

## 1 Rappel de divisibilités

*Exercice 1.* Trouver tous les entiers positifs  $(p, n)$  tels que  $p$  soit premier et  $p \mid n^2 - 4$

*Exercice 2.* Déterminer tous les couples d'entiers  $(n, p)$  strictement positifs où  $p$  est un nombre premier et tels que  $n + p$  soit une puissance de  $n$ .

*Exercice 3.* Trouver tous les entiers  $n$  tels que  $\frac{2n^3+2n+3}{n+2}$  est entier.

*Exercice 4.* Montrer que pour  $p \geq 5$  premier,  $360 \mid p^5 - 5p^3 + 4p$

## 2 Modulos

*Exercice 1.* Trouver tout les entiers  $a$  tels que  $5 \mid a^3 + 3a + 1$

*Exercice 2.* Trouver tous les entiers  $a, b$  tels que  $4 \mid a^2 + b^2 + 1$

*Exercice 3.*  $2^{29}$  est un nombre composé de 9 chiffres tous différents. Trouver le chiffre manquant et le dernier chiffre (sans calculatrice évidemment)

*Exercice 4.* Démontrer les critères de divisibilité pour les entiers 9, 11 (et tous les autres chiffres si vous le souhaitez)

*Exercice 5.* Calculer l'inverse de 380 modulo 144. Soient  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  tels que  $7 \mid a^2 + b^2 + c^2$ . Montrer que  $7 \mid a^4 + b^4 + c^4$ .

## 3 Pour les plus rapides

*Exercice 1.* Trouver tous les  $x, y, z$  entiers tels que  $x^2 + y^2 = 3z^2$

*Exercice 2.* Trouvez tous les  $(x, y)$  tels que  $x^4 + 6 = y^3$

*Exercice 3.* Soit  $a, b, n$  tels que  $a \equiv b \pmod{n}$ . Montrer que  $a^n \equiv b^n \pmod{n^2}$ .

*Exercice 4.* EXERCICE LONG QUI NE SERA PAS CORRIGÉ  
Déterminer tous les entiers naturels  $a, b, c$  tels que  $a! + 5^b = 7^c$ .