PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 11 JANVIER 2023

DURÉE : 4H

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- Le **groupe Junior** est constitué des élèves nés en 2008 ou après.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 1 à 4.
- Le **groupe Senior** est constitué des élèves nés en 2007 ou avant.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 5 à 7.
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées.
  Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

Énoncés Junior

Exercice 1. Martin a écrit le couple d'entiers $(1011, 1012)$ au tableau. Puis, chaque minute, si le couple (a, b) est écrit au tableau, il l'efface et le remplace, selon son choix, par l'un des couples (b, a), $(b+1, a-1)$ ou $(b-2, a+2)$, en s'imposant uniquement de n'écrire que des couples dont les deux nombres sont positifs ou nuls.

Quels sont les couples d'entiers que Martin peut écrire au tableau après un nombre fini de telles opérations ?

Solution de l'exercice 1 Nulle opération ne change la somme des entiers écrits au tableau, donc Martin ne peut écrire que des couples de la forme $(a, 2013-a)$, avec $0 \leqslant a \leqslant 2013$.

En outre, si Martin part d'un couple (a, b) pour lequel $a \geqslant 1$, il peut écrire successivement les couples $(b+1, a-1)$ et $(a-1, b+1)$. Ainsi, on montre par récurrence sur k que Martin peut écrire tout couple de la forme $(1011-k, 1012+k)$ lorsque $0 \leqslant k \leqslant 1011$.

De même, si Martin part d'un couple (a, b) pour lequel $b \geqslant 1$, il peut écrire successivement les couples (b, a) puis $(a+1, b-1)$. Anisi, on montre par récurrence sur k que Martin peut écrire tout couple de la forme $(1011+k, 1012-k)$ lorsque $0 \leqslant k \leqslant 1012$.

En conclusion, les couples que peut écrire Martin sont précisément les couples de la forme $(a, 2013-a)$, avec $0 \leqslant a \leqslant 2013$.

Commentaire des correcteurs L'exercice a été globalement bien réussi. Cependant, de nombreux élèves se sont arrêtés à mi-chemin de leur solution.

Lorsque l'on nous demande l'ensemble des couples que Martin peut écrire, il nous faut faire trois choses :

1. donner une description raisonnablement simple des couples concernés (si un élève écrivait « il s'agit des couples qu'il peut écrire », cet élève aurait techniquement raison, mais n'obtiendrait bien évidemment aucun point) ;
2. démontrer que Martin peut effectivement se débrouiller pour écrire chacun de ces couples ;
3. démontrer que Martin ne pourra jamais se débrouiller pour écrire un couple autre que ceux que l'on a décrits.

En pratique, plusieurs élèves ont oublié l'étape 1, et ont simplement indiqué des couples que Martin pouvait écrire, éventuellement avec des points de suspension, mais sans que la manière d'interpréter ces points de suspension, et les couples qu'ils étaient censés représenter, ne soit claire.

Par ailleurs, un nombre substantiel d'élèves a oublié l'étape 2, ou s'est contenté de dire que « Martin pouvait manifestement écrire tous les couples concernés », ce qui ne saurait constituer une justification suffisante puisqu'il s'agit d'une des deux étapes principales de l'exercice.

Enfin, de nombreux élèves ont oublié l'étape 3, et ont effectivement décrit comment Martin pouvait obtenir chacun des couples $(a, 2023-a)$, mais sans même se demander s'il aurait pu écrire d'autres couples ; souvent, ces élèves se sont d'ailleurs intéressés uniquement aux deux premières opérations de Martin, mais pas la troisième, qui consistait à transformer un couple (a, b) en $(b-2, a+2)$.

Il est primordial, dans une situation analogue, de ne négliger aucune des étapes 1 à 3.

Exercice 2. **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**

Exercice 3. **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**

Exercice 4. **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**

Énoncés Senior

Exercice 5. **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**

Exercice 6. **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**

Exercice 7. **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**