PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 23 NOVEMBRE 2022

DURÉE : 4H

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées.
  Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

Exercice 1. Pour tout entier $k \geqslant 0$, on note a_k le premier chiffre du nombre 2^k, écrit en base 10. Par exemple, $a_5 = 3$ est le premier chiffre de $2^5 = 32$.

Soit $n \geqslant 1$ un entier. Démontrer que, parmi les chiffres de 1 à 9, il y en a un qui est égal à au plus $n/17$ des n chiffres $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$.

Solution de l'exercice 1 Soit $\mathsf{c}(k)$ le nombre de fois où le chiffre k figure parmi les chiffres $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Lorsque $a_i \geqslant 2$, on sait que $i \geqslant 1$ et que $a_{i-1} = \lfloor a_i/2 \rfloor$.

Ainsi, pour tout chiffre $k \leqslant 5$, on a $a_i = k$ si et seulement si $a_{i+1} = 2k$ ou $a_{i+1} = 2k+1$, de sorte que $\mathsf{c}(k) \geqslant \mathsf{c}(2k) + \mathsf{c}(2k+1)$. Si l'on pose $m = \min\{\mathsf{c}(k) \colon 1 \leqslant k \leqslant 9\}$, on en conclut en particulier que

$$\begin{aligned} n &\geqslant \mathsf{c}(1) + \mathsf{c}(2) + \mathsf{c}(3) + \mathsf{c}(4) + \mathsf{c}(5) + \mathsf{c}(6) + \mathsf{c}(7) + \mathsf{c}(8) + \mathsf{c}(9) \\ &\geqslant + 2\mathsf{c}(2) + 2\mathsf{c}(3) + \mathsf{c}(4) + \mathsf{c}(5) + \mathsf{c}(6) + \mathsf{c}(7) + \mathsf{c}(8) + \mathsf{c}(9) \\ &\geqslant + 3\mathsf{c}(4) + 3\mathsf{c}(5) + 3\mathsf{c}(6) + 3\mathsf{c}(7) + \mathsf{c}(8) + \mathsf{c}(9) \\ &\geqslant + 3\mathsf{c}(5) + 3\mathsf{c}(6) + 3\mathsf{c}(7) + 4\mathsf{c}(8) + 4\mathsf{c}(9) \\ &\geqslant 17m. \end{aligned}$$

Solution alternative n°1 Reprenons les notations de la solution précédente. Pour tout événement $\mathbf{E}$, on notera $\mathbf{1}_{\mathbf{E}}$ l'entier qui vaut 1 lorsque $\mathbf{E}$ se produit, et 0 sinon.

Pour tout chiffre $k \leqslant 5$, on a

$$\mathsf{c}(k) = \mathsf{c}(2k) + \mathsf{c}(2k+1) + \mathbf{1}_{a_{n-1}=k}.$$

De même, puisque $a_1 = 1$, on sait que

$$1 + \mathsf{c}(5) + \mathsf{c}(6) + \mathsf{c}(7) + \mathsf{c}(8) + \mathsf{c}(9) = \mathsf{c}(1) + \mathbf{1}_{5 \leqslant a_{n-1} \leqslant 9}.$$

On distingue alors deux cas.

- ▷ Si $a_{n-1} = 1$, on trouve

$$\begin{aligned} \mathsf{c}(1) &= \mathsf{c}(5) + \mathsf{c}(6) + \mathsf{c}(7) + \mathsf{c}(8) + \mathsf{c}(9) + 1 \geqslant 5m + 1; \\ \mathsf{c}(2) + \mathsf{c}(3) &= \mathsf{c}(1) - 1 \geqslant 5m; \\ \mathsf{c}(4) &= \mathsf{c}(8) + \mathsf{c}(9) \geqslant 2m. \end{aligned}$$

  On en déduit que $n \geqslant \sum_{k=1}^{9} \mathsf{c}(k) \geqslant 17m + 1$.

- ▷ Si $a_{n-1} \geqslant 2$, on trouve

$$\begin{aligned} \mathsf{c}(1) &\geqslant \mathsf{c}(5) + \mathsf{c}(6) + \mathsf{c}(7) + \mathsf{c}(8) + \mathsf{c}(9) \geqslant 5m; \\ \mathsf{c}(2) + \mathsf{c}(3) &= \mathsf{c}(1) \geqslant 5m; \\ \mathsf{c}(4) &= \mathsf{c}(8) + \mathsf{c}(9) \geqslant 2m. \end{aligned}$$

  On en déduit là encore que $n \geqslant \sum_{k=1}^{9} \mathsf{c}(k) \geqslant 17m + 1$, ce qui conclut.

Solution alternative n°2 Réutilisons une fois de plus les notations des solutions précédentes. Cette fois-ci, on découpe la suite en sous-suites croissantes dont le dernier élément vaut 1 et le dernier élément vaut au moins 5. Il s'agit des cinq sous-suites de la forme $1, 2, 4, 8$; $1, 2, 4, 9$; $1, 2, 5$; $1, 3, 6$; et $1, 3, 7$.

Comme chacun des chiffres de 5 à 9 appartient à exactement un type de sous-suite, ces sous-suites apparaissent respectivement $\mathsf{c}(8)$, $\mathsf{c}(9)$, $\mathsf{c}(5)$, $\mathsf{c}(6)$ et $\mathsf{c}(7)$ fois. En particulier, chacune d'entre elles apparaît au moins m fois. Puisque ces suites sont de longueurs respectives 4, 4, 3, 3 et 3, et en comptant leur nombre total de termes, on en déduit que

$$n \geqslant 4 \times m + 4 \times m + 3 \times m + 3 \times m + 3 \times m = 17m.$$

Remarque : On peut en fait démontrer que $m \leqslant 5n/94$. Il s'agit là de la meilleure inégalité possible, et elle est atteinte lorsque $n = 94$, valeur pour laquelle $\mathsf{c}(1) \geqslant \mathsf{c}(2) \geqslant \cdots \geqslant \mathsf{c}(9) = 5$. Plus généralement, on peut en fait démontrer que $m = \mathsf{c}(9)$ quelle que soit la valeur de n, et que le ratio m/n tend vers $\log_{10}(10/9)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Il est à noter que calculer cette limite est en fait beaucoup plus facile que de vérifier que $\mathsf{c}(9) \leqslant 5n/94$ pour tout $n \geqslant 1$. Cette vérification, horrible, peut être effectuée comme suit.

On commence par calculer, à l'aide de l'ordinateur, les $41\,565$ premiers termes de la suite $(a_n)_{n \geqslant 0}$, ce qui nous permet ensuite de vérifier que $m \leqslant 5n/94$ lorsque $n \leqslant 41\,565$. On traite maintenant les cas où $n > 41\,565$.

Pour ce faire, on note b_k le reste de la division euclidienne de $239k \log_{10}(2)$ par 239, puis on note $\mathsf{d}(\ell)$ le nombre de termes égaux à ℓ parmi $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$. En vertu de l'inégalité $10^{227} \leqslant 9^{239}$, on remarque que, si si $a_k = 9$, on a nécessairement $227 \leqslant b_k$. On en déduit que

$$\mathsf{c}(9) \leqslant \mathsf{d}(227) + \cdots + \mathsf{d}(238).$$

Toujours à l'aide de l'ordinateur, on vérifie que, pour toute valeur de ℓ, il existe un entier $u(\ell)$ minimal tel que $b_{u(\ell)} = \ell$. Par conséquent, pour tous les entiers ℓ, ℓ' et ℓ'' tels que $0 \leqslant \ell < \ell' \leqslant \ell'' \leqslant 238$ et pour tout entier $i \geqslant u(\ell)$, si $\ell' \leqslant b_i \leqslant \ell''$, on sait que

$$\ell' - \ell - 1 \leqslant b_{i-u(\ell)} \leqslant \ell'' - \ell.$$

Cela signifie en particulier que

$$\mathsf{d}(\ell' - \ell - 1) + \mathsf{d}(\ell' - \ell) + \cdots + \mathsf{d}(\ell'' - \ell) + u(\ell) \geqslant \mathsf{d}(\ell') + \mathsf{d}(\ell' + 1) + \cdots + \mathsf{d}(\ell'').$$

Lorsque $0 \leqslant k \leqslant 17$, on pose alors $\ell = 13k + 12$, $\ell' = 227$ et $\ell'' = 238$, de sorte que

$$\mathsf{d}(214 - 13k) + \cdots + \mathsf{d}(226 - 13k) + u(13k + 12) \geqslant \mathsf{d}(227) + \cdots + \mathsf{d}(238) \geqslant \mathsf{c}(9).$$

On vérifie enfin que $u(12) + u(13 + 12) + u(13 \times 2 + 12) + \cdots + u(13 \times 17 + 12) = 2088$, et que 2088 des $41\,565$ premiers termes de la suite $(b_k)_{k \geqslant 0}$ sont inférieurs ou égaux à 11. Par conséquent, si $n > 41\,565$,

$$\begin{aligned} n &= (\mathsf{d}(0) + \cdots + \mathsf{d}(11)) + \sum_{k=0}^{17} (\mathsf{d}(214 - 13k) + \cdots + \mathsf{d}(226 - 13k)) + (\mathsf{d}(227) + \cdots + \mathsf{d}(238)) \\ &\geqslant \sum_{k=0}^{17} (\mathsf{d}(214 - 13k) + \cdots + \mathsf{d}(226 - 13k) + u(13k + 12)) + \mathsf{c}(9) \\ &\geqslant 19\mathsf{c}(9), \end{aligned}$$

ce qui montre bien que $m \leqslant \mathsf{c}(9) \leqslant n/19 \leqslant 5n/94$.

Commentaire des correcteurs Le problème a été relativement peu populaire pour un problème 1. Il n'empêche qu'un nombre considérable d'élèves a toutefois réussi a trouvé une solution correcte.

Une erreur très fréquente était de conjecturer, voire d'affirmer sans preuve, et à partir des premières valeurs de la suite, que cette dernière était 10-périodique, de sorte que les chiffres 7 et 9 n'y apparaîtraient jamais. Bien que la suite semble périodique quand on regarde les premières valeurs de n, elle adopte un comportement bien moins prévisible une fois que n est large.

L'autre piège de cet exercice, et qui peut le rendre un peu laborieux, était que beaucoup de solutions nécessitent à faire un peu attention à ce qui se passe au bord de la suite. Par exemple, certaines argumentations consistaient à monter que, parmi 17 nombres consécutifs, on a au plus deux chiffres 8 ou 9. Ces argumentations ne permettent pas à priori de conclure, car il existe des suites à n termes qui satisfont ce critère mais contiennent cependant plus de $n/17$ chiffres 8 et plus de $n/17$ chiffres 9 ; c'est, par exemple, le cas de la suite dont les deux seuls termes sont 8 et 9. Il y avait plusieurs moyens de contourner ce problème, ce que certains élèves ont fait très soigneusement.

Exercice 2. Soit $ABCD$ un parallélogramme et soit G le centre de gravité du triangle ABD. Soit P et Q les points de la droite (BD) tels que les droites (GP) et (PC) sont perpendiculaires et les droites (GQ) et (QC) sont perpendiculaires.

Démontrer que la droite (AG) est la bissectrice de l'angle $\widehat{PAQ}$.

Solution de l'exercice 2 Tout d'abord, puisque $ABCD$ est un parallélogramme, la médiane (AG) du triangle ABD et la diagonale (AC) passent toutes deux par le milieu N de $[BD]$.

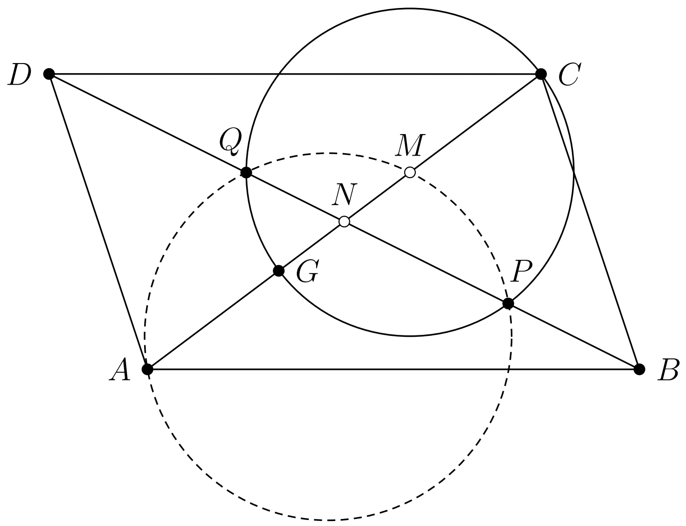
Puisque CGP et CGQ sont rectangles en P et en Q, les points P et Q sont les deux points d'intersection de (BD) avec le cercle de diamètre $[CG]$. Puisque l'on trace ce cercle, on note donc M son centre, c'est-à-dire le milieu de $[GC]$. En particulier, les cinq points A, G, N, M et C sont alignés.

Le moyen le plus sûr de démontrer que (AG) est la bissectrice de $\widehat{PAQ}$ est alors d'invoquer le théorème du pôle Sud, c'est-à-dire de démontrer que (AG) passe par le milieu de l'arc $\widehat{PQ}$ sur le cercle circonscrit à APQ.

On entreprend donc de tracer le cercle circonscrit à APQ, et on constate visuellement qu'il passe par M. Puisque $PM = QM$, il suffit donc effectivement de démontrer que A, Q, M et P sont cocycliques. La figure suggère alors très fortement d'invoquer la puissance de N.

En effet, par rapport au cercle circonscrit à $PCQG$, cette puissance vaut $\overline{NP} \cdot \overline{NQ} = \overline{NG} \cdot \overline{NC}$. Par ailleurs, on sait que $N = (A + C)/2$, que $M = (G + C)/2$ et que $G = (2N + A)/3$. On en déduit que $\overline{NA} \cdot \overline{NM} = -3NG^2 = \overline{NG} \cdot \overline{NC} = \overline{NP} \cdot \overline{NQ}$.

Cela signifie bien que les points A, Q, M et P sont cocycliques, et donc que M est le pôle Sud de APQ issu de A, ce qui conclut.



Commentaire des correcteurs Le problème a été beaucoup abordé, et les copies témoignent d'un réel effort de la part des élèves pour se donner les moyens d'avancer. On ne peut que s'en réjouir.

La plupart des élèves ont identifié que les points G, P, C et Q sont cocycliques. Malheureusement, une fois ce constat effectué, très peu d'élèves ont en fait tracé ce nouveau cercle sur leur figure, alors que faire apparaître sur sa figure les propriétés que l'on démontre au fur et à mesure est **LE** réflexe à avoir en géométrie. Il y a d'ailleurs une forte corrélation entre les élèves ayant tracé ce cercle sur leur figure (et qui ont donc eu besoin d'en placer le centre) et les élèves qui sont allés loin dans le problème. L'introduction du centre du cercle de diamètre $[CG]$ amenait beaucoup de symétrie dans la figure, ce qui permettait de beaucoup se rapprocher de la solution.

Plusieurs élèves ont vu la configuration du pôle Sud se dessiner ; il ne leur restait plus qu'à démontrer un résultat de cocyclicité. Surprenamment, quelques élèves ont tenté des calculs de longueurs avec la caractérisation de Ptolémée des quadrilatères cycliques. Cette piste pouvait être tentée, mais pas avant d'avoir regardé le critère de la puissance d'un point, beaucoup plus pratique à manipuler dans le cas général.

Exercice 3. **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**

Exercice 4. **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**