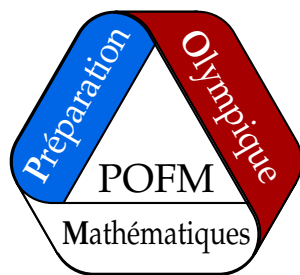


PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES



TEST DU 23 NOVEMBRE 2022

DURÉE : 4H

Instructions

- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- ▷ On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits. Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Chaque exercice est noté sur 7 points.

Exercice 1. Pour tout entier $k \geq 0$, on note a_k le premier chiffre du nombre 2^k , écrit en base 10. Par exemple, $a_5 = 3$ est le premier chiffre de $2^5 = 32$.

Soit $n \geq 1$ un entier. Démontrer que, parmi les chiffres de 1 à 9, il y en a un qui est égal à au plus $n/17$ des n chiffres $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$.

Solution de l'exercice 1 Soit $c(k)$ le nombre de fois où le chiffre k figure parmi les chiffres $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$. Lorsque $a_i \geq 2$, on sait que $i \geq 1$ et que $a_{i-1} = \lfloor a_i/2 \rfloor$.

Ainsi, pour tout chiffre $k \leq 5$, on a $a_i = k$ si et seulement si $a_{i+1} = 2k$ ou $a_{i+1} = 2k + 1$, de sorte que $c(k) \geq c(2k) + c(2k + 1)$. Si l'on pose $m = \min\{c(k) : 1 \leq k \leq 9\}$, on en conclut en particulier que

$$\begin{aligned} n &\geq c(1) + c(2) + c(3) + c(4) + c(5) + c(6) + c(7) + c(8) + c(9) \\ &\geq \quad + 2c(2) + 2c(3) + c(4) + c(5) + c(6) + c(7) + c(8) + c(9) \\ &\geq \quad \quad \quad + 3c(4) + 3c(5) + 3c(6) + 3c(7) + c(8) + c(9) \\ &\geq \quad \quad \quad \quad + 3c(5) + 3c(6) + 3c(7) + 4c(8) + 4c(9) \\ &\geq 17m. \end{aligned}$$

Solution alternative n°1 Reprenons les notations de la solution précédente. Pour tout événement E , on notera 1_E l'entier qui vaut 1 lorsque E se produit, et 0 sinon.

Pour tout chiffre $k \leq 5$, on a

$$c(k) = c(2k) + c(2k + 1) + 1_{a_{n-1}=k}.$$

De même, puisque $a_1 = 1$, on sait que

$$1 + c(5) + c(6) + c(7) + c(8) + c(9) = c(1) + 1_{5 \leq a_{n-1} \leq 9}.$$

On distingue alors deux cas.

▷ Si $a_{n-1} = 1$, on trouve

$$\begin{aligned} c(1) &= c(5) + c(6) + c(7) + c(8) + c(9) + 1 \geq 5m + 1; \\ c(2) + c(3) &= c(1) - 1 \geq 5m; \\ c(4) &= c(8) + c(9) \geq 2m. \end{aligned}$$

On en déduit que $n \geq \sum_{k=1}^9 c(k) \geq 17m + 1$.

▷ Si $a_{n-1} \geq 2$, on trouve

$$\begin{aligned} c(1) &\geq c(5) + c(6) + c(7) + c(8) + c(9) \geq 5m; \\ c(2) + c(3) &= c(1) \geq 5m; \\ c(4) &= c(8) + c(9) \geq 2m. \end{aligned}$$

On en déduit là encore que $n \geq \sum_{k=1}^9 c(k) \geq 17m + 1$, ce qui conclut.

Solution alternative n°2 Réutilisons une fois de plus les notations des solutions précédentes. Cette fois-ci, on découpe la suite en sous-suites croissantes dont le dernier élément vaut 1

et le dernier élément vaut au moins 5. Il s'agit des cinq sous-suites de la forme 1, 2, 4, 8; 1, 2, 4, 9; 1, 2, 5; 1, 3, 6; et 1, 3, 7.

Comme chacun des chiffres de 5 à 9 appartient à exactement un type de sous-suite, ces sous-suites apparaissent respectivement $c(8)$, $c(9)$, $c(5)$, $c(6)$ et $c(7)$ fois. En particulier, chacune d'entre elles apparaît au moins m fois. Puisque ces suites sont de longueurs respectives 4, 4, 3, 3 et 3, et en comptant leur nombre total de termes, on en déduit que

$$n \geq 4 \times m + 4 \times m + 3 \times m + 3 \times m + 3 \times m = 17m.$$

Remarque : On peut en fait démontrer que $m \leq 5n/94$. Il s'agit là de la meilleure inégalité possible, et elle est atteinte lorsque $n = 94$, valeur pour laquelle $c(1) \geq c(2) \geq \dots \geq c(9) = 5$. Plus généralement, on peut en fait démontrer que $m = c(9)$ quelle que soit la valeur de n , et que le ratio m/n tend vers $\log_{10}(10/9)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Il est à noter que calculer cette limite est en fait beaucoup plus facile que de vérifier que $c(9) \leq 5n/94$ pour tout $n \geq 1$. Cette vérification, horrible, peut être effectuée comme suit.

On commence par calculer, à l'aide de l'ordinateur, les 41 565 premiers termes de la suite $(a_n)_{n \geq 0}$, ce qui nous permet ensuite de vérifier que $m \leq 5n/94$ lorsque $n \leq 41\,565$. On traite maintenant les cas où $n > 41\,565$.

Pour ce faire, on note b_k le reste de la division euclidienne de $239k \log_{10}(2)$ par 239, puis on note $d(\ell)$ le nombre de termes égaux à ℓ parmi $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$. En vertu de l'inégalité $10^{227} \leq 9^{239}$, on remarque que, si $a_k = 9$, on a nécessairement $227 \leq b_k$. On en déduit que

$$c(9) \leq d(227) + \dots + d(238).$$

Toujours à l'aide de l'ordinateur, on vérifie que, pour toute valeur de ℓ , il existe un entier $u(\ell)$ minimal tel que $b_{u(\ell)} = \ell$. Par conséquent, pour tous les entiers ℓ , ℓ' et ℓ'' tels que $0 \leq \ell < \ell' \leq \ell'' \leq 238$ et pour tout entier $i \geq u(\ell)$, si $\ell' \leq b_i \leq \ell''$, on sait que

$$\ell' - \ell - 1 \leq b_{i-u(\ell)} \leq \ell'' - \ell.$$

Cela signifie en particulier que

$$d(\ell' - \ell - 1) + d(\ell' - \ell) + \dots + d(\ell'' - \ell) + u(\ell) \geq d(\ell') + d(\ell' + 1) + \dots + d(\ell'').$$

Lorsque $0 \leq k \leq 17$, on pose alors $\ell = 13k + 12$, $\ell' = 227$ et $\ell'' = 238$, de sorte que

$$d(214 - 13k) + \dots + d(226 - 13k) + u(13k + 12) \geq d(227) + \dots + d(238) \geq c(9).$$

On vérifie enfin que $u(12) + u(13 + 12) + u(13 \times 2 + 12) + \dots + u(13 \times 17 + 12) = 2088$, et que 2088 des 41 565 premiers termes de la suite $(b_k)_{k \geq 0}$ sont inférieurs ou égaux à 11. Par conséquent, si $n > 41\,565$,

$$\begin{aligned} n &= (d(0) + \dots + d(11)) + \sum_{k=0}^{17} (d(214 - 13k) + \dots + d(226 - 13k)) + (d(227) + \dots + d(238)) \\ &\geq \sum_{k=0}^{17} (d(214 - 13k) + \dots + d(226 - 13k) + u(13k + 12)) + c(9) \\ &\geq 19c(9), \end{aligned}$$

ce qui montre bien que $m \leq c(9) \leq n/19 \leq 5n/94$.

Commentaire des correcteurs Le problème a été relativement peu populaire pour un problème 1. Il n'empêche qu'un nombre considérable d'élèves a toutefois réussi à trouver une solution correcte.

Une erreur très fréquente était de conjecturer, voire d'affirmer sans preuve, et à partir des premières valeurs de la suite, que cette dernière était 10-périodique, de sorte que les chiffres 7 et 9 n'y apparaîtraient jamais. Bien que la suite semble périodique quand on regarde les premières valeurs de n , elle adopte un comportement bien moins prévisible une fois que n est large.

L'autre piège de cet exercice, et qui peut le rendre un peu laborieux, était que beaucoup de solutions nécessitent à faire un peu attention à ce qui se passe au bord de la suite. Par exemple, certaines argumentations consistaient à montrer que, parmi 17 nombres consécutifs, on a au plus deux chiffres 8 ou 9. Ces argumentations ne permettent pas à priori de conclure, car il existe des suites à n termes qui satisfont ce critère mais contiennent cependant plus de $n/17$ chiffres 8 et plus de $n/17$ chiffres 9; c'est, par exemple, le cas de la suite dont les deux seuls termes sont 8 et 9. Il y avait plusieurs moyens de contourner ce problème, ce que certains élèves ont fait très soigneusement.

Exercice 2. Soit $ABCD$ un parallélogramme et soit G le centre de gravité du triangle ABD . Soit P et Q les points de la droite (BD) tels que les droites (GP) et (PC) sont perpendiculaires et les droites (GQ) et (QC) sont perpendiculaires.

Démontrer que la droite (AG) est la bissectrice de l'angle $\widehat{PAQ}$.

Solution de l'exercice 2 Tout d'abord, puisque $ABCD$ est un parallélogramme, la médiane (AG) du triangle ABD et la diagonale (AC) passent toutes deux par le milieu N de $[BD]$.

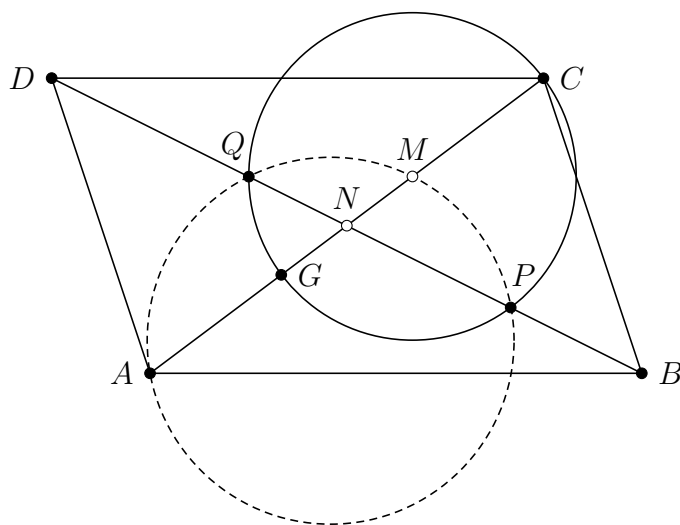
Puisque CGP et CGQ sont rectangles en P et en Q , les points P et Q sont les deux points d'intersection de (BD) avec le cercle de diamètre $[CG]$. Puisque l'on trace ce cercle, on note donc M son centre, c'est-à-dire le milieu de $[GC]$. En particulier, les cinq points A, G, N, M et C sont alignés.

Le moyen le plus sûr de démontrer que (AG) est la bissectrice de $\widehat{PAQ}$ est alors d'invoquer le théorème du pôle Sud, c'est-à-dire de démontrer que (AG) passe par le milieu de l'arc $\widehat{PQ}$ sur le cercle circonscrit à APQ .

On entreprend donc de tracer le cercle circonscrit à APQ , et on constate visuellement qu'il passe par M . Puisque $PM = QM$, il suffit donc effectivement de démontrer que A, Q, M et P sont cocycliques. La figure suggère alors très fortement d'invoquer la puissance de N .

En effet, par rapport au cercle circonscrit à $PCQG$, cette puissance vaut $\overline{NP} \cdot \overline{NQ} = \overline{NG} \cdot \overline{NC}$. Par ailleurs, on sait que $N = (A + C)/2$, que $M = (G + C)/2$ et que $G = (2N + A)/3$. On en déduit que $\overline{NA} \cdot \overline{NM} = -3NG^2 = \overline{NG} \cdot \overline{NC} = \overline{NP} \cdot \overline{NQ}$.

Cela signifie bien que les points A, Q, M et P sont cocycliques, et donc que M est le pôle Sud de APQ issu de A , ce qui conclut.



Commentaire des correcteurs Le problème a été beaucoup abordé, et les copies témoignent d'un réel effort de la part des élèves pour se donner les moyens d'avancer. On ne peut que s'en réjouir.

La plupart des élèves ont identifié que les points G, P, C et Q sont cocycliques. Malheureusement, une fois ce constat effectué, très peu d'élèves ont en fait tracé ce nouveau cercle sur leur figure, alors que faire apparaître sur sa figure les propriétés que l'on démontre au fur et à mesure est **LE** réflexe à avoir en géométrie. Il y a d'ailleurs une forte corrélation entre les élèves ayant tracé ce cercle sur leur figure (et qui ont donc eu besoin d'en placer le centre) et les élèves qui sont allés loin dans le problème. L'introduction du centre du cercle de diamètre $[CG]$ amenait beaucoup de symétrie dans la figure, ce qui permettait de beaucoup se rapprocher de la solution.

Plusieurs élèves ont vu la configuration du pôle Sud se dessiner ; il ne leur restait plus qu'à démontrer un résultat de cocyclicité. Surprenamment, quelques élèves ont tenté des calculs de longueurs avec la caractérisation de Ptolémée des quadrilatères cycliques. Cette piste pouvait être tentée, mais pas avant d'avoir regardé le critère de la puissance d'un point, beaucoup plus pratique à manipuler dans le cas général.

Exercice 3. On dit qu'un entier $n \geq 1$ est *nippon* s'il admet trois diviseurs d_1, d_2 et d_3 tels que $1 \leq d_1 < d_2 < d_3$ et $d_1 + d_2 + d_3 = 2022$.

Quel est le plus petit entier nippon ?

Solution de l'exercice 3 Tout d'abord, on remarque que 2×2019 est nippon, puisque les entiers 1, 2 et 2019 figurent parmi ses diviseurs.

Soit n l'entier nippon minimal : il s'agit du PPCM des entiers d_1, d_2 et d_3 . On pose alors $a_k = n/d_k$, de sorte que $1 \leq a_3 < a_2 < a_1$, que $\text{PGCD}(a_1, a_2, a_3) = 1$ et que

$$n \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \right) = 2022 = 2 \times 3 \times 337.$$

Pour minimiser n , on souhaite maximiser la somme des fractions $1/a_i$, donc on cherche à minimiser les entiers a_i eux-mêmes. On commence donc par regarder les petites valeurs de a_2 et de a_3 .

Par exemple, si $a_3 = 1$ et $a_2 = 2$, notre équation devient

$$(3a_1 + 2)d_1 = 2^2 \times 3 \times 337.$$

Ainsi, $3a_1 + 2$ est un facteur de $2^2 \times 3 \times 337$ congru à 2 modulo 3, c'est-à-dire 2 ou $2 \times 337 = 674$. Le premier cas est impossible car $3a_1 + 2 \geq 3 \times 3 + 2 > 2$. On en déduit que $a_1 = 672/3 = 224$, puis que $d_1 = 2 \times 3 = 6$, de sorte que $n = 6 \times 224 = 1344$. En particulier, 1344 est un multiple de 1 et de 2, donc il s'agit d'un entier nippon, avec $d_1 = 6, d_2 = 672$ et $d_3 = 1344$.

On recherche donc un éventuel entier nippon $n < 1344$. Dans un tel cas, si on écrit la somme $1/a_1 + 1/a_2 + 1/a_3$ sous forme d'une fraction irréductible p/q , notre égalité devient

$$n \times p = 2 \times 3 \times 337 \times q,$$

et p est premier avec q , donc divise $2 \times 3 \times 337$. En outre, puisque l'on ne peut plus avoir $a_3 = 1$ et $a_2 = 2$, on a nécessairement $a_2 \geq 3$. Ainsi,

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{a_3} \geq \frac{p}{q} = \frac{2022}{n} > \frac{2022}{1344} > 1 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6},$$

donc $a_1 \leq 5$.

Il nous reste donc à étudier les triplets $(a_1, a_2, a_3) = (4, 3, 1), (5, 3, 1), (5, 4, 1), (4, 3, 2), (5, 3, 2), (5, 4, 2)$ et $(5, 4, 3)$, qui nous amènent respectivement aux fractions $p/q = 19/12, 23/15, 29/20, 13/12, 31/30, 19/20$ et $47/60$. Le numérateur p ne divise jamais $2 \times 3 \times 337$, donc aucun de ces cas n'est possible.

En conclusion, le plus petit entier nippon est $n = 1344$.

Solution alternative n°1 On peut simplifier l'étude des triplets (a_1, a_2, a_3) effectuée au dernier paragraphe de la solution ci-dessus, pour limiter les calculs à effectuer. En effet,

▷ si $a_3 \geq 2$, alors $a_2 \geq 3$ et $a_1 \geq 4$, donc

$$\frac{p}{q} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12} \leq \frac{3}{2};$$

▷ si $a_3 = 1$ et $a_2 \geq 4$, on sait que $a_1 \geq 5$, donc

$$\frac{p}{q} \leq 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{29}{20} \leq \frac{3}{2};$$

▷ si $a_3 = 1$, $a_2 = 3$ et $a_1 \geq 6$, on sait que

$$\frac{p}{q} \leq 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{2}.$$

Il suffit donc d'étudier les deux seuls triplets $(a_1, a_2, a_3) = (4, 3, 1)$ et $(5, 3, 1)$, qui nous amènent aux fractions $p/q = 19/12$ et $23/15$ donc ne conviennent pas. On en conclut à nouveau que le plus petit entier nippon est bien $n = 1344$.

Commentaire des correcteurs Le problème était difficile et a été peu réussi. Voici quelques écueils récurrents relevés :

- ▷ Beaucoup d'élèves affirment des choses sans aucune preuve. Par exemple, et concernant les trois diviseurs d_1 , d_2 et d_3 du plus petit entier nippon n , plusieurs élèves ont affirmé sans autre forme de procès que $d_3 = n$ (ce qui est vrai mais pas évident, et mérite une preuve); que d_1 divise d_2 (ce qui est vrai mais fort difficile à démontrer); que $n = \text{PPCM}(d_1, d_2)$ (ce qui est faux, donc encore plus difficile à prouver).

De manière générale, tout élément affirmé mérite une preuve, sinon il ne rapporte pas de points. Ici beaucoup ont affirmé des choses sous réserve « d'optimalité » sans aucune preuve et n'ont donc traité qu'un petit nombre de cas.

- ▷ Beaucoup d'élèves ont trouvé des entiers nippons qu'ils pensaient minimaux mais ne l'étaient pas du tout. Une heuristique permettant d'identifier un petit entier nippon était de s'appuyer sur des hypothèses telles que celles mentionnées au point précédent : avec un peu de chances, ces hypothèses seront vraies et on aura bel et bien trouvé l'entier nippon minimal. Cependant, cela ne constituera en rien une preuve de minimalité, puisque nos hypothèses n'ont aucune raison d'être vraies. Simplement, cela nous évitera d'essayer de démontrer, par exemple, que $4038 = 1 \times 2 \times 2019$ est le plus petit entier nippon.

Par exemple, on peut faire l'hypothèse que d_1 divise d_2 , qui divise lui-même d_3 . Il s'agit alors de résoudre l'équation $a(1+b+bc) = 2022 = 2 \times 3 \times 337$, avec $a \geq 1$, $b \geq 2$ et $c \geq 2$. Puisque $1+b+bc \geq 7$, on a donc $1+b+bc \geq 337$, et $a \leq 6$. Comme on cherche à minimiser

$$n = abc = \frac{bc}{1+b+bc} \times 2022,$$

c'est-à-dire à maximiser la fraction

$$\frac{1+b+bc}{bc} = 1 + \frac{1}{c} + \frac{1}{b} \times \frac{1}{c},$$

on cherche à minimiser simultanément b et c . Dans ces cas-là, on aura maximisé a ; on s'intéresse donc au cas où $a = 6$ et $c = 2$, auquel cas $b = 112$ et $n = 1344$.

Ici, on a donc eu la chance de tomber effectivement sur le plus petit entier nippon. Il reste cependant à démontrer que 1344 est bien l'entier nippon minimal, puisque l'on n'a absolument pas prouvé que d_1 divisait d_2 , ni que d_2 divisait d_3 .

- ▷ Beaucoup d'élèves ont eu l'instinct que d_3 valait n . Cependant, très peu ont réussi à le prouver : c'est dommage, car cela peut être un premier objectif qui rapproche de la solution.
- ▷ Il y a des confusions récurrentes sur les bases de l'arithmétique : il se peut que a divise bc sans que a ne divise b ou c , et ce même sous des hypothèses farfelues, par exemple le fait que $a > b$. C'est, par exemple, le cas lorsque $b = c = 2$ et $a = bc$.

Exercice 4. Soit $n \geq 3$ un entier, et $x_1, x_2, \dots, x_n$ des nombres réels appartenant à l'intervalle $[0, 1]$. On suppose que la somme $s = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ vérifie l'inégalité $s \geq 3$. Démontrer qu'il existe des entiers i et j tels que $2^{j-i}x_i x_j > 2^{s-3}$.

Solution de l'exercice 4 Dans la suite, on pose $x_t = 0$ si $t \leq 0$ ou $t \geq n+1$, ce qui ne change rien au problème. Soit u et v deux indices pour lesquels $2^{u-v}x_u x_v$ est maximal. Ce produit vaut au moins $\max\{x_i^2\} \geq (s/n)^2$, donc il est non nul, de sorte que x_u et x_v sont non nuls. Par définition, on sait que $\max\{2^{u-t}x_u x_t, 2^{t-v}x_t x_v\} \leq 2^{u-v}x_u x_v$, c'est-à-dire $x_t \leq \min\{1, 2^{u-t}x_u, 2^{t-v}x_v\}$, pour tout entier t .

En outre, il existe un réel τ pour lequel $2^{u-\tau}x_u = 2^{\tau-v}x_v$: il s'agit du réel

$$\tau = \frac{u + v + \log_2(x_u/x_v)}{2}.$$

On pose alors $\alpha = 2^{u-\tau}x_u = 2^{\tau-v}x_v$, c'est-à-dire $\alpha = 2^{(u-v)/2}\sqrt{x_u x_v}$, et on vérifie aisément que $x_t \leq \alpha/2^{|t-\tau|}$ pour tout entier t .

Posons maintenant $w = \tau - \lfloor \tau \rfloor$, de sorte que $0 \leq w \leq 1$. Puisque la fonction $f: x \mapsto 2^x + 2^{1-x}$ est convexe et que $f(0) = f(1) = 3$, on a alors

$$3 \leq s = \sum_{t \leq \tau-w} x_t + \sum_{t \geq \tau+1-w} x_t \leq \sum_{k \geq 0} \alpha 2^{-w-k} + \sum_{k \geq 0} \alpha 2^{w-1-k} = f(1-w)\alpha \leq 3\alpha,$$

ce qui démontre que $\log_2(\alpha) \geq 0$.

On pose alors $\mu = \lfloor \tau - \log_2(\alpha) \rfloor$ et $\nu = \lceil \tau + \log_2(\alpha) \rceil$, puis $y = \tau - \log_2(\alpha) - \mu$, et enfin $z = \nu - \tau - \log_2(\alpha)$, de sorte que $\mu \leq \nu$, $0 \leq y \leq 1$ et $0 \leq z \leq 1$. Cette fois-ci, c'est la fonction $g: x \mapsto 2^{1-x} + x$ qui est convexe et qui vérifie $g(0) = g(1) = 2$. On en conclut que

$$\begin{aligned} s &\leq \sum_{t \leq \mu} x_t + (x_{\mu+1} + \dots + x_{\nu-1}) + \sum_{t \geq \nu} x_t \\ &< \sum_{k \geq 0} \alpha 2^{-\log_2(\alpha)-y-k} + (\nu - \mu - 1) + \sum_{k \geq 0} \alpha 2^{-\log_2(\alpha)-z-k} \\ &< 2^{1-y} + (y + z + 2\log_2(\alpha) - 1) + 2^{1-z} \\ &< 2\log_2(\alpha) + 3, \end{aligned}$$

ce qui signifie précisément que $2^{u-v}x_u x_v = \alpha^2 > 2^{s-3}$.

Solution alternative n°1 Voici une approche analogue à l'approche précédente. Ces deux approches diffèrent en ce que, alors que l'on s'intéressait ci-dessus à une forme de « milieu » de la suite (x_n) , on s'appuie ici sur les termes d'indices extrémaux.

Intéressons-nous aux deux fonctions $f: i \mapsto 2^{-i}x_i$ et $g: j \mapsto 2^j x_j$: il s'agit de démontrer que $(\max f) \times (\max g) \geq 2^{s-3}$.

Pour tout entier $i \leq n$, remplacer le terme x_i par $\min\{2^i \max f, 2^{-i} \max g, 1\}$ ne modifie ni $\max f$ ni $\max g$, laisse les inégalités $0 \leq x_i \leq 1$ valides, et ne peut qu'augmenter la somme $s = x_1 + x_2 + \dots + x_n$. Par conséquent, il suffit de résoudre le problème lorsque

$$x_i = \min\{2^i \max f, 2^{-i} \max g, 1\}$$

pour tout entier $i \leq n$.

Dans ces conditions, on constate désormais que

$$\begin{aligned} 2^{i-1}x_1 &= \min\{2^i \max f, 2^{i-2} \max g, 2^{i-1}\} \geq \min\{2^i \max f, 2^{-i} \max g, 1\} = x_i \text{ et} \\ 2^{n-i}x_n &= \min\{2^{2n-i} \max f, 2^{-i} \max g, 2^{n-i}\} \geq \min\{2^i \max f, 2^{-i} \max g, 1\} = x_i \end{aligned}$$

dès lors que $1 \leq i \leq n$. Cela signifie que $f(1) = \max f$ et que $g(n) = \max g$. On cherche donc à démontrer que $2^{s-3} < f(1)g(n) = 2^{n-1}x_1x_n$.

Soit a et b les grands entiers tels que $2^{a-1}x_1 \leq 1$ et $2^{b-1}x_n \leq 1$. Si $a + b \geq n + 1$, posons $\bar{a} = \min\{a, n\}$ et $\bar{b} = n - \bar{a}$: la suite (x_i) consiste en $\bar{a}$ termes de valeurs majorées par $x_1, 2x_1, \dots, 2^{\bar{a}-1}x_1$, puis en $\bar{b}$ termes de valeurs majorées par $2^{\bar{b}-1}x_n, 2^{\bar{b}-2}x_n, \dots, x_n$. Puisque $\bar{a} + b = \min\{a + b, n + b\} \geq n + 1 \geq \bar{a} + \bar{b} + 1$, on sait en outre que $b \geq \bar{b} + 1$, de sorte que

$$s \leq x_1 + 2x_1 + \dots + 2^{\bar{a}-1}x_1 + x_n + 2x_n + \dots + 2^{\bar{b}-1}x_n < 2^{\bar{a}}x_1 + 2^{\bar{b}}x_n \leq 2^ax_1 + 2^{b-1}x_n \leq 3.$$

Puisque $s \geq 3$, c'est donc que $a + b \leq n$. On pose alors $c = n - a - b$, puis $\alpha = 2^ax_1$ et $\beta = 2^bx_n$. La suite (x_i) consiste en a termes de valeurs majorées par $x_1, 2x_1, \dots, 2^{a-1}x_1$, puis en c termes de valeurs majorées par 1, et enfin en b termes de valeurs majorées par $2^{b-1}x_n, 2^{b-2}x_n, \dots, x_n$. Cette fois-ci, on a donc

$$s \leq x_1 + 2x_1 + \dots + 2^{a-1}x_1 + c + x_n + 2x_n + \dots + 2^{b-1}x_n < 2^ax_1 + c + 2^bx_n = c + \alpha + \beta.$$

En outre, les réels α et β sont compris entre 1 et 2, et

$$2^{n-1}x_1x_n = 2^ax_1 \times 2^bx_n \times 2^{c-1} = 2^{c-1}\alpha\beta.$$

En outre, la fonction $x \mapsto 2^x - 2x$ est convexe sur $\mathbb{R}$, et elle vaut 0 en 1 et en 2. Cela signifie que $2^x \leq 2x$ pour tout réel $x \in [1, 2]$. On en conclut, comme souhaité, que

$$2^{s-3} < 2^{c-3} \times 2^\alpha \times 2^\beta \leq 2^{c-1}\alpha\beta = 2^{n-1}x_1x_n.$$

Remarque : Pour tout réel $c > 1$, il est possible de choisir un entier $n \geq 3$ puis des réels $x_1, \dots, x_n$ satisfaisant les contraintes de l'énoncé mais pour lesquels $2^{j-i}x_ix_j \leq 2^{s-3}c$ pour tous les entiers i et j . Voici comment on peut procéder.

Étant donné un entier impair de la forme $n = 2m - 1$, on définit les réels $x_i = 2^{i-m}$ lorsque $1 \leq i \leq m - 2$, $x_{m-1} = x_{m+1} = 2^{-1} + 2^{1-m}$, $x_m = 1$ et $x_i = 2^{m-i}$ lorsque $m + 2 \leq i \leq n$. Ces réels sont de somme $s = 3$, et

$$2^{j-i}x_ix_j \leq 2^{j-i}(1 + 2^{2-m})^2 2^{-|i-m|-|j-m|} \leq (1 + 2^{2-m})^2$$

pour tous les entiers i et j . Il suffit donc de choisir n de manière que $(1 + 2^{2-m})^2 \leq c$, c'est-à-dire $n \geq 3 - 2\log_2(\sqrt{c} - 1)$.

Commentaire des correcteurs Le problème était extrêmement difficile. Il a été peu abordé, et très peu d'élèves ont réalisé des avancées significatives à son propos. C'est normal : le but était aussi d'entraîner les élèves à se frotter à des problèmes difficiles qu'ils pourraient rencontrer lors d'une olympiade internationale.

Devant pareil énoncé, deux réflexes s'imposent :

1. En l'absence de progrès, consacrer un temps substantiel aux autres problèmes. De nombreux élèves ont eu ce réflexe, ce dont les correcteurs les félicitent.
2. Constaté ici que, puisque l'on souhaitait maximiser le produit $(2^{-i}x_i) \times (2^jx_j)$, il convenait d'étudier séparément les indices u et v pour lesquels $2^{-u}x_u$ et 2^vx_v étaient maximaux.

Par ailleurs, de nombreux élèves ont fait des hypothèses qu'ils n'avaient pas le droit de faire, ou se sont ramenés à des cas particuliers qui ne simplifiaient manifestement pas le problème, tels que :

- ▷ supposer $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$; on ne peut évidemment pas réordonner à loisir les x_i , puisque les inégalités que l'énoncé met en jeu impliquent les termes x_i mais aussi les indices i et j ;
- ▷ supposer les x_i non nuls ; de fait, remplacer un terme x_I nul par un x_I très légèrement positif n'allait rien changer au fait que les produits $2^{j-I}x_Ix_j$ et $2^{I-j}x_Ix_j$ seraient tout petits, donc inférieurs à 2^{s-3} .