PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 11 JANVIER 2023

DURÉE : 4H

## Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

  **Chaque exercice est noté sur 7 points.**

# Problèmes Junior

*Exercice 1.* Martin a écrit le couple d'entiers $(1011, 1012)$ au tableau. Puis, chaque minute, si le couple $(a, b)$ est écrit au tableau, il l'efface et le remplace, selon son choix, par l'un des couples $(b, a)$, $(b+1, a-1)$ ou $(b-2, a+2)$, en s'imposant uniquement de n'écrire que des couples dont les deux nombres sont positifs ou nuls.

Quels sont les couples d'entiers que Martin peut écrire au tableau après un nombre fini de telles opérations ?

*Solution de l'exercice 1* Nulle opération ne change la somme des entiers écrits au tableau, donc Martin ne peut écrire que des couples de la forme $(a, 2013-a)$, avec $0 \leqslant a \leqslant 2013$.

En outre, si Martin part d'un couple $(a, b)$ pour lequel $a \geqslant 1$, il peut écrire successivement les couples $(b+1, a-1)$ et $(a-1, b+1)$. Ainsi, on montre par récurrence sur $k$ que Martin peut écrire tout couple de la forme $(1011-k, 1012+k)$ lorsque $0 \leqslant k \leqslant 1011$.

De même, si Martin part d'un couple $(a, b)$ pour lequel $b \geqslant 1$, il peut écrire successivement les couples $(b, a)$ puis $(a+1, b-1)$. Anisi, on montre par récurrence sur $k$ que Martin peut écrire tout couple de la forme $(1011+k, 1012-k)$ lorsque $0 \leqslant k \leqslant 1012$.

En conclusion, les couples que peut écrire Martin sont précisément les couples de la forme $(a, 2013-a)$, avec $0 \leqslant a \leqslant 2013$.

*Commentaire des correcteurs* L'exercice a été globalement bien réussi. Cependant, de nombreux élèves se sont arrêtés à mi-chemin de leur solution.

Lorsque l'on nous demande l'ensemble des couples que Martin peut écrire, il nous faut faire trois choses :

1. donner une description raisonnablement simple des couples concernés (si un élève écrivait « il s'agit des couples qu'il peut écrire », cet élève aurait techniquement raison, mais n'obtiendrait bien évidemment aucun point) ;
2. démontrer que Martin peut effectivement se débrouiller pour écrire chacun de ces couples ;
3. démontrer que Martin ne pourra jamais se débrouiller pour écrire un couple autre que ceux que l'on a décrits.

En pratique, plusieurs élèves ont oublié l'étape 1, et ont simplement indiqué des couples que Martin pouvait écrire, éventuellement avec des points de suspension, mais sans que la manière d'interpréter ces points de suspension, et les couples qu'ils étaient censés représenter, ne soit claire.

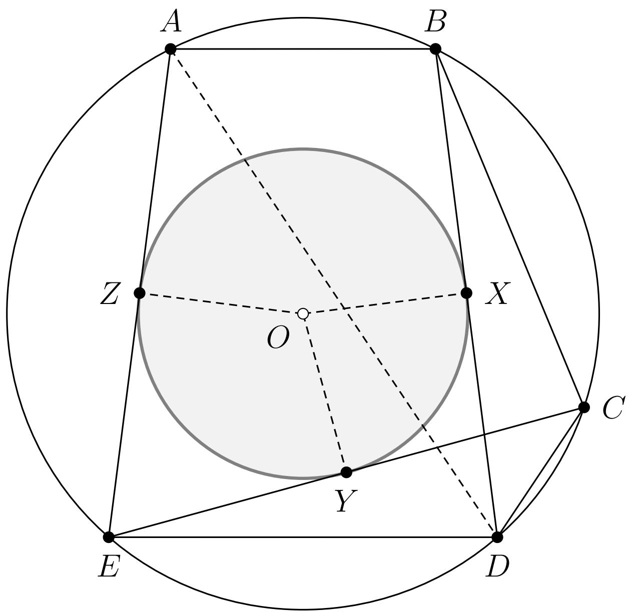
Par ailleurs, un nombre substantiel d'élèves a oublié l'étape 2, ou s'est contenté de dire que « Martin pouvait manifestement écrire tous les couples concernés », ce qui ne saurait constituer une justification suffisante puisqu'il s'agit d'une des deux étapes principales de l'exercice.

Enfin, de nombreux élèves ont oublié l'étape 3, et ont effectivement décrit comment Martin pouvait obtenir chacun des couples $(a, 2023-a)$, mais sans même se demander s'il aurait pu écrire d'autres couples ; souvent, ces élèves se sont d'ailleurs intéressés uniquement aux deux premières opérations de Martin, mais pas la troisième, qui consistait à transformer un couple $(a, b)$ en $(b-2, a+2)$.

Il est primordial, dans une situation analogue, de ne négliger aucune des étapes 1 à 3.

*Exercice 2.* Soit $A$, $B$, $C$, $D$ et $E$ cinq points situés dans cet ordre sur un cercle $\Omega$, de sorte que $(CD)$ soit parallèle à $(BE)$ et que $(AB)$ soit parallèle à $(DE)$. Soit $X$, $Y$ et $Z$ les milieux respectifs des segments $[BD]$, $[CE]$ et $[AE]$.
Démontrer que la droite $(AE)$ est tangente au cercle circonscrit à $XYZ$.

*Solution de l'exercice 2*




Soit $O$ le centre du cercle $\Omega$. Dès lors que l'on s'attache à tracer une figure incluant le cercle $\Gamma$ circonscrit à $XYZ$, on constate que celui-ci semble tangent aux trois droites $(BD)$, $(CE)$ et $(AE)$, tandis que son centre semble coïncider avec $O$. On entreprend donc de démontrer les égalités de longueurs $OX = OY = OZ$, ce qui permettra de conclure que $(OZ)$ est un rayon de $\Gamma$, et que la droite $(AE)$, qui lui est perpendiculaire, est bien tangente à $\Gamma$.
Or, si l'on note $R$ le rayon du cercle $\Gamma$, le théorème de Pythagore indique que

$$OX^2 = R^2 - (BD)^2/4, OY^2 = R^2 - (CE)^2/4 \text{ et } OZ^2 = R^2 - (AE)^2/4.$$

Il s'agit donc de démontrer que $BD = CE = AE$.
Puisque $(CD)$ est parallèle à $(BE)$ et que le trapèze $BCDE$ est inscrit dans le cercle $\Omega$, il s'agit d'un trapèze isocèle, de sorte que $BD = CE$. De même, comme $(AB)$ est parallèle à $(DE)$, le trapèze $ABDE$, qui est inscrit dans $\Omega$, est lui aussi isocèle, et l'on conclut comme souhaité que $AE = BD$.

*Solution alternative n°1* Voici une autre manière d'aboutir aux égalités $BD = CE = AE$. Celles-ci sont équivalentes aux égalités d'angles $\widehat{BOD} = \widehat{COE} = \widehat{EOA}$. Le parallélisme de $(CD)$ et $(BE)$ indique alors que

$$\widehat{BOD} = 2\widehat{BED} = 2(180° - \widehat{EDC}) = \widehat{COE},$$

tandis que le parallélisme de $(AB)$ et $(DE)$ indique comme prévu que

$$\widehat{EOA} = 2\widehat{EDA} = 2\widehat{BAD} = \widehat{BOD}.$$

*Commentaire des correcteurs* Le problème admettait de nombreuses solutions. Toutes passaient par la remarque essentielle (que beaucoup d'élèves ont redémontrée, parfois par des raisonnement bien laborieux) que les trapèzes $ABDE$ et $BEDC$ sont isocèles. Une fois ce constat effectué, on pouvait conclure par chasse aux angles ou en faisant intervenir le centre du cercle circonscrit de $\Omega$ qui, avec une bonne figure, apparaissait également comme le centre du cercle passant par $X, Y$ et $Z$. La principale difficulté rencontrée par les élèves n'ayant pas réussi le problème est de ne pas avoir inclus les points $X$, $Y$ et $Z$ dans leurs calculs.

*Exercice 3.* Soit $x$, $y$ et $z$ des réels strictement positifs tels que $xy+yz+zx=3$.
Démontrer que
$$\frac{x+3}{y+z}+\frac{y+3}{z+x}+\frac{z+3}{x+y}+3 \geqslant 27\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2}{(x+y+z)^3}.$$

*Solution de l'exercice 3* Posons $s=x+y+z$, et soit $L$ et $R$ les membres de gauche et de droite de notre inégalité. On peut réécrire $L$ comme
$$L=\frac{x+3}{y+z}+1+\frac{y+3}{z+x}+1+\frac{z+3}{x+y}+1=(s+3)\left(\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}+\frac{1}{x+y}\right).$$
Or, l'inégalité de Cauchy-Schwarz, appliquée aux vecteurs
$$\left(\frac{1}{\sqrt{y+z}},\frac{1}{\sqrt{z+x}},\frac{1}{\sqrt{x+y}}\right) \text{ et } \left(\sqrt{y+z},\sqrt{z+x},\sqrt{x+y}\right),$$
indique que
$$\left(\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}+\frac{1}{x+y}\right)(y+z+z+x+x+y) \geqslant (1+1+1)^2.$$
On en déduit que $L \geqslant 9(s+3)/(2s)$.
En outre, l'inégalité arithmético-quadratique, appliquée aux termes $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$ et $\sqrt{z}$, indique que
$$\frac{s}{3} \geqslant \left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}{3}\right)^2.$$
Ainsi, $(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2 \leqslant 3(x+y+z)=3s$ et $R \leqslant 81/s^2$.
Pour montrer que $L \geqslant R$, il suffit donc de démontrer que $9(s+3)\times s^2 \geqslant 81\times 2s$, c'est-à-dire que $s(s+3)\geqslant 18$, ou encore que $s \geqslant 3$. On conclut alors en utilisant le lemme du tourniquet, qui indique que
$$s^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) \geqslant 3(xy+yz+zx) \geqslant 9,$$
c'est-à-dire que $s \geqslant 3$.

*Remarque :* Le cas particulier de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que nous avons utilisé est aussi appelé *inégalité des mauvais élèves* : ici, appliquer l'inégalité des mauvais élèves aux fractions
$$\frac{1^2}{y+z},\ \frac{1^2}{z+x} \text{ et } \frac{1^2}{x+y}$$
nous indique que
$$\frac{1^2}{y+z}+\frac{1^2}{z+x}+\frac{1^2}{x+y} \geqslant \frac{(1+1+1)^2}{y+z+z+x+x+y}.$$

*Solution alternative n°1* Cette fois-ci, on utilise d'une part l'inégalité de Nesbitt, qui indique que
$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y} \geqslant \frac{3}{2},$$

et d'autre part l'inégalité des mauvais élèves, qui indique toujours que

$$\frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y} \geqslant \frac{9}{2s}.$$

Ainsi,

$$L \geqslant \frac{3}{2} + \frac{3 \times 9}{2s} + 3 = 9\frac{s+3}{2s}.$$

On conclut alors l'exercice de la même façon que précédemment.

<u>*Solution alternative n°2*</u> Puisque la fonction $f : t \mapsto 1/t$ est convexe, on sait que

$$L = (s+3)(f(y+z) + f(z+x) + f(x+y)) \geqslant 3(s+3)f(2s/3) = 9(s+3)/(2s).$$

De même, l'inégalité du réordonnement, appliquée aux termes $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$ et $\sqrt{z}$, indique que

$$R \leqslant 27\frac{3s}{s^3} = \frac{81}{s^2}.$$

Pour montrer que $L \geqslant R$, il suffit donc de démontrer que $3(s+3) \times s^2 \geqslant 81 \times 2s/3$, c'est-à-dire que $s(s+3) \geqslant 18$, ou encore que $s \geqslant 3$.
On conclut alors en remarquant que l'inégalité du réordonnement, appliquée aux termes $x$, $y$ et $z$, indique que

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \geqslant 3(xy + yz + zx) \geqslant 9,$$

c'est-à-dire que $s \geqslant 3$.

<u>*Commentaire des correcteurs*</u> L'exercice a été assez abordé mais peu réussi. En effet, de nombreux élèves tentent de tout développer, par exemple en calculant $(x+y+z)^3$ puis en remplaçant tous les 3 par $xy + yz + xz$. Cette approche n'est pas nécessairement la plus naturelle : dans un problème d'inégalité, une approche souvent plus fructueuse est d'utiliser directement des inégalités, tandis qu'un calcul de 10 lignes sans une seule inégalité suggère de changer de direction. Ici, ici tenter beaucoup d'inégalités était une bonne idée : il y avait de multiples manières d'aboutir au résultat, par exemple en utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz, des mauvais élèves, de Nesbitt ou de convexité.
Toutes ces inégalités permettaient d'avancer, sous réserve que l'on ait réfléchi à la pertinence de leur utilisation; par exemple, utiliser l'inégalité des mauvais élèves en écrivant le numérateur $x+3$ de la fraction $(x+3)/(y+z)$ comme $\sqrt{x+3}^2 = x+3$ n'est pas très naturel, car $\sqrt{x+3}$ ne joue aucun rôle spécial. Quitte à utiliser cette inégalité, autant découper la fraction en $2$, avec deux numérateurs égaux à $x$ et à $3$, que l'on pourra éventuellement traiter indépendamment l'une de l'autre.

*Exercice 4.* Soit $n \geqslant 3$ un entier. Pour chaque couple de nombres premiers $p$ et $q$ tels que $p < q \leqslant n$, Morgane a écrit la somme $p + q$ au tableau. Elle note ensuite $\mathcal{P}(n)$ le produit de toutes ces sommes. Par exemple, $\mathcal{P}(5) = (2 + 3) \times (2 + 5) \times (3 + 5) = 280$.

Trouver toutes les valeurs de $n \geqslant 3$ pour lesquelles $n!$ divise $\mathcal{P}(n)$.

*Note :* Si deux sommes $p + q$ formées à partir de deux couples différents sont égales l'une à l'autre, Morgane les écrit toutes deux. Par exemple, si $n = 13$, elle écrit bien les deux sommes $3 + 13$ et $5 + 11$.

*Solution de l'exercice 4* Soit $n$ une solution éventuelle, et soit $r$ le plus grand nombre premier tel que $r \leqslant n$. Puisque $r$ divise $n!$, il divise $\mathcal{P}(n)$, donc il existe deux nombres premiers $p$ et $q$ tels que $p < q \leqslant n$ et $r$ divise $p + q$. Par maximalité de $r$, on sait que $p + q < 2r$, de sorte que $p + q = r$. Puisque $q$ et $r$ sont impairs, $p$ est donc pair, et $p = 2$.

De même, il existe deux nombres premiers $s$ et $t$ tels que $s < t \leqslant n$ et $q$ divise $s + t$. Nous allons démontrer que $q - 2$ est premier. En effet, si $t \leqslant q$, alors $s + t = q$, donc $s = 2$ et $t = q - 2$. Sinon, $t = r = q + 2$, donc $q < t + s < 2q + 2 < 3q$, de sorte que $t + s = 2q$ et $s = q - 2$.

En particulier, 3 divise l'un des trois nombres premiers $q-2$, $q$ et $q+2$ ; il s'agit nécessairement de $q - 2$, ce qui signifie que $q - 2 = 3$ et que $q + 2 = r = 7$. Ainsi, $n \geqslant 7$, et $n!$ divise

$$\mathcal{P}(n) = (2 + 3) \times (2 + 5) \times (2 + 7) \times (3 + 5) \times (3 + 7) \times (5 + 7) = 2^6 \times 3^3 \times 5^2 \times 7.$$

Puisque $2 \times 4 \times 6 \times 8 = 2^7 \times 3$ ne divise pas $\mathcal{P}(n)$, on a nécessairement $n = 7$.

Réciproquement, $n = 7$ est bien une solution, car $7! = 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7$.

*Commentaire des correcteurs* L'exercice a été très peu abordé ; c'est dommage, puisqu'un certain nombre d'élèves ont eu de bonnes idées. Néanmoins, comme dit dans le commentaire du problème 5, la rédaction a posé problème : n'hésitez pas à regarder le commentaire du problème 5 pour voir différentes erreurs récurrentes.

# Problèmes Senior

*Exercice 5.* Soit $n \geqslant 3$ un entier. Pour chaque couple de nombres premiers $p$ et $q$ tels que $p < q \leqslant n$, Morgane a écrit la somme $p+q$ au tableau. Elle note ensuite $\mathcal{P}(n)$ le produit de toutes ces sommes. Par exemple, $\mathcal{P}(5) = (2+3) \times (2+5) \times (3+5) = 280$.

Trouver toutes les valeurs de $n \geqslant 3$ pour lesquelles $n!$ divise $\mathcal{P}(n)$.

*Note :* Si deux sommes $p+q$ formées à partir de deux couples différents sont égales l'une à l'autre, Morgane les écrit toutes deux. Par exemple, si $n = 13$, elle écrit bien les deux sommes $3+13$ et $5+11$.

*Solution de l'exercice 5* Soit $n$ une solution éventuelle, et soit $r$ le plus grand nombre premier tel que $r \leqslant n$. Puisque $r$ divise $n!$, il divise $\mathcal{P}(n)$, donc il existe deux nombres premiers $p$ et $q$ tels que $p < q \leqslant n$ et $r$ divise $p+q$. Par maximalité de $r$, on sait que $p+q < 2r$, de sorte que $p+q = r$. Puisque $q$ et $r$ sont impairs, $p$ est donc pair, et $p = 2$.

De même, il existe deux nombres premiers $s$ et $t$ tels que $s < t \leqslant n$ et $q$ divise $s+t$. Nous allons démontrer que $q-2$ est premier. En effet, si $t \leqslant q$, alors $s+t = q$, donc $s = 2$ et $t = q-2$. Sinon, $t = r = q+2$, donc $q < t+s < 2q+2 < 3q$, de sorte que $t+s = 2q$ et $s = q-2$.

En particulier, 3 divise l'un des trois nombres premiers $q-2$, $q$ et $q+2$ ; il s'agit nécessairement de $q-2$, ce qui signifie que $q-2 = 3$ et que $q+2 = r = 7$. Ainsi, $n \geqslant 7$, et $n!$ divise

$$\mathcal{P}(n) = (2+3) \times (2+5) \times (2+7) \times (3+5) \times (3+7) \times (5+7) = 2^6 \times 3^3 \times 5^2 \times 7.$$

Puisque $2 \times 4 \times 6 \times 8 = 2^7 \times 3$ ne divise pas $\mathcal{P}(n)$, on a nécessairement $n = 7$.

Réciproquement, $n = 7$ est bien une solution, car $7! = 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7$.

*Commentaire des correcteurs* L'exercice est très bien réussi : environ trois quarts des élèves ont une solution quasiment complète. Il est cependant à noter que plus d'un tiers d'entre eux n'obtient pas tous les points.

Dans un exercice, il faut faire particulièrement attention à la rédaction ; voici quelques points qui ont posé problème :

- Pour justifier que si $p$ est un premier impair et $p = q + r$ avec $q$ et $r$ premier, il faut au moins invoquer la parité pour justifier que $p - 2$ est premier.
- Les solutions laissaient très souvent à traiter les cas où $n \leqslant 10$. Étant donné que les calculs, par exemple pour $\mathcal{P}(7)$, sont difficiles, il est crucial de les faire figurer : affirmer sans aucun élément que 7 convient n'est pas suffisant.
- Plusieurs élèves oublient que, lorsqu'un nombre premier $p$ divise $q+r$, on n'a pas forcément $p = q + r$ : cette égalité n'est vraie que si $2p > q + r$. Il faut donc justifier minutieusement l'inégalité $2p > q + r$ puis l'égalité $p = q + r$ qui en découle.

*Exercice 6.* On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions $f\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ telles que

$$f(x+f(y)) = f(x) + f(y)$$

pour tous les réels $x$ et $y$. Trouver tous les nombres rationnels $q$ tels que, pour toute fonction $f \in \mathcal{F}$, il existe un réel $z$ tel que $f(z) = qz$.

*Solution de l'exercice 6* Soit $f$ une fonction appartenant à $\mathcal{F}$. Pour tous réels $x$ et $y$, on montre par récurrence immédiate que $f(x+kf(y)) = f(x) + kf(y)$ pour tout entier $k \geqslant 0$. On note $E_k(x,y)$ cette égalité.

Si l'on pose $x' = x - kf(y)$, on constate aussi que $f(x') = f(x'+kf(y)) - kf(y) = f(x) - kf(y)$. Ainsi, l'égalité $E_k(x,y)$ est valide même lorsque $k \leqslant 0$.

En particulier, si $k \neq 0$ et $z = kf(0)$, l'égalité $E_k(0,0)$ indique que $f(z) = (k+1)z/k$. Cela signifie que tous les nombres rationnels de la forme $q = 1 + 1/k$, lorsque $k$ est un entier non nul, sont des solutions du problème.

Réciproquement, soit $a/b$ une fraction irréductible telle que $a/b - 1$ n'est pas l'inverse d'un entier, c'est-à-dire telle que $a \neq b \pm 1$. On considère alors la fonction $f$ définie comme suit : pour tout réel $x$ tel que $0 \leqslant x < 1$ et tout entier $k$, on pose

$$f(k+x) = \begin{cases} k+1 & \text{si } ax \text{ et un entier que divise } b-a\,; \\ k & \text{sinon.} \end{cases}$$

Puisque $f$ est à valeurs entières, on vérifie bien que

$$f(k+x+f(\ell+y)) = f(k+\ell+f(y)+x) = k+\ell+f(y)+f(x) = f(k+x)+f(\ell+x),$$

ce qui signifie que $f \in \mathcal{F}$.

Supposons qu'il existe un entier $k$ et un réel $z$ tels que $0 \leqslant z < 1$ et $f(k+z) = a(k+z)/b$. Si $az$ n'est pas un entier que divise $b-a$, alors

$$ak + az \equiv bf(k+z) \equiv bk \equiv ak \pmod{b-a},$$

ce qui est absurde. Ainsi, $az$ est un entier que divise $b-a$, et

$$ak \equiv a(k+z) \equiv bf(k+z) \equiv b(k+1) \equiv a(k+1) \pmod{b-a}.$$

Mais alors $b-a$ divise $a$, donc divise aussi $b$, et même $\mathrm{PGCD}(a,b) = 1$, ce qui contredit le fait que $a - b \neq \pm 1$. Par conséquent, la fraction $a/b$ n'est pas une solution du problème.

En conclusion, les solutions du problème sont les fractions de la forme $1 + 1/k$, où $k$ est un entier relatif non nul.

*Commentaire des correcteurs* Le problème était difficile et se divisait en deux parties. La première partie était d'identifier les rationnels solutions en itérant l'équation pour avoir une formule de la forme $f(x+kf(y)) = f(x) + kf(y)$ pour tout entier $k$, ce qui utilise des raisonnements élémentaires sur les équations fonctionnelles. La deuxième partie, consistant à montrer que les rationnels trouvés sont bien les seuls, demandait nettement plus d'idées et notamment de construire des fonctions solutions un peu pathologiques. Cette deuxième partie a été très peu effleurée par les élèves.

Signalons tout de même des erreurs croisées fréquemment et qu'il ne faudrait plus trouver dans une copie de test de sélection :

- ▷ Beaucoup d'élèves ont mal lu l'énoncé. Que ce soit parce qu'ils pensaient que $q$ devait satisfaire l'égalité $f(z) = qz$ pour tout $z$ (au lieu d'un seul $z$) ou bien parce qu'ils pensaient que $q$ devait satisfaire $f(z) = qz$ pour une fonction $f$ (au lieu de toutes les fonctions $f$), les élèves auraient dû se rendre compte de leur méprise en voyant la conclusion (très rapide, voire trop rapide) à laquelle ils aboutissaient.
- ▷ Beaucoup d'élèves prétendent que les seules fonctions solutions sont les $x \mapsto x + c$ avec $c$ réel. Une fois encore, il était possible d'éviter cet écueil en ayant un regard critique sur la solution finale obtenue (qui n'utilisait pas le caractère rationnel de $q$, par exemple). Les sources d'erreurs sont bien souvent que les élèves, après avoir obtenu que $f(f(y)) = f(y) + f(0)$, posent $x = f(y)$, obtiennent $f(x) = x + c$ et concluent, en oubliant que la variable $x$ ne parcourt pas forcément $\mathbb{R}$, mais seulement l'image de $f$, qui n'est pas nécessairement surjective. D'autres élèves plus téméraires ont voulu dériver l'équation fonctionnelle, ce dont il faut se garder quand on n'a aucune hypothèse de régularité sur $f$.

*Exercice 7.* Lucile a écrit au tableau $s$ 2023-uplets d'entiers. Elle s'autorise alors des opérations de la forme suivante : elle choisit deux 2023-uplets $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_{2023})$ et $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_{2023})$, non nécessairement distincts, parmi ceux qu'elle a déjà écrits, puis elle écrit également au tableau les deux 2023-uplets $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, \ldots, u_{2023} + v_{2023})$ et $\max(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\max(u_1, v_1), \ldots, \max(u_{2023}, v_{2023}))$.

Quelles sont les valeurs de $s$ pour lesquelles, si Lucile choisit judicieusement les $s$ 2023-uplets qu'elle a écrits initialement, et en répétant les opérations ci-dessus, elle pourra écrire n'importe quel 2023-uplet d'entiers ?

*Solution de l'exercice 7* Tout d'abord, si $s = 1$, Lucile a écrit un seul vecteur $\mathbf{u}$. Tout vecteur $\mathbf{x}$ qu'elle pourra ensuite écrire aura des coordonnées de même signe que $\mathbf{u}$, et elle ne pourra donc pas écrire tous les vecteurs possibles.

Ensuite, si $s = 2$, soit $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ les deux vecteurs que Lucile a écrits initialement. Si deux coordonnées $u_i$ et $v_i$ sont de même signe, tout vecteur $\mathbf{x}$ que Lucile écrira ensuite aura aussi une coordonnée de même signe que $u_i$ et $v_i$. Par conséquent, pour tout entier $i \leqslant 2023$, les coordonnées $u_i$ et $v_i$ sont de signes opposés. Quitte à échanger les vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ ainsi que les coordonnées en positions 1 à 3, on suppose donc que $u_1$ et $u_2$ sont strictement positifs, et que $u_1 v_2 \leqslant u_2 v_1$.

On montre alors par récurrence que tout vecteur $\mathbf{x}$ que Lucile écrira ensuite satisfera également l'inégalité $u_1 x_2 \leqslant u_2 x_1$. En effet, à partir de deux vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ satisfaisant déjà cette inégalité, Lucile peut former deux vecteurs :

- ▷ $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, pour lequel $u_1 z_2 = u_1 x_2 + u_1 y_2 \leqslant u_2 x_1 + u_2 y_1 = u_2 z_1$ ;
- ▷ $\mathbf{z} = \max(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, pour lequel $u_1 z_2 = \max(u_1 x_2, u_1 y_2) \leqslant \max(u_2 x_1, u_2 y_1) = u_2 z_1$.

En particulier, Lucile ne pourra jamais écrire de vecteurs dont les deux premières coordonnées sont $0$ et $1$.

Enfin, si $s \geqslant 3$, Lucile peut écrire les vecteurs $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ tels que $u_i = -1$, $v_i = i$ et $w_i = -i^2$, puis ajouter $s - 3$ vecteurs inutiles. À partir de ces vecteurs, Lucile peut alors créer successivement les vecteurs suivants, l'entier $k$ étant un paramètre que l'on fait librement varier entre $1$ et $2023$ :

- ▷ $\mathbf{a}^{(k)} = (k^2 - 1)\mathbf{u} + 2k\mathbf{v} + \mathbf{w}$, pour lequel $a_i^{(k)} = 1 - k^2 + 2ki - i^2 = 1 - (i - k)^2$ ;
- ▷ $\mathbf{b}^{(k)} = \mathbf{a}^{(k)} + \mathbf{u}$, pour lequel $b_i^{(k)} = -(i - k)^2$ ;
- ▷ $\mathbf{0} = \max\{\mathbf{b}^{(k)} : 1 \leqslant k \leqslant 2023\}$, pour lequel $\mathbf{0}_i = 0$ ;
- ▷ $\mathbf{c}^{(k)} = \max\{\mathbf{a}^{(k)}, \mathbf{0}\}$, pour lequel $c_i^{(k)} = 1$ si $i = k$, et $c_i^{(k)} = 0$ sinon.

Dès lors, Lucile peut écrire tout vecteur $\mathbf{x}$, puisqu'elle n'a qu'à l'exprimer comme la somme

$$\mathbf{x} = |\mathbf{x}|\mathbf{u} + \sum_{k=1}^{2023} (|\mathbf{x}| + x_k)\mathbf{c}^{(k)},$$

où l'on a posé $|\mathbf{x}| = 1 + \max\{|x_k| : 1 \leqslant k \leqslant 2023\}$.

En conclusion, les valeurs de $s$ recherchées sont les entiers $s \geqslant 3$.

*Commentaire des correcteurs* Ce problème fort difficile a été peu abordé, et très peu réussi. De nombreux élèves ont réussi à trouver des configurations de départ pour $s = 2 \times 2023$ ou $s = 2023 + 1$, mais celles-ci n'aidaient pas à démontrer que $s = 3$ convenait. Même si obtenir une solution complète à ce problème était une gageure, on ne saurait néanmoins trop répéter aux élèves de suivre les conseils suivants :

- ▷ comme ils l'ont fait, rechercher des configurations de départ simples pour des valeurs de $s$ qui pourraient être les valeurs minimales recherchées ;

- ▷ **lire attentivement l'énoncé :** plusieurs élèves ont cru que Lucile ne s'intéressait qu'aux entiers naturels, ce que rien dans l'énoncé ne venait suggérer ;
- ▷ s'intéresser au cas des $k$-uplets lorsque $k$ est petit, par exemple $k = 1$, $k = 2$ ou $k = 3$ ; seuls trois élèves ont activement recherché des éléments de preuve dans cette direction, alors qu'il est évidemment indispensable de chercher à comprendre les petits cas avant de comprendre les grands ;
- ▷ observer si les opérations étudiées conservent certaines propriétés : ici, se rappeler que le maximum et la somme de deux fonctions convexes est convexe était une approche possible pour la démonstration que $s \geqslant 3$, et que toute configuration de départ éventuelle pour $s = 3$ devait inclure des suites concaves aussi simples que possible, telles que la suite $\mathbf{w}$ donnée dans la solution.