$

<u>Ex 9 :</u> Résoudre l'équation $6x \equiv 3 \pmod{21}$ dans $\mathbb{Z}$

<u>Ex 10 :</u> (Théorème de Wilson) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que p est premier ssi $(p - 1)! \equiv -1 \pmod p$

<u>Ex 11:</u> Trouver tous les $x, y \in \mathbb{N}$ tels que $2^x - 3^y = 7$

Ex 12: Trouver les les $x, y \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $x^2 + y^2 + 40 = 2^n$

Ex 13: Trouver les $x, y, z \in \mathbb{Z}$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 2^n$

Ex 14: Montrer que $a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow 60 \mid abc$

Ex 15: Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $6 \mid n^3 + 5n$

Ex 16: Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4k+3$ avec $k \in \mathbb{N}$