PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 1 : GÉOMÉTRIE

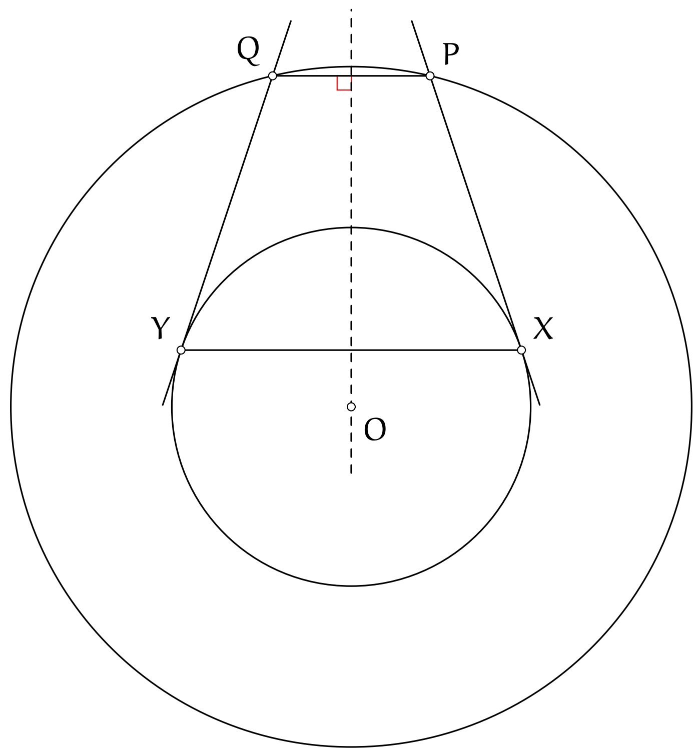
Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe junior est constitué des élèves nés en 2008 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe senior.
- Les exercices classés “Juniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés “Seniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Exercices Juniors

Exercice 1. Soient ω et Ω deux cercles concentriques (c'est-à-dire qu'ils ont le même centre) de sorte que le cercle ω soit à l'intérieur du cercle Ω. Soient X et Y deux points sur le cercle ω. On note P et Q les points d'intersection respectifs du cercle Ω avec les tangentes en X et Y à ω, de telle sorte que P et Q soient du même côté par rapport à la droite (XY). Montrer que les points X, Y, P et Q sont cocycliques.

Solution de l'exercice 1



Le quadrilatère $XYQP$ semble être un trapèze isocèle sur la figure. On commence par le démontrer.

Soit d la médiatrice de $[XY]$. Puisque O est le centre du cercle ω, O appartient à d. Ainsi, les cercles centrés en O, et en particulier ω et Ω, sont envoyés sur eux-mêmes par la symétrie d'axe d. On note s cette symétrie.

On a $s(X) = Y$, $s(\omega) = \omega$ et $s(\Omega) = \Omega$, donc s envoie la tangente à ω en X sur la tangente à $s(\omega) = \omega$ en $s(X) = Y$. Le point d'intersection P de Ω avec la tangente à ω en X est envoyé sur le point d'intersection de $s(\Omega)$ avec la tangente à $s(\omega)$ en $s(X)$.

Il s'agit du point d'intersection de Ω avec la tangente à ω en Y, à savoir le point Q. Autrement dit, P et Q sont symétriques par rapport à la médiatrice de $[XY]$. Les segments $[XY]$ et $[PQ]$ sont perpendiculaires à d donc parallèles entre eux et les segments $[PX]$ et $[QY]$ sont symétriques par rapport à d. Ceci suffit à conclure que le quadrilatère $PQYX$ est un trapèze isocèle.

Concluons qu'il s'agit d'un quadrilatère cyclique. Par angles correspondants, $\widehat{QPX} = 180° - \widehat{PXY}$ et puisque s conserve les angles, $\widehat{YQP} = \widehat{QPX}$. On déduit que

$$\widehat{YQP} = \widehat{QPX} = 180° - \widehat{PXY}$$

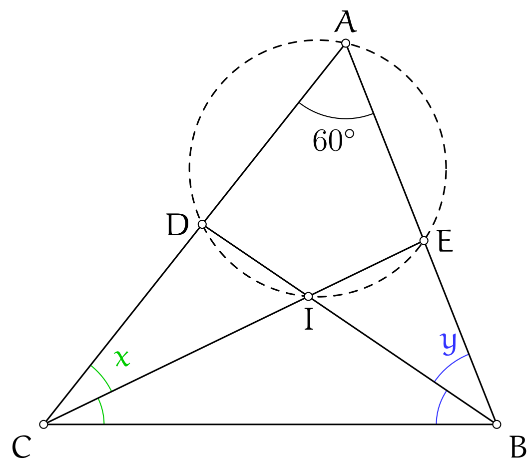
donc les points P, Q, Y et X sont bien cocycliques d'après la réciproque du théorème de l'angle inscrit.

Commentaire des correcteurs : Le problème a été plutôt bien réussi, mais il y a eu trois problèmes récurrents :

— Plusieurs élèves utilisent allègrement que deux triangles avec deux côtés de même longueur et un angle en commun sont isométriques. Malheureusement ce fait est faux : ici on pouvait s'en sortir en utilisant que les triangles étaient rectangles (dans ce cas le critère est vrai par Pythagore). Mais dans un cas général c'est totalement faux : il faut que les côtés soient adjacents à l'angle. Ainsi il est nécessaire de bien préciser rectangle.
— Beaucoup d'élèves supposent que (QY) et (PX) s'intersectent. C'est le cas sauf quand les droites sont parallèles : il fallait donc aussi traiter ce cas. En olympiade, introduire un point qui n'existe pas dans un cas particulier coûte régulièrement 1 point à certains candidats : il faut donc être prudent et traiter le cas particulier à côté.
— Certains élèves parlent de symétrie sans vraiment d'argument rigoureux. Il est important de préciser pourquoi les objets sont envoyés l'un sur l'autre par symétrie.

Exercice 2. Soit ABC un triangle avec $\widehat{BAC} = 60°$. Soient D et E les pieds des bissectrices issues respectivement des sommets B et C. Soit I le point d'intersection des droites (BD) et (CE). Montrer que les points A, I, D et E sont cocycliques.

Solution de l'exercice 2



On va faire une chasse aux angles pour démontrer que $\widehat{IDA}+\widehat{IEA} = 180°$. Notons $x = \widehat{ACE} = \widehat{ECB}$ ainsi que $y = \widehat{ABD} = \widehat{DBC}$. Comme la somme des angles d'un triangle vaut $180°$ on a ainsi

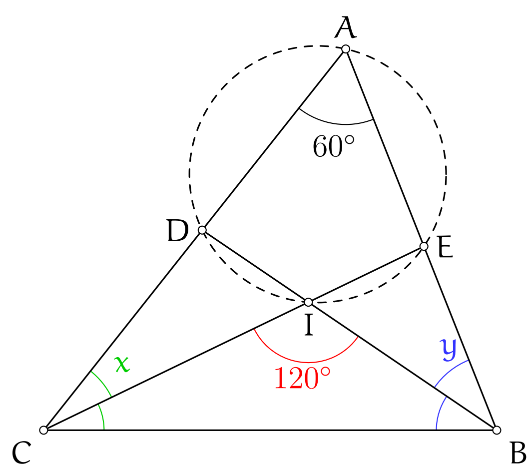
$$\begin{aligned} 180° &= \widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} \\ &= 60° + 2y + 2x. \end{aligned}$$

Ce qui implique que $x + y = 60°$. On peut donc exprimer tous les angles de la figure en fonction de x et en particulier les deux angles qui nous intéressent, $\widehat{IDA}$ et $\widehat{IEA}$. On a $\widehat{IDA} = \widehat{BDA} = 180° - 60° - y$ ainsi que $\widehat{IEA} = \widehat{CEA} = 180° - 60° - x$. Donc la somme vaut

$$\widehat{IDA} + \widehat{IEA} = 180° - 60° - y + 180° - 60° - x = 180° + 60° - x - y = 180°.$$

Ce qui est l'égalité voulue.

Solution alternative de l'exercice 2

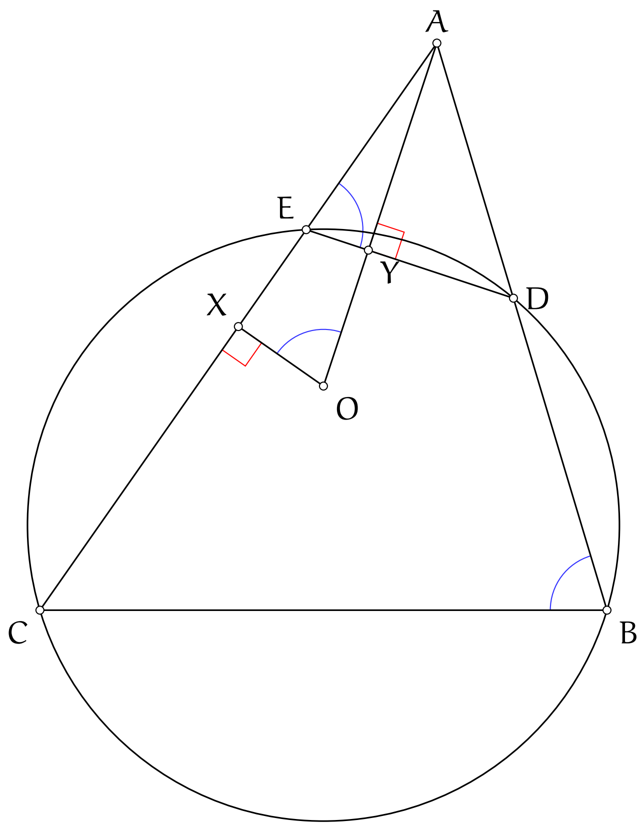


Une fois que l'on a obtenu que $x + y = 60°$, on peut conclure d'une autre façon, en démontrant que $\widehat{DAE} + \widehat{DIE} = 180°$. En effet, dans le triangle BCI, on a $\widehat{BIC} = 180° - x - y = 120°$, de sorte que $\widehat{DIE} + \widehat{DAE} = \widehat{BIC} + \widehat{BAC} = 120° + 60° = 180°$.

Commentaire des correcteurs : Exercice très bien réussi dans l'ensemble. Même si l'exercice était relativement rapide, il faut bien penser à faire une belle figure propre et bien préciser les étapes de raisonnement.

Exercice 3. Soit ABC un triangle dont O est le centre du cercle circonscrit. On note ℓ une droite perpendiculaire à la droite (AO). La droite (ℓ) intersecte les côtés (AB) et (AC) en les points D et E. Montrer que les points B, C , E et D sont cocycliques.

Solution de l'exercice 3



Posons X et Y les projetés orthogonaux de O sur (AC) et (DE) respectivement. Notons que X est le milieu du segment $[AC]$ et aussi le pied de la bissectrice de l'angle $\widehat{COA}$ dans le triangle AOC isocèle en O.

Comme $\widehat{EXO} = 90^\circ = \widehat{EYO}$, on en déduit que E, X, O et Y sont cocycliques par le théorème de l'angle inscrit. Par le théorème de l'angle au centre, on a alors :

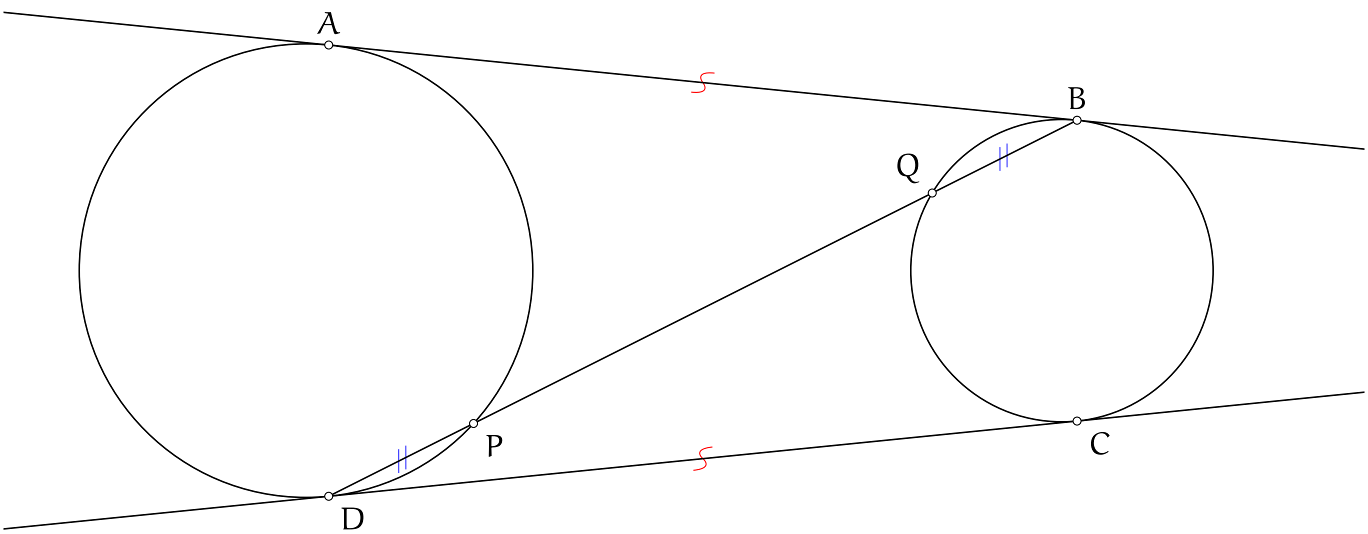
$$\widehat{CBA} = \widehat{COA}/2 = \widehat{XOA} = 180^\circ - \widehat{YEX} = 180^\circ - \widehat{CED}.$$

On en déduit la cocyclicité des points B, C, D et E.

Commentaire des correcteurs : L'exercice est très bien réussi, néanmoins beaucoup de preuves se perdent dans de nombreux calculs quand il est possible de faire bien plus simple.

Exercice 4. Soient ω_1 et ω_2 deux cercles disjoints. Une tangente commune extérieure à ces deux cercles coupe ω_1 en A et ω_2 en B. La deuxième tangente commune extérieure à ces deux cercles coupe ω_1 en D et ω_2 en C. La droite (BD) coupe ω_1 en le point P autre que D et ω_2 en le point Q autre que B. Montrer que $BQ = DP$.

Solution de l'exercice 4



Une symétrie axiale par rapport à la droite joignant les centres des deux cercles échange A et D ainsi que B et C. Donc, $AB = DC$. On pense alors à appliquer la puissance d'un point, on a alors :

$$DQ \cdot DB = DC^2 = AB^2 = BP \cdot BD,$$

où la première égalité vient de la puissance du point depuis D par rapport à ω_2 et la troisième égalité vient de la puissance du point depuis B par rapport au cercle ω_1. On peut réécrire cette identité de la manière suivante :

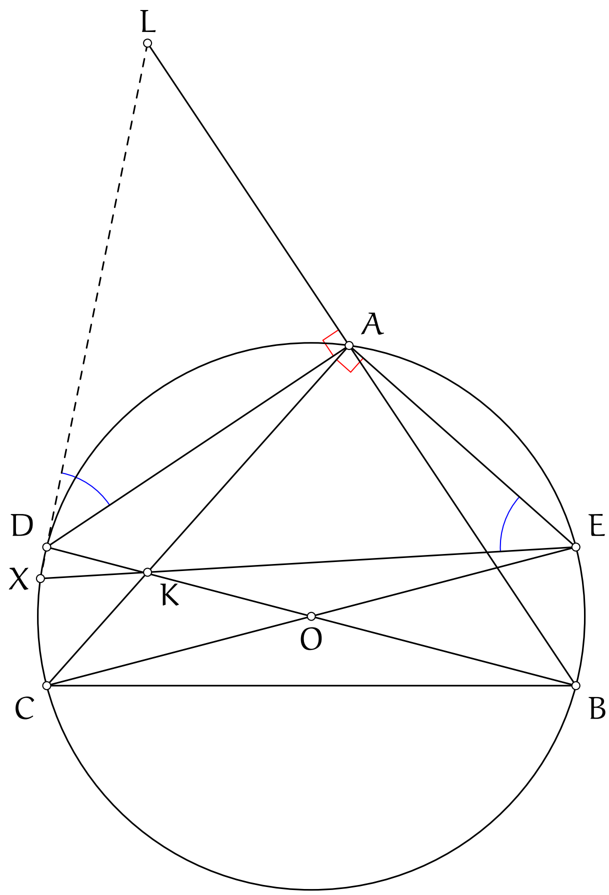
$$(BP - DQ)BD = 0.$$

Cela implique que $BP = DQ$ et donc que $DP = BQ$, d'où la conclusion.

Commentaire des correcteurs : L'exercice a globalement été très bien réussi. Utiliser des puissances de points simplifiait l'exercice : certaines copies ont réussi à faire sans, mais il peut être bon d'ètudier la solution avec cette notion afin de voir comment elle simplifiait la résolution du problème. Signalons que très peu de copies ont pensé au fait que lorsque les cercles ont même rayon, alors les tangentes ne se coupent pas. Il faut donc traiter ce cas à part. Enfin si la nècessitè de faire une figure propre et grande est acquise pour la plupart des élèves, il y a encore quelques copies qui ne respectent pas cette consigne.

Exercice 5. Soit ABC un triangle acutangle avec $AB < AC < BC$ et soit Ω son cercle circonscrit. Soient D et E les points diamètralement opposés respectivement aux points B et C dans le cercle Ω. Le cercle de centre A et de rayon AE intersecte $[AC]$ en K. Le cercle de centre A et de rayon AD coupe (BA) en L (de telle sorte A se trouve entre B et L). Montrer que les droites (EK) et (DL) se coupent sur le cercle Ω .

Solution de l'exercice 5



Notons X le second point d'intersection de la droite (EK) avec le cercle Ω. La première chose à comprendre est que les points K et L sont très peu importants et qu'ils ne sont là que pour créer des triangles rectangles isocèles.

Ainsi, on sait que $[CE]$ est un diamètre du cercle Ω et on obtient donc que $\widehat{EAK} = 90°$. Le triangle EAK est isocèle en A car $AK = AE$ d'après les hypothèses de l'énoncé, en combinant cela avec l'information que $\widehat{EAK} = 90°$ cela montre que $\widehat{KEA} = 45°$. De la même manière le triangle DAL est rectangle isocèle en A et donc

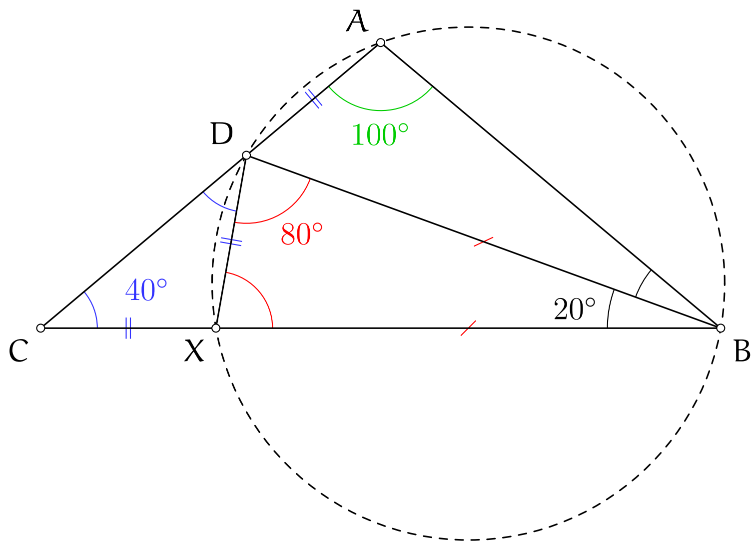
$$\widehat{XDA} = 180° - \widehat{AEX} = 180° - 45° = 180° - \widehat{LDA}.$$

Ce qui montre bien que les points X, D et L sont alignés.

Commentaire des correcteurs : L'exercice est bien traité. En revanche, une quantité significative d'élèves a déployé une longue chasse aux angles quand il était possible d'avoir une solution directe.

Exercice 6. Soit ABC un triangle avec $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 40°$. La bissectrice issue du sommet B coupe la droite (AC) au point D. Montrer que $BD + DA = BC$.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u>



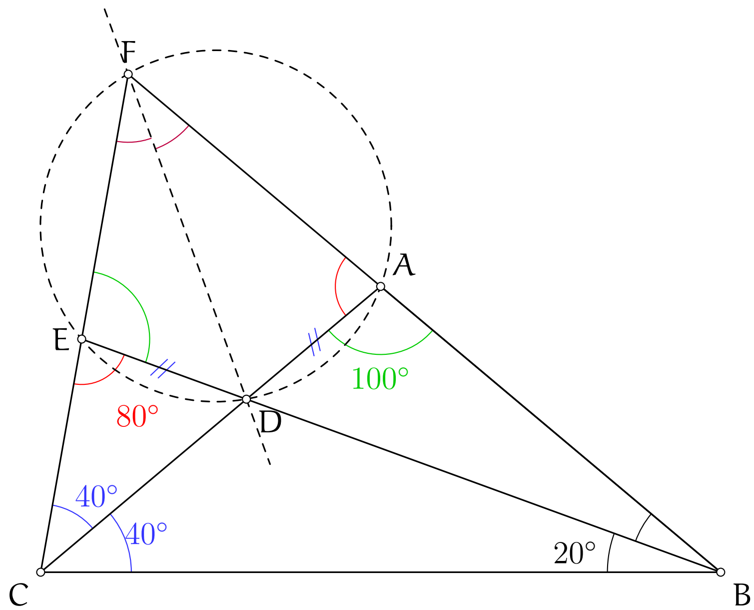
Pour résoudre ce genre d'exercice, une bonne idée est souvent d'essayer de reporter les longueurs qui nous intéressent à des endroits où les calculs seront plus faciles à faire. C'est pour cela que l'on introduit X le point du segment $[BC]$ de telle sorte que $BD = BX$. On veut alors démontrer que $XC = AD$ pour conclure.

Une chasse aux angles rapide montre dans un premier temps que $\widehat{BXD} = 80°$. En effet, on sait par construction du point X que le triangle BDX est isocèle en B, on peut donc calculer $\widehat{BXD} = (180° - 20°)/2 = 80°$. Cela donne ensuite que $\widehat{CDX} = \widehat{DXB} - \widehat{DCX} = 80° - 40° = 40° = \widehat{DCX}$ et donc que le triangle DXC est isocèle en X. Cela montre que $DX = XC$. Résoudre l'exercice revient donc à montrer que $AD = DX$.

En regardant très fort le quadrilatère $BADX$ on remarque que la droite (BD) est la bissectrice de l'angle $\widehat{ABX}$ et comme on veut démontrer que $AD = DX$ on pense naturellement au théorème du pôle sud. Il suffit donc de démontrer que les points B, A, D et X sont cocycliques pour conclure, il s'agit alors d'une deuxième petite chasse aux angles.

En effet, $\widehat{BAD} + \widehat{BXD} = 100° + 80° = 180°$ ce qui montre bien que le quadriltère $ADXB$ est cyclique, puis d'après le théorème du pôle Sud dans le triangle BAX que $AD = DX$. Cela conclut ainsi la preuve de l'exercice.

<u>*Solution alternative de l'exercice 6*</u>



On présente une deuxième solution, correspondant à une deuxième façon de reporter les longueurs à étudier.

Soit E le point de la demi-droite $[BD)$ tel que $BE = BC$. On cherche à montrer que $ED = DA$, de sorte que $BD + DA = BD + DE = BE = BC$. Le triangle EBC est isocèle en B, de sorte que $180° = \widehat{EBC} + \widehat{ECB} + \widehat{CEB} = 20° + 2\widehat{CEB}$. Ainsi, $\widehat{CEB} = 80°$ et $\widehat{ECD} = \widehat{ECB} - \widehat{DCB} = 80° - 40° = 40°$. Le point D est donc le pied de la bissectrice issue du sommet C dans le triangle ECB.

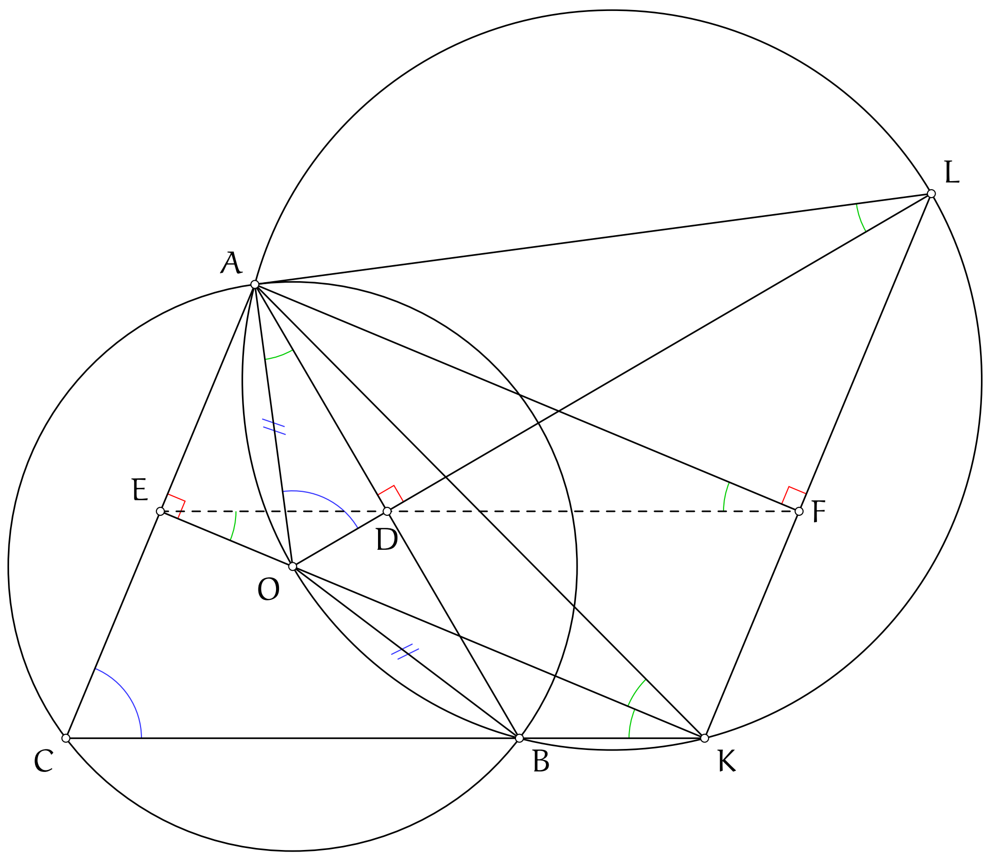
Soit désormais F le point d'intersection des droites (EC) et (AB). L'idée derrière l'introduction de ce point est que l'on connait déjà deux bissectrices de ce triangle : la droite (BD) est la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ et la droite (CD) est la bissectrice de l'angle $\widehat{FCB}$. Ainsi, le point D est le centre du cercle inscrit au triangle FCB. Il est donc sur la bissectrice de l'angle $\widehat{BFC}$.

Or on a $\widehat{DEF} = 180° - \widehat{DEC} = 100°$ et $\widehat{DAF} = 180° - \widehat{DAB} = 80°$, de sorte que $\widehat{DEF} + \widehat{DAF} = 180°$ et les points F, E, D et A sont cocycliques. Le point D est donc sur le cercle circonscrit au triangle FEA et sur la bissectrice de l'angle $\widehat{EFA}$, il s'agit donc du pôle Sud du point F. A ce titre, D est sur la médiatrice du segment $[AE]$ et $DE = DA$ comme annoncé.

__Commentaire des correcteurs :__ L'exercice est globalement bien réussi par les élèves l'ayant tenté : certains ont même trouvé des approches très différentes (mais souvent un peu plus laborieuses) que celles du corrigé. Un certain nombre d'élève ont essayé de calculer toutes les longueurs, en espérant que les expressions trigonométriques se simplifieraient bien à la fin. Il était possible de faire ainsi (le plus simple étant via la loi des sinus), mais attention, en compétition, essayer de calculer pleins de longueurs sans aboutir à rien rapporte habituellement très peu de points. Il faut donc éviter d'aboutir à des calculs trop compliqués.

Exercice 7. Soit ABC un triangle. On note D et E les milieux respectifs des côtés AB et AC. Soit O le centre du cercle circonscrit du triangle ABC. On note K le point d'intersection des droites (OE) et (BC). On note L le deuxième point d'intersection de la droite (OD) avec le cercle circonscrit au triangle OKB. On note F la projection orthogonale de A sur le droite (KL). Montrer que les points D, E et F sont alignés.

Solution de l'exercice 7



En traçant la figure, on s'aperçoit que le point A appartient également au cercle passant O, K et B. On commence par démontrer ce fait.

D'une part, d'après le théorème de Thalès les droites (DE) et (BC) sont parallèles, on a l'égalité des angles alternes-internes :

$$\widehat{OKB} = \widehat{OED}.$$

D'autre part, puisque $\widehat{ODA} = 90° = 180° - \widehat{OEA}$, les points O, E, A et D sont cocycliques, de sorte qu'avec le théorème de l'angle inscrit on obtient

$$\widehat{OAB} = \widehat{OAD} = \widehat{OED} = \widehat{OKB}.$$

Ce qui prouve bien que le point A appartient au cercle passant par O, K et B. Notons que O est le milieu de l'arc AB dans le cercle circonscrit au triangle AKB. Le point O est donc le pôle Sud du point K dans le triangle ABK. En particulier, $\widehat{OKB} = \widehat{AKO}$.

Puisque $\widehat{AFK} = 90° = 180° - \widehat{AEK}$, les points A, F, K et E sont cocycliques. On a donc avec le théorème de l'angle inscrit :

$$\widehat{AFE} = \widehat{AKE} = \widehat{AKO}.$$

D'autre part, puisque $\widehat{AFL} = 90° = \widehat{ADL}$, les points A, D, F et L sont cocycliques. On a alors avec le théorème de l'angle inscrit dans le cercle passant par A, D, F et L puis dans celui passant par A, L, K et O :

$$\widehat{AFD} = \widehat{ALD} = \widehat{ALO} = \widehat{AKO}.$$

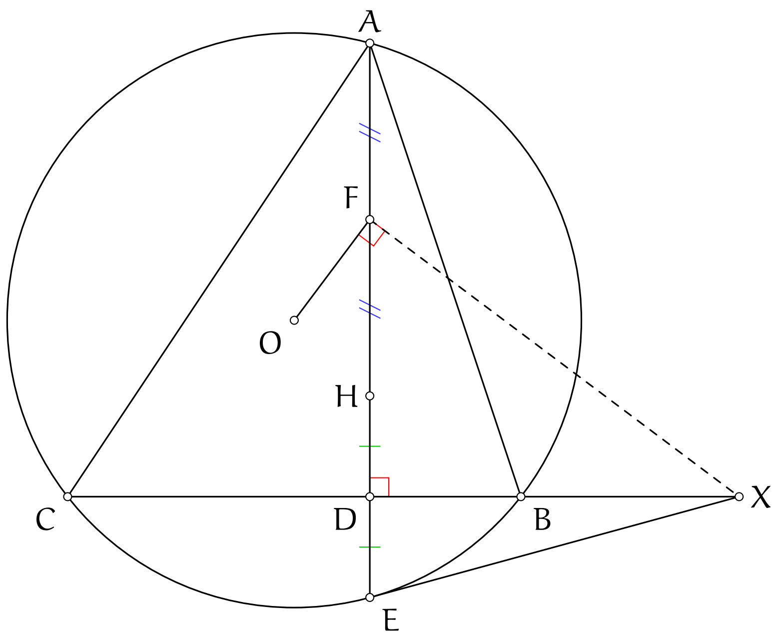
On déduit que $\widehat{AFD} = \widehat{AKO} = \widehat{AFE}$. Les points F, D et E sont donc alignés, comme voulu.

Remarque 1. *Une fois que l'on a montré que le point* A *est sur le cercle passant par* O, K *et* B*, on peut conclure directement en remarquant que les points* E, D *et* F *sont les projetés orthogonaux du point* A *sur les côtés du triangle* OKL*. La propriété de la droite de Simson nous indique que ces points sont alignés. La propriété de la droite de Simson est un classique de la géométrie du triangle, que l'on pourra retrouver dans le polycopié de géométrie pour débutants de la POFM (Exercice 3.10). La fin de la preuve donnée ci-dessus redémontre en substance cette propriété.*

Commentaire des correcteurs : L'exercice, pourtant difficile, est bien traité. Très peu d'élèves ont cependant penser à la droite de Simson pour conclure.

Exercice 8. Soit ABC un triangle dont les angles sont aigus, ω son cercle circonscrit et O le centre de ω. La perpendiculaire issue de A par rapport à (BC) intersecte (BC) en D et ω en E. Soit F un point sur le segment $[AE]$ tel que $2 \cdot FD = AE$. Soit ℓ la perpendiculaire à (OF) passant par F. Montrer que la droite ℓ, la droite (BC) et la tangente à ω en E sont concourantes.

Solution de l'exercice 8



On désire montrer que trois droites sont concourantes. Une stratégie serait donc de considérer le point d'intersection de deux de ces droites et de montrer que ce point appartient à la troisième droite, c'est la stratégie que nous allons adopter ici.

Dans le cas de notre exercice, il était possible de choisir n'importe quelle paire de droites parmi les droites (ℓ), (BC) et la tangente à ω en E et aboutir.

Soit X le point d'intersection de la tangente à ω en E avec la droite (BC). Nous allons montrer que X est sur ℓ en montrant que les droites (FX) et (FO) sont perpendiculaires. Et pour montrer qu'elles sont bien perpendiculaires, on va utiliser la réciproque du théorème de Pythagore en montrant que $XO^2 = OF^2 + FX^2$. On notera dans la suite R le rayon de ω.

D'une part, puisque (XE) est tangente au cercle ω, on a $XO^2 = XE^2 + OE^2 = XE^2 + R^2$. D'après le théorème de Pythagore dans le triangle XDE rectangle en D, $XE^2 = XD^2 + DE^2$. On en déduit que

$$XO^2 = XD^2 + DE^2 + R^2.$$

D'autre part, d'après le théorème de Pythagore dans le triangle FDX rectangle en D, $XF^2 = XD^2 + FD^2$. Pour calculer OF^2, on utilise la formule de la puissance du point F par rapport au cercle ω. En effet, cette formule nous dit que la puissance du point F par rapport au cercle ω vaut $OF^2 - R^2$. Comme d'autre part elle vaut $-FA \times FE$, on déduit que $OF^2 = R^2 - FA \times FE$. On a alors,

$$XF^2 + OF^2 = (XD^2 + FD^2) + (R^2 - FA \times FE).$$

Pour montrer que $XO^2 = XF^2 + FO^2$, il suffit donc de montrer que $DE^2 = FD^2 - FA \times FE$, ou encore $DE^2 + FA \times FE$. Il s'agit alors de faire apparaître l'hypothèse de longueur sur le point F.

Notons H l'orthocentre du triangle ABC. On sait que les points H et E sont symétriques par rapport à la droite (BC) (résultat classique de géométrie du triangle que l'on pourra retrouver dans le polycopié de géométrie pour débutant de la POFM, exercice 4.8). On déduit que $DE = DH$. Mais alors,

$$FH = FD - DH = \frac{1}{2}(AE - HE) = \frac{1}{2}AH.$$

En particulier, F est le milieu du segment $[AH]$. Il ne reste plus qu'à calculer $DE^2 + FA \times FE$ de la manière suivante

$$\begin{aligned} DE^2 + FA \times FE &= DE^2 + FA \times (FH + \underbrace{DH + DE}_{=2DE}) \\ &= DE^2 + FA^2 + 2DE \times FA \\ &= (FA + DE)^2 \\ &= (FH + DH)^2 = FD^2. \end{aligned}$$

Ce qui conclut bien que $XO^2 = XF^2 + FO^2$ et termine la preuve du problème.

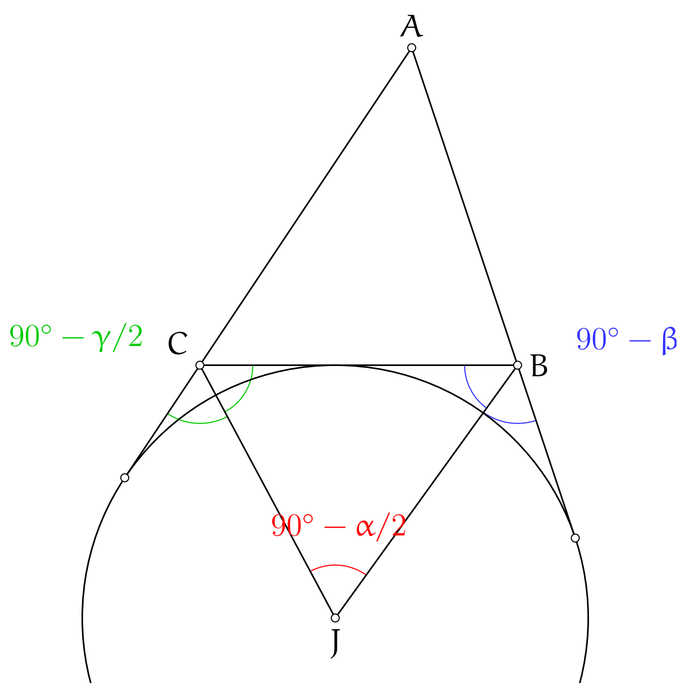
Commentaire des correcteurs : L'exercice était très difficile, et peu d'élèves ont réussi à avoir de bonnes avancées. L'approche la plus élémentaire était d'introduire le milieu de $[BC]$, puis de remarquer un trapèze isocèle (ou un parallélogramme), pour pouvoir entamer une chasse aux angles.

Exercice 9. Soit ABC un triangle équilatéral. Soit X un point de la droite (BC) différent de B et C. Soient Y et Z deux points sur les droites (AB) et (AC) de telle sorte que les deux droites (BZ) et (CY) sont parallèles à la droite (AX). La droite (XY) intersecte la droite (AC) en M et la droite (XZ) intersecte la droite (AB) en N. Montrer que la droite (MN) est tangente au cercle inscrit de ABC.

Solution de l'exercice 9 On commence par énoncer deux lemmes qui vont être utiles dans la suite. Si l'utilité du premier lemme sautera aux yeux du lecteur l'intérêt du deuxième lemme paraîtra sans doute moins clair.

Lemme 1. *Soit ABC un triangle et ω le cercle A-exinscrit de ce triangle, on note J le centre de ω et α l'angle en A. Alors, $\widehat{BJC} = 90 - \alpha/2$, de plus il existe une forme d'unicité. Soit X un point de la droite (AB), si on effectue une rotation de la droite (JX) autour de J par un angle $90 - \alpha/2$ et que l'on note par Y l'intersection de cette droite avec la droite (AB), alors la droite (YX) est tangente à ω.*

Remarque 2. *Le lecteur attentif remarquera que la rotation d'angle $90 - \alpha/2$ depuis J n'est pas unique, il faut faire attention au sens dans lequel on effectue la rotation (en fait il faut travailler avec des angles orientés).*



Démonstration.
On remarque dans un premier temps que l'unicité découle de la première partie du lemme. En effet, le point Y est défini de manière unique et vérifie alors bien la condition $\widehat{XJY} = 90 - \alpha/2$. Il ne nous reste plus qu'à démontrer la première partie du lemme. On note β et γ les angles en B et C. Alors, (BJ) et (CJ) sont des bissectrices extérieures donc

$$\widehat{JBC} = (180 - \beta)/2 = 90 - \beta/2$$

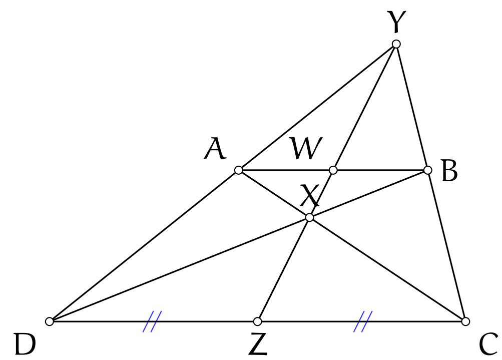
et

$$\widehat{JCB} = 90 - \gamma/2.$$

Comme les angles dans le triangle BCJ ont pour somme 180 il faut donc que $\widehat{BJC} = 90 - \alpha/2$ comme annoncé.

Lemme 2. *Soit* $ABCD$ *un trapèze isocèle avec* (AB) *parallèle à* (CD). *On note* X *le point d'intersection des diagonales* (AC) *et* (BD) *ainsi que* Y *le point d'intersection des droites* (AD) *et* (BC). *La droite* (XY) *intersecte la droite* (CD) *au point* Z. *Le point* Z *est alors le milieu du segment* $[DC]$.

Remarque 3. *Il est possible que les droites* (AD) *et* (BC) *soient parallèles dans ce cas on considère le point* Y *"à l'infini" (c'est en principe une notion bien définie mais on ne le fait pas proprement ici) dans la même direction que la droite* (AD) *et donc de la droite* (BC) *par hypothèses. Dans ce cas une droite qui passe par* Y *est juste une droite qui est parallèles à* (AD) *(et donc à* (BC)*). Moralement, passer par un point à l'infini c'est forcer une direction.*



Démonstration.
Il existe une preuve naturelle de ce lemme en utilisant des outils de la géométrie projective mais on va donner ici une preuve élémentaire. Soit W l'intersection de la droite (XY) avec la droite (AB), on peut alors écrire les identités suivantes qui découlent du théorème de Thalès.

Comme les trois droites (AC), (BD) et (WZ) sont concourantes en Y et les droites (AB) et (CD) sont parallèles, on a l'égalité

$$\frac{AW}{WB} = \frac{CZ}{ZD},$$

où l'on a pris soin des orientations de longueurs (ici les deux côtés de l'équation sont négatifs). De la même manière les trois droites (AD), (BC) et (WZ) sont concourantes en Z et que les droites (AB) et (CD) sont parallèles, on a donc l'égalité

$$\frac{BW}{WA} = \frac{CZ}{ZD}.$$

En combinant ces deux égalités on obtient

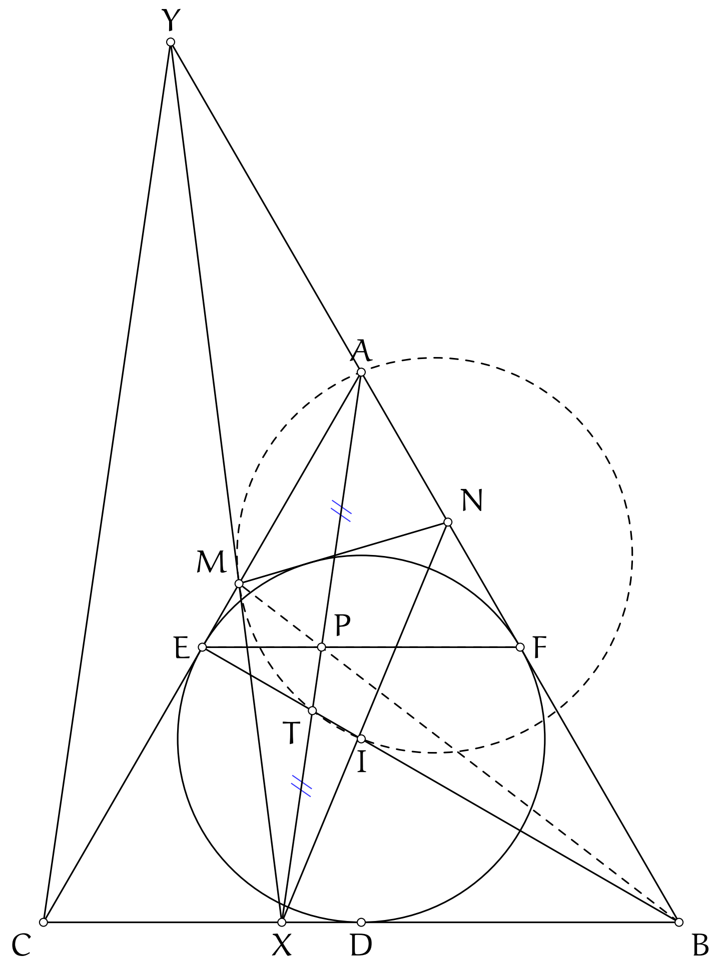
$$\left(\frac{CZ}{ZD}\right)^2 = 1.$$

Et donc, en prenant soin des signes

$$\frac{CZ}{ZD} = -1.$$

Ce qui conclut la preuve du lemme.

Revenons désormais au problème.



On note D, E et F les points de tangences du cercle inscrit dans le triangle ABC. On va montrer un résultat a priori plus fort. Si on note $x = \widehat{CAX}$ on va démontrer que $\widehat{MIE} = x$. Cela conclurait alors car par symétrie on aurait $\widehat{MIF} = \widehat{BAX} = 60 - x$ et donc $\widehat{MIN} = 120 - (60 - x) - x = 60$ ce qui conclurait d'après le Lemme 1.

Soit T le point d'intersection des droites (AX) et (BE), l'égalité $\widehat{MIE} = \widehat{EAT}$ est équivalente à la propriété que les points A, M, I et T sont cocycliques. Une chasse aux angles immédiate montre que cette propriété est encore équivalente à ce que les droites (MT) et (AB) soient parallèles (par exemple on peut utiliser des parallèles/antiparallèles par rapport aux droites (EB) et (EA)). On note de plus P l'intersection des droites (MB) et (AX).

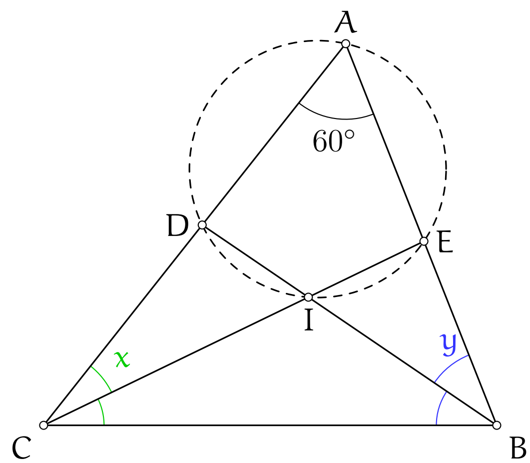
On applique alors le Lemme 2 dans un premier temps au trapèze $AXCY$ pour montrer que le point P et le milieu du segment $[AX]$. Ainsi, d'après la droite des milieux on a F, P et E alignés. On remarque alors que dans le quadrilatère $AMTB$ avec P l'intersection des droites (AT) et (MB) ainsi que E l'intersection des droites (AM) et (BT), la droite (EP) passe par le milieu du segment $[AB]$, il suit que l'on peut alors appliquer la réciproque du Lemme 2 (il y a une unicité laissée au lecteur) pour montrer que le quadrilatère $AMTB$ est bien un trapèze avec $(AB)//(MT)$ ce qui conclut.

<u>Commentaire des correcteurs :</u> L'exercice était très difficile. Une poignée d'élèves en est venue à bout, à l'aide de techniques essentiellement calculatoires (et parfois avancées) largement différentes de la solution proposée par le corrigé.

Exercices Seniors

Exercice 10. Soit ABC un triangle avec $\widehat{BAC} = 60°$. Soient D et E les pieds des bissectrices issues respectivement des sommets B et C. Soit I le point d'intersection des droites (BD) et (CE). Montrer que les points A, I, D et E sont cocycliques.

Solution de l'exercice 10



On va faire une chasse aux angles pour démontrer que $\widehat{IDA}+\widehat{IEA} = 180°$. Notons $x = \widehat{ACE} = \widehat{ECB}$ ainsi que $y = \widehat{ABD} = \widehat{DBC}$. Comme la somme des angles d'un triangle vaut $180°$ on a ainsi

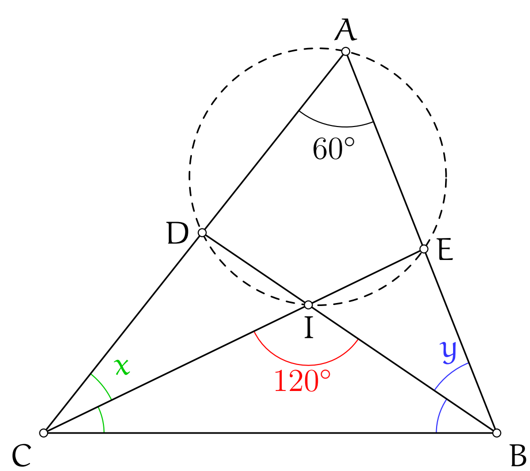
$$\begin{aligned} 180° &= \widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} \\ &= 60° + 2y + 2x. \end{aligned}$$

Ce qui implique que $x + y = 60°$. On peut donc exprimer tous les angles de la figure en fonction de x et en particulier les deux angles qui nous intéressent, $\widehat{IDA}$ et $\widehat{IEA}$. On a $\widehat{IDA} = \widehat{BDA} = 180° - 60° - y$ ainsi que $\widehat{IEA} = \widehat{CEA} = 180° - 60° - x$. Donc la somme vaut

$$\widehat{IDA} + \widehat{IEA} = 180° - 60° - y + 180° - 60° - x = 180° + 60° - x - y = 180°.$$

Ce qui est l'égalité voulue.

Solution alternative de l'exercice 10

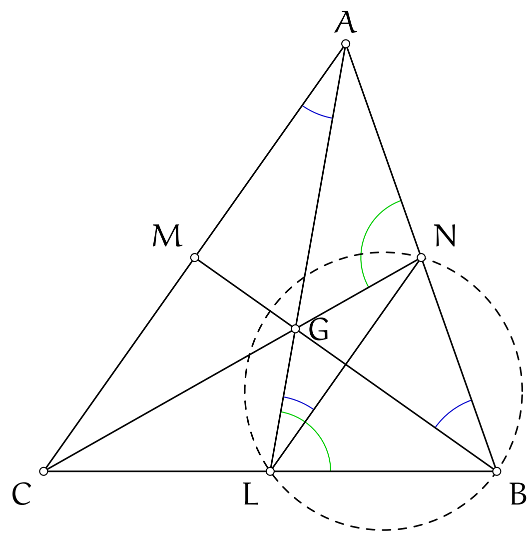


Une fois que l'on a obtenu que $x + y = 60°$, on peut conclure d'une autre façon, en démontrant que $\widehat{DAE} + \widehat{DIE} = 180°$. En effet, dans le triangle BCI, on a $\widehat{BIC} = 180° - x - y = 120°$, de sorte que $\widehat{DIE} + \widehat{DAE} = \widehat{BIC} + \widehat{BAC} = 120° + 60° = 180°$.

Commentaire des correcteurs : Exercice très bien réussi. Il faut bien penser à faire une figure propre et à bien détailler son raisonnement.

Exercice 11. Soit ABC un triangle, L, M et N les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. On suppose que $\widehat{ANC} = \widehat{ALB}$. Montrer que $\widehat{CAL} = \widehat{ABM}$.

Solution de l'exercice 11



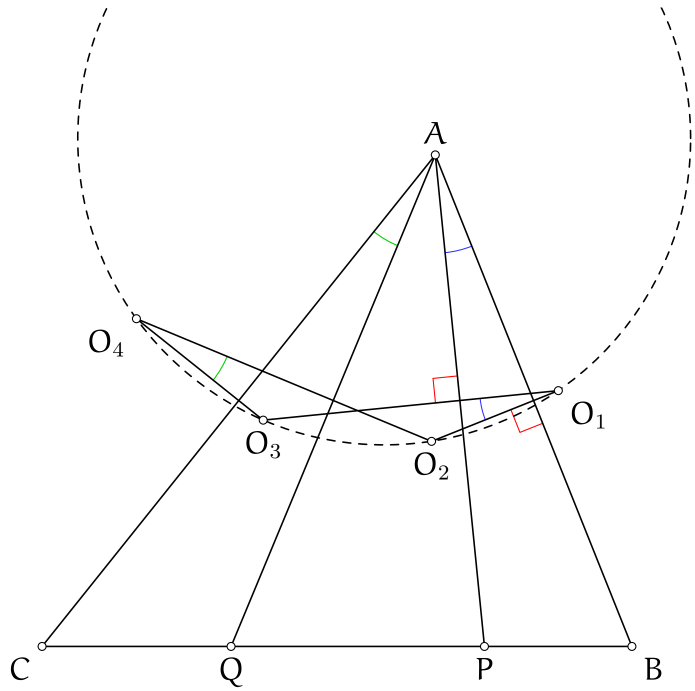
On essaie dans un premier temps d'interpréter la condition de l'énoncé $\widehat{ANC} = \widehat{ALB}$. Pour cela on commence par introduire G le centre de gravité du triangle ABC (on rappelle que c'est aussi l'intersection des trois médianes (AL), (BM) et (CN)). La condition de l'énoncé revient à dire que le quadrilatère $NGBL$ est cyclique.

On a ainsi $\widehat{CAL} = \widehat{ALN}$ par angles alternes-internes. Puis comme le quadrilatère $NGBL$ est cyclique on a $\widehat{CAL} = \widehat{ALN} = \widehat{GLN} = \widehat{GBN} = \widehat{ABM}$, ce qui conclut.

Commentaire des correcteurs : L'exercice est bien résolu. Une poignée d'élèves a cru que l'énoncé impliquait forcément que le triangle était isocèle voire même équilatéral, mais il n'en est rien.

Exercice 12. Soit ABC un triangle acutangle. Soient P et Q deux points sur le segment $[BC]$. On note respectivement O_1, O_2, O_3 et O_4 les centres des cercles circonscrits des triangles ABP, ABQ, ACP et ACQ. Montrer que les points O_1, O_2, O_3 et O_4 sont cocycliques si et seulement si $\widehat{BAP} = \widehat{QAC}$.

Solution de l'exercice 12



La figure comporte beaucoup d'objets on va donc essayer de la simplifier un peu. On remarque donc dans un premier temps qu'il y a beaucoup d'axes radicaux (les droites (AB), (AP), (AQ) et (AC)) sur la figure et donc beaucoup d'angles droits avec les centres des cercles. On a les perpendicularités suivantes :

$$(O_1O_2) \perp (AB),\ (O_1O_3) \perp (AP),\ (O_2O_4) \perp (AQ),\ (O_3O_4) \perp (AC).$$

En particulier, on veut démontrer une relation de cocyclicité et il faut pour cela se préoccuper d'angles entre droites (et on n'a pas besoin de plus d'informations). En particulier :

$$(O_1O_3, O_1O_2) = (O_1O_3, AP) + (AP, AB) + (AB, O_1O_2) = -\frac{\pi}{2} + (AP, AB) + \frac{\pi}{2} = (AP, AB).$$

De la même manière,

$$(O_4O_3, O_4O_2) = (AC, AQ)$$

Ainsi,

$$(O_1O_2, O_1O_3) = (O_2O_4, O_3O_4) \quad (O_1O_2O_3O_4 \text{ cyclique}).$$

$$\Updownarrow$$

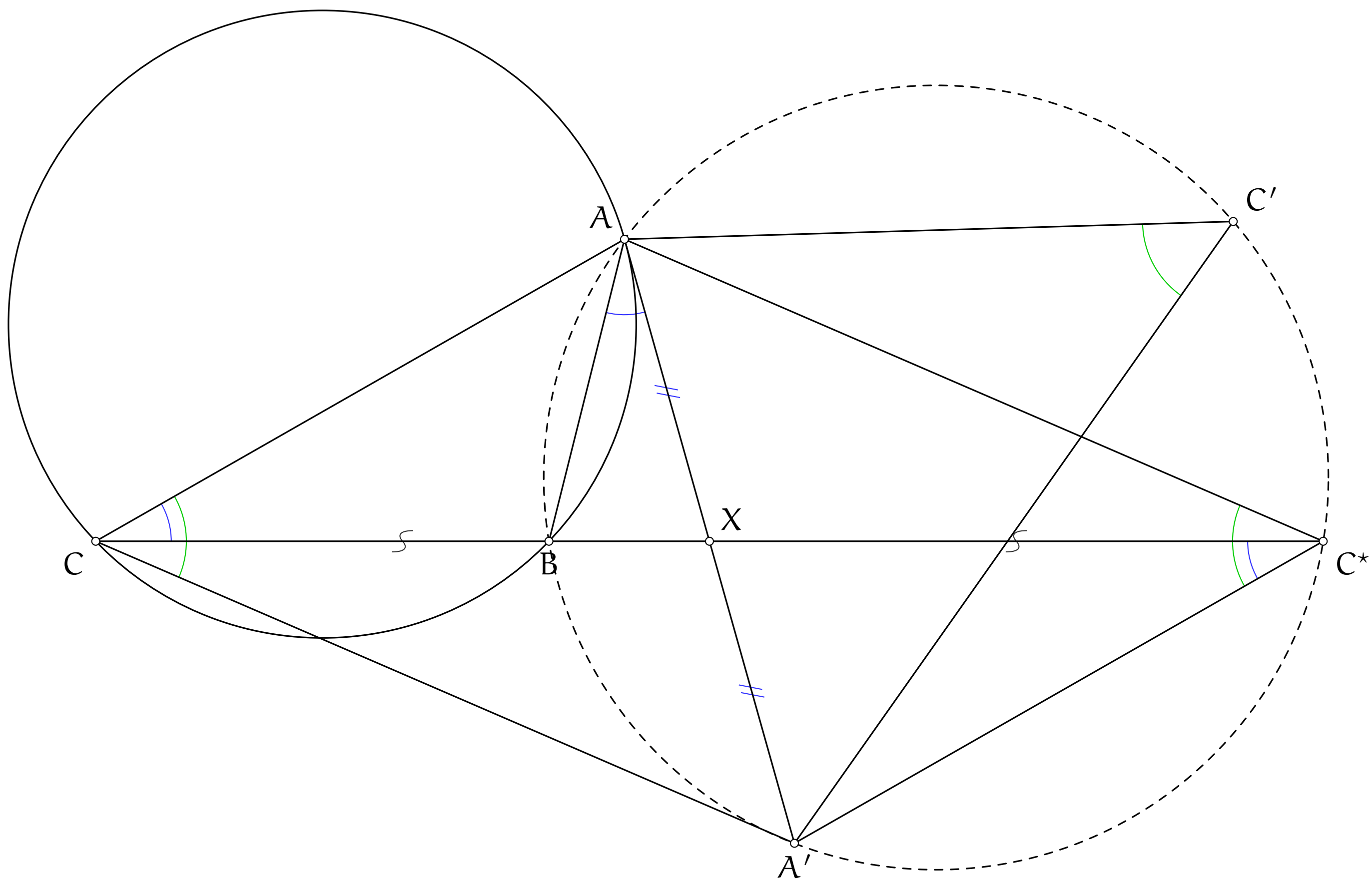
$$(AB, AP) = (AQ, AC), \quad (\widehat{BAP} = \widehat{QAC}).$$

Ce qui conclut.

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été en général bien résolu par les élèves qui l'ont tenté. Il y a des approches plus directes que d'autres. Le corrigé ci-dessus de la POFM donne un bon exemple de comment on pouvait arriver au résultat avec un minimum d'effort et chasse aux angles.

Exercice 13. Soit ABC un triangle. Soit t la tangente en A au cercle circonscrit du triangle ABC. On note A' le point de t de telle sorte que la droite (BC) coupe le segment $[AA']$ en son milieu. On note C' le symétrique de C par rapport à t. Montrer que les points B, A, C' et A' sont cocycliques.

Solution de l'exercice 13



On note X le point d'intersection des droites (AA') et (BC). On note de plus $C^\star$ le symétrique de C par rapport au point X. On va montrer que les points B, A, C' et A' sont cocycliques sur un cercle qui contient de plus le point $C^\star$. On commence par utiliser les longueurs et la puissance du point depuis X.

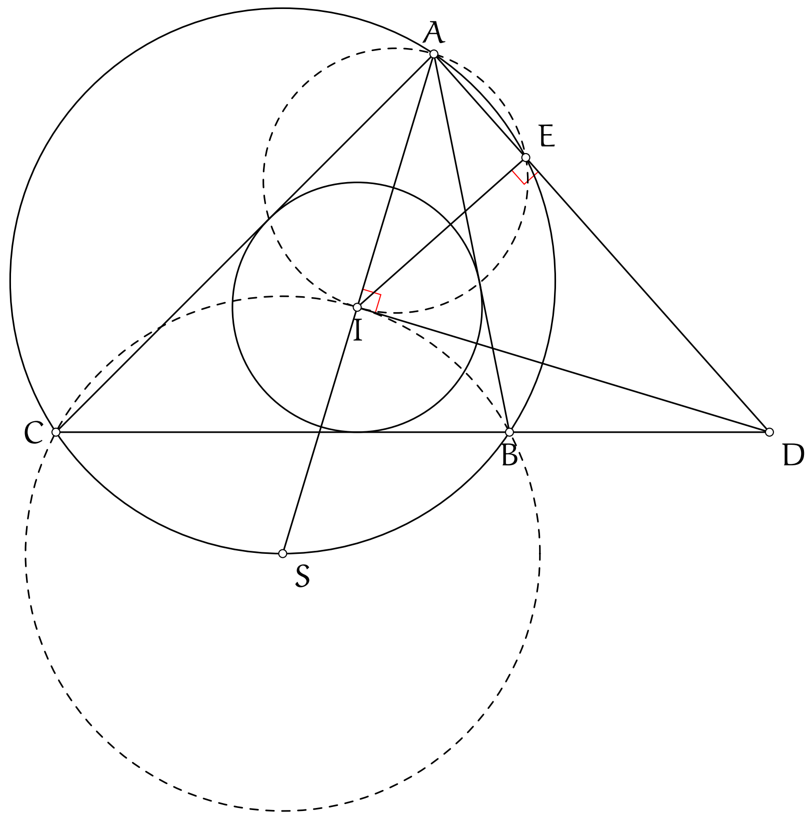
$$\begin{aligned} XA \cdot XA' &= -XA^2 \\ &= -XB \cdot XC \\ &= XB \cdot XC^\star. \end{aligned}$$

Ce qui montre bien que les points B, A, $C^\star$ et A' sont cocycliques. Il ne reste plus qu'à placer le point C' sur le cercle. Pour cela on remarque que $\widehat{AC'A'} = \widehat{ACA'}$ par symétrie puis que $\widehat{AC^\star A'} = \widehat{ACA'}$ comme le quadrilatère $ACA'C^\star$ est une parallèlogramme. Cela conclut donc que $\widehat{AC'A'} = \widehat{AC^\star A'}$. Et enfin que les points B, A, $C^\star$, C' et A' sont cocycliques.

Commentaire des correcteurs : L'exercice est bien réussi en général. Une chasse aux angles frontale ne suffisait pas. En général n'importe quelle autre idée supplémentaire permettait d'aboutir avec un peu d'astuce, ce qui explique la grande variété de solutions (triangles semblables, puissance d'un point, introduction d'un nouveau point, et même quelques solutions à partir d'inversions ou en analytique). Certains élèves se sont trompés en lisant l'énoncé.

Exercice 14. Soit ABC un triangle non isocèle en A et I le centre de son cercle inscrit. On note D le point de la droite (BC) tel que $\widehat{DIA} = 90°$. On note E le pied de la hauteur issue de I dans le triangle ADI. Montrer que le point E est sur le cercle circonscrit du triangle ABC.

<u>*Solution de l'exercice 14*</u>



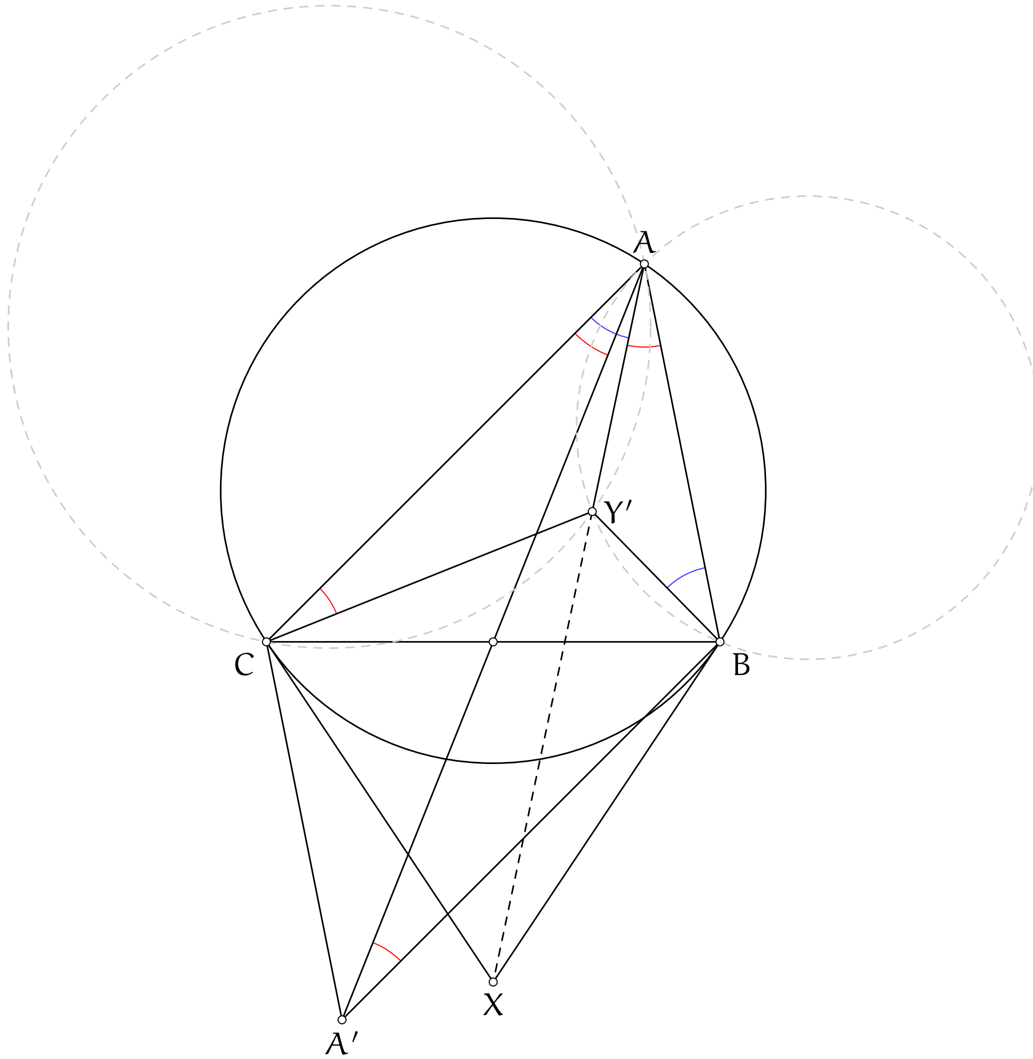
On introduit Ω le cercle circonscrit du triangle ABC ainsi que ω le cercle antarctique de centre S, le milieu de l'arc BC ne contenant pas A. ω passe ainsi par B, C et I. On note de plus γ le cercle de diamètre $[AI]$, ce cercle recoupe Ω en A et H.

Regardons les axes radicaux des cercles ω, Ω et γ. Comme les cercles γ et Ω sont tangents (leurs centres se trouvent sur la bissectrice depuis A dans le triangles ABC) leur axe radical est la droite perpendiculaire à (AC) passant par I soit la droite (DI). Les deux autres axes radicaux sont (BC) et (AH). Comme les axes radicaux sont concourants, on a que la droite (AH) passe par D, donc les points A, H et D sont alignés. Le cercle γ a pour diamètre $[AI]$ donc on a $\widehat{AHI} = 90°$, ce qui montre que H est le pied de la hauteur issue de I dans le triangle DAI, soit $H = E$. Mais par définition H est sur Ω, ce qui conclut.

<u>*Commentaire des correcteurs :*</u> Le problème a été beaucoup traité et en général bien résolu, mais très peu d'élèves ont vu la solution directe adoptant le point de vue que D est le centre radical de trois cercles (ou même simplement qu'il est sur la tangente commune de deux cercles).

Exercice 15. Soit ABC un triangle et Ω son cercle circonscrit. On note X le point d'intersection des tangentes à Ω en B et C. On note φ l'angle $\widehat{BAX}$ et μ l'angle $\widehat{XAC}$. On note Y le point de la droite (AX) tel que $\widehat{ACY} = \varphi$. Montrer que $\widehat{ABY} = \mu$.

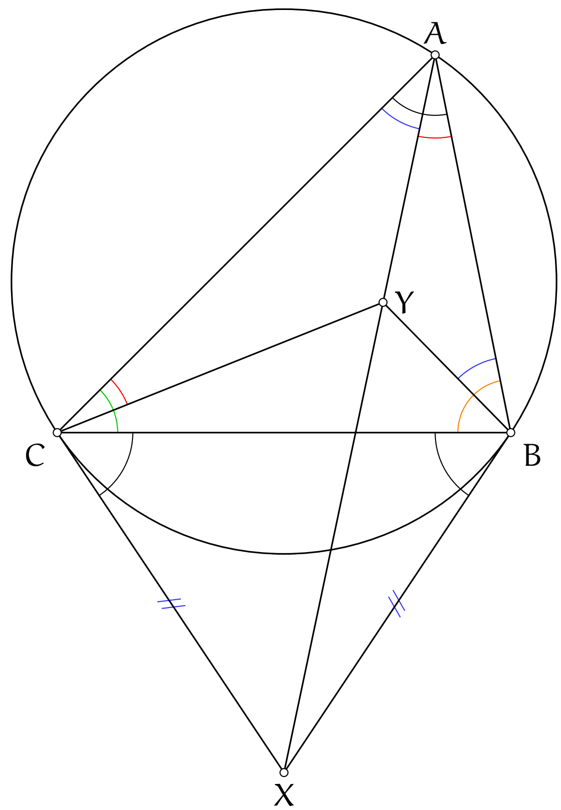
Solution de l'exercice 15



On redéfinit les points de l'énoncé de la manière qui nous arrange. On note ω_1 (resp. ω_2) le cercle passant par A, B (resp. A et C) et tangent en A à (AC) (resp. (AB)). On note Y' l'intersection des cercles ω_1 et ω_2 autre que A. Pour conclure il suffit de montrer que les points Y', A et X sont alignés. En effet, on a par théorème de l'angle tangent que $\widehat{BAY'} = \widehat{ACY'}$ ainsi que $\widehat{CAY'} = \widehat{ABY'}$.

Regardons maintenant $\mathcal{I}$, l'inversion de centre A composée avec une symétrie d'axe la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ qui échange B et C (il s'agit de ce que l'on appelle une involution projective). Les cercles ω_1 et ω_2 sont alors envoyés respectivement sur les droites parallèles à (AB) et (AC) passant par C et B. Le point Y' est donc envoyé sur le point A', le symétrique de A par rapport au milieu de $[BC]$ par l'involution $\mathcal{I}$, la droite (AY') est échangée avec la médiane (AA') dans le triangle ABC. Comme la droite (AX) est la symédiane on a donc que la droite (AY') et la droite (AX) sont la même droite ce qui conclut.

Solution alternative de l'exercice 15



On pose $\alpha = \widehat{BAC}$, $\beta = \widehat{ABC}$ et $\gamma = \widehat{BCA}$. On va utiliser un autre outil classique lorsque qu'il y a des symédianes en jeu, la *chasse aux sinus*. On remarque dans un premier temps que d'après le théorème de l'angle tangent :

$$\widehat{BCX} = \widehat{CBX} = \widehat{BAC} = \alpha.$$

Le triangle BCX est donc isocèle en X. On a de plus $\widehat{ABX} = \alpha + \beta = 180° - \gamma$. De même, on a $\widehat{ACX} = 180° - \beta$. En appliquant la loi des sinus dans le triangle ABX, puis dans le triangle ACX, on trouve

$$\frac{\sin(\gamma)}{\sin(\varphi)} = \frac{\sin(180° - \gamma)}{\sin(\varphi)} = \frac{AX}{BX} = \frac{AX}{CX} = \frac{\sin(\beta)}{\sin(\mu)}.$$

En appliquant la loi des sinus cette fois-ci dans le triangle ABY puis dans le triangle ABC, on a

$$\frac{YC}{YA} = \frac{\sin(\mu)}{\sin(\varphi)} = \frac{\sin(\beta)}{\sin(\gamma)} = \frac{AC}{BC}.$$

Cela montre que les triangles BYA et AYC sont semblables. En effet, ils ont un angle φ en commun et un rapport en commun

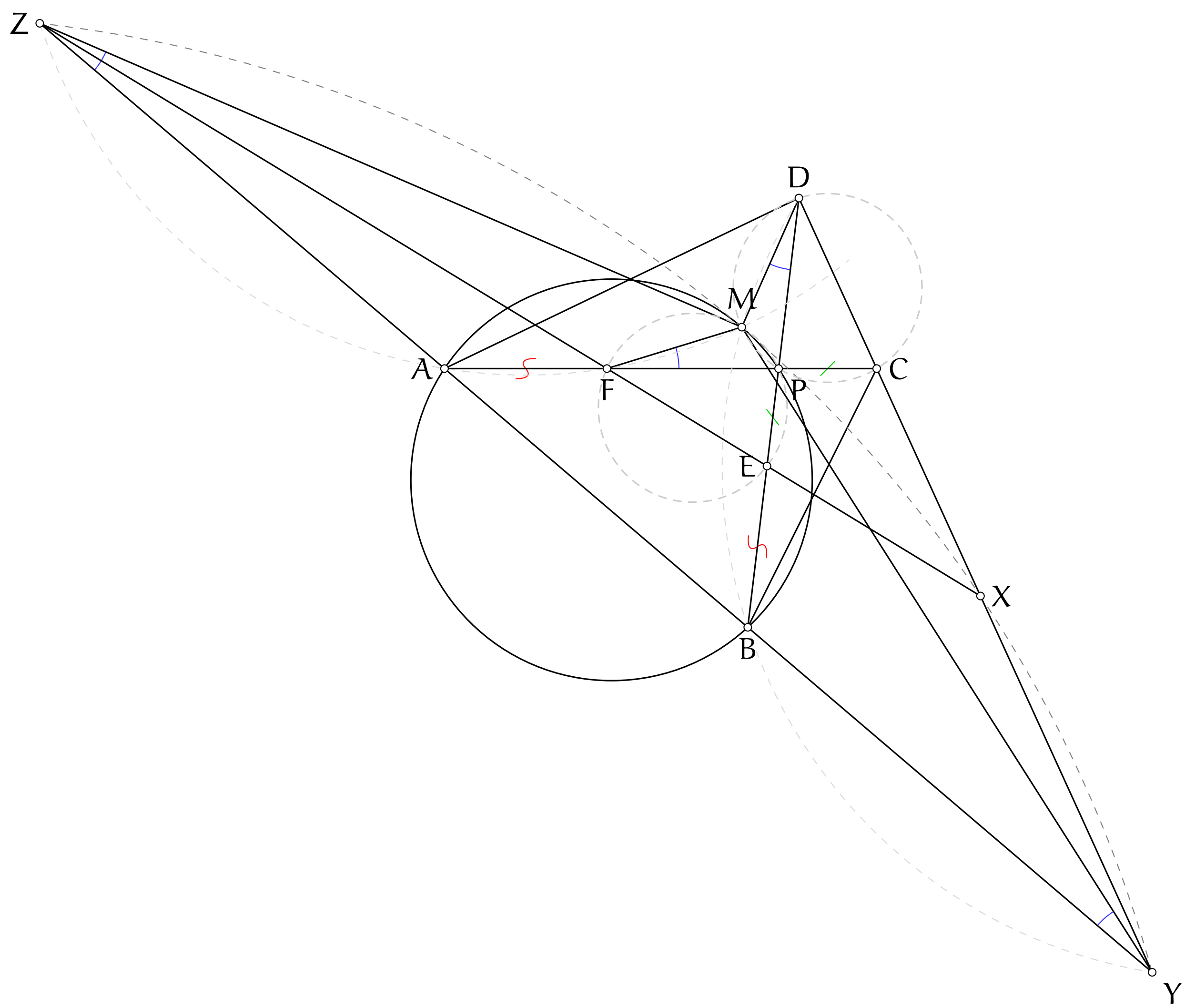
$$\frac{BA}{YA} = \frac{AC}{CY}.$$

Cette relation de similitude implique que $\widehat{ABY} = \widehat{YAC}$, ce qui conclut.

Commentaire des correcteurs : L'exercice est bien résolu. Il admettait en fait une solution élémentaire en chasse aux angles, qui a échappé à la vigilance des concepteurs du sujet mais aussi à plusieurs élèves qui ont développé l'arsenal de propriétés connues autour de la symédiane, victimes de la même déformation que les concepteurs du sujet.

Exercice 16. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe tel que $AC = BD$ et tel que les côtés AB et CD ne sont pas parallèles. Soit P le point d'intersection des diagonales (AC) et (BD). Soient E et F des points respectivement sur les segments $[BP]$ et $[AP]$ tels que $PC = PE$ et $PD = PF$. Montrer que le cercle circonscrit au triangle formé par les droites (AB), (CD) et (EF) est tangent au cercle circonscrit au triangle ABP.

<u>*Solution de l'exercice 16*</u>



On note dans un premier temps X l'intersection des droites (CD) et (FE), Y l'intersection des droites (AB) et (CD) ainsi que Z l'intersection des droites (AB) et (FE).

La première idée de cet exercice est de considérer un point de Miquel (pour savoir ce qu'est un point de Miquel on fait référence au polycopié de T. Budzinski, *Transformations Géométriques*, Théorème 4.14), que l'on notera M et qui intervient naturellement dans la configuration. En effet, les triangles plats AFC et BED sont isométriques. Ainsi si on considère la similitude directe qui envoie le segment $[AF]$ sur le segment $[EB]$ il s'agit d'une rotation (comme $AF/EB = 1$) et cette rotation envoie donc également le point C sur le point D. Comme annoncé, on note M le centre de la rotation (le point de Miquel). M est donc le point de Miquel des quadrilatères complets suivants : $ABFE$, $ABCD$ et $FECD$. En principe l'ordre des points importe comme il y a 3 classes d'ordre pour 4 mêmes points qui donnent 3 points de Miquel différents pour les distinguer on adopte ici les notations du Théorème 4.14 cité précédemment.

Le point M est donc sur les cercles circonscrits de plein de triangles et en particulier sur le cercle circonscrit des ABP, ZAF et BDY, c'est donc un bon candidat pour être notre point de tangence. Dans la suite on va donc montrer que M est également sur le cercle circonscrit au triangle XYZ et que c'est le point de tangence entre les cercles circonscrits des triangles XYZ et ABP.

On remarque maintenant que le quadrilatère $DCEF$ est un trapèze isocèle avec $(CE)//(DF)$. M étant le point d'intersection des cercles circonscrits à PFE et PCD autre que P, on en déduit que M est sur l'axe de symétrie du trapèze $FDCE$. M est donc sur la bissectrice extérieure issue de P dans les triangles PFE et PCD, en particulier M est le pôle Nord de ces triangles. Par les propriétés classique du point de Miquel, M est également le centre de la similitude directe qui envoie F sur A et E sur B. Donc $MFE \sim MAB$, en particulier $MA = MB$ et M est alors le pôle Nord dans le triangle ABP.

Pour conclure il suffit de montrer que M est le pôle Nord dans le triangle XYZ. On montre dans un premier temps que cet assertion implique bien la fin de l'exercice.

Si M est le pôle Nord du triangle XYZ, alors il est bien sur le cercle circonscrit de ce triangle. Soit t (resp. t') la tangente au cercle circonscrit de ABP (resp. XYZ) en M. On voudrait montrer que t et t' sont la même droite. Comme M est le pôle Nord, on a $t//(AB)$. Mais de la même manière $t'//(ZY)$. Ce qui montre bien que $t//t'$ et donc qu'il s'agit de la même droite.

Pour conclure on va montrer que M est sur la médiatrice du segment $[ZY]$. Comme M est sur la bissectrice extérieure issue de X (car M est sur la mdiatrice commune de (DF) et (EC) et les droites (EF) et (DC) se coupent en X), cela conclurait bien. Il suffit donc de montrer que $(MZ, MA) = (MB, MY)$. Or on a plein de cocyclicités qui apparaissent avec le point de Miquel et le trapèze $DFEC$.

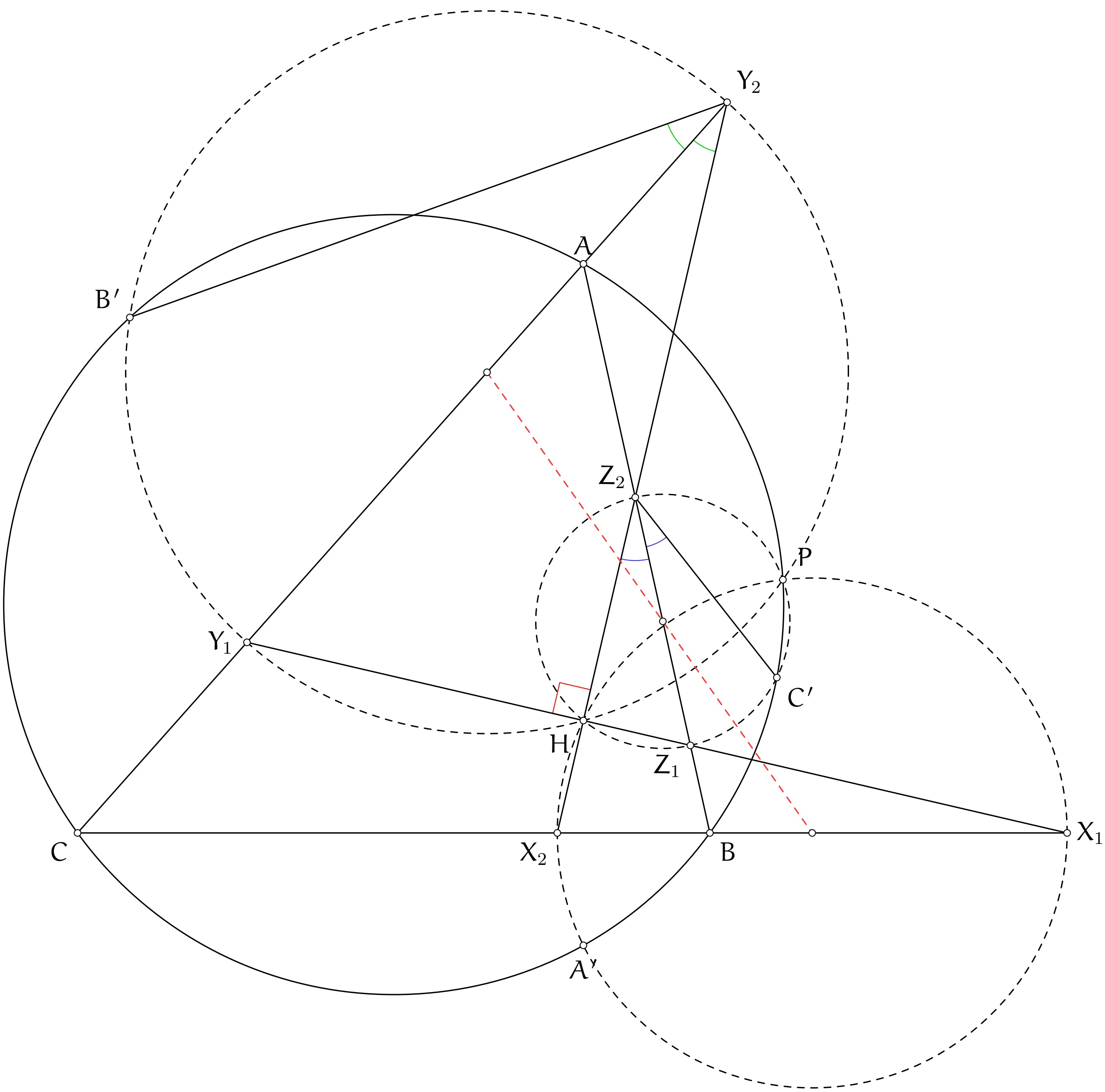
$$\begin{aligned}
(MZ, MA) &= (FZ, FA) && (ZAFM \text{ cyclique}) \\
&= (FE, FC) && (\text{angles opposés}) \\
&= (DE, DC) && (FECD \text{ cyclique}) \\
&= (MB, MY) && (MBYD \text{ cyclique}).
\end{aligned}$$

Ce qui conclut.

Commentaire des correcteurs : Le problème est bien résolu par les élèves qui l'ont abordé. Les élèves ont pour la plupart utilisé les propriétés du point de Miquel de l'un ou l'autre des divers quadrilatères (tous les points de Miquel étaient confondus ici). Relativement peu d'élèves ont complété cette notion avec la notion de pôle Nord, qui aidait ici à simplifier les raisonnements (beaucoup d'élèves ont en fait redémontré l'une ou l'autre des propriétés à la main via des chasses aux angles plus ou moins compliquées).

Exercice 17. Soit ABC un triangle et H son orthocentre. On note ℓ_1 et ℓ_2 deux droites passant par H et perpendiculaire entre elles. On note X_1, Y_1 et Z_1 les points d'intersection de ℓ_1 avec les droites (BC), (CA) et (AB) respectivement. On note également X_2, Y_2 et Z_2 les points d'intersection de ℓ_2 avec les droites (BC), (CA) et (AB) respectivement. Montrer que les milieux des segments $[X_1X_2]$, $[Y_1Y_2]$ et $[Z_1Z_2]$ sont alignés.

Solution de l'exercice 17



L'approche présentée dans ce corrigé est longue, mais purement élémentaire et les nombreuses étapes doivent toutes paraître naturelles.

Première étape : les milieux. L'introduction d'un milieu dans un exercice est toujours une épine dans notre pied car cette condition est difficile à utiliser avec notre outil favori : la chasse aux angles. On peut donc se demander comment retirer cette épine ; ici, une solution doit paraître raisonnable. Du fait de l'angle droit $\widehat{X_1HX_2}$, le milieu de $[X_1X_2]$ est naturellement le milieu du diamètre du cercle circonscrit au triangle HX_1X_2, donc le centre de ce cercle, qui sera maintenant nommé Γ_A.

Sur notre figure, on trace donc trois cercles Γ_A,Γ_B et Γ_C, où Γ_B et Γ_C sont définis de manière similaire. On peut ainsi arrêter de penser aux milieux comme des milieux et on y pense comme des centres de cercles.

Deuxième étape : Effacer les centres. Manipuler des centres de cercles est souvent plus agréable que manipuler des milieux de segments, mais ce n'est pas encore tout à fait satisfaisant. En traçant nos trois nouveaux cercles, on constate qu'ils ont l'air de se couper à nouveau en un autre point que H. Devant une telle observation, une première interrogation est de se demander ce qu'une telle information impliquerait par symétrie. Par exemple, sur ma figure, peut-être que B semble se trouver sur Γ_A, mais si c'était toujours le cas, par symétrie, C devrait aussi se situer sur Γ_A, et sur ma figure ce n'est pas du tout le cas, ma conjecture est donc à éliminer.

Ici pas de tel argument, la concourance des trois cercles n'entraîne rien par symétrie. Mieux, regardons maintenant ce qui découlerait de la concourance de ces trois cercles en un point P. Les trois centres seraient sur la médiatrice de $[HP]$, corde commune aux trois cercles, ce qui conclurait ! Dans l'autre sens, si les trois centres sont alignés, alors le symétrique de H par rapport à la droite des trois centres est sur chaque cercle, ils se recoupent donc bien. A la place de l'alignement des trois centres, on peut montrer la concourance des trois cercles, une propriété a priori bien plus agréable !

Interlude : Comment savoir si on est allé dans la bonne direction ? C'est généralement une question difficile mais ici on peut répondre par l'affirmative car on peut effacer des morceaux de la figure (ici les trois milieux) et la simplifier. On a tracé le triangle, les deux droites et les 6 points d'intersection, préfère-t-on tracer trois milieux et montrer leur alignement ou trois cercles et montrer leur concourance ? La deuxième option.

Même si les deux options semblent similaires en complexité (ce qui n'est pas la difficulté), un problème de géométrie olympique maximise sa difficulté par rapport à sa complexité donc un énoncé équivalent et de complexité comparable sera presque toujours plus facile, sinon cet énoncé aurait été posé à la place. On est maintenant convaincu d'aller dans la bonne direction, et on aura pas peur de s'éloigner encore plus de problème de base. C'est souvent une bonne chose, tant qu'on garde l'équivalence avec le problème de base bien sûr.

Troisième étape : Les propriétés du point P. Après une chasse aux angles naïve infructueuse, on cherche des propriétés des cercles Γ ou du point P. Deux possibilités : on constate que P est sur le cercle circonscrit à ABC, Ω, parce qu'on a tracé ce cercle. En effet, dans un tel exercice centré sur un triangle ABC, on trace toujours son cercle circonscrit sur au moins une figure, si ce n'est sur toutes. Une autre manière d'effectuer cette conjecture présuppose une certaine habitude avec le point de Miquel. Le point d'intersection de Γ_B et de Γ_C est le point de Miquel de $\ell_1, \ell_2, (AB), (AC)$. Dire qu'il est sur Γ_A revient à dire que c'est un point de Miquel du pentalatère $\ell_1, \ell_2, (AB), (AC), (BC)$ (tout cercle circonscrit au trilatère formé par 3 de ces droites passe par P).

Une bonne manière de se représenter les points de Miquel de pentalatère (qui n'existent pas pour n'importe quel pentalatère) est de se rappeler de la droite de Simson (ou Steiner). Un point est sur le cercle circonscrit à un trilatère (ou triangle) si et seulement si ses projetés (orthogonaux) sur les trois côtés sont alignés, donc un point est le point de Miquel de 4 droites si et seulement ses 4 projetés sont alignés, et de 5 si et seulement si ses 5 projetés sont alignés. Avec cette vision des choses, en supposant P sur les trois cercles Γ, les projetés de P sur les côtés sont tous sur la droite reliant les deux projetés de P sur ℓ_1 et sur ℓ_2, ils sont donc alignés et P est sur Ω.

Pourquoi avoir choisi Ω alors que P est sur 10 cercles, littéralement ? C'est le seul qui ne fait intervenir que des points déjà introduits et surtout qui conserve la symétrie entre A, B et C. Pour montrer la concourance de Γ_A,Γ_B et Γ_C, on peut montrer que Γ_B et Γ_C se coupent sur Ω, en un point qui sera alors aussi sur Γ_A.

Interlude : va-t-on dans la bonne direction ? Que préfère-t-on, montrer la concourrance de Γ_A,Γ_B et Γ_C, ou bien celle de Γ_B, Γ_C et Ω ? Avantage du premier : cela conserve la symétrie. Avantage du deuxième : c'est plus loin de l'énoncé sans être plus complexe. Le deuxième gagne.

Quatrième étape : Il nous reste une hypothèse : ℓ_1 et ℓ_2 se coupent en l'orthocentre. J'avais oublié. Corrigeons ça. Comment utiliser l'hypothèse d'orthocentre ? On ne souhaite surtout pas tracer des hauteurs qui ne passent par rien ici. Par contre, le cercle circonscrit est déjà tracé et important, et on sait que de nombreux symétriques de H s'y trouvent. Lesquels choisir ? Par rapport aux côtés ou aux milieux des côtés ? Cette fois, il suffit de se poser la question pour avoir la réponse : les symétriques par rapport aux côtés sont aussi sur les cercles Γ, car ceci sont stables par la symétrie axiale ! Ils sont donc beaucoup plus intéressants : c'est clairement la bonne manière d'utiliser l'hypothèse de milieu. Nommons les A', B' et C'.

Conclusion : On a reformulé tous les éléments de l'énoncé en des éléments équivalents (H est bien le seul point dont les trois symétriques sont sur le cercle circonscrit du triangle ABC) et utilisables pour faire une chasse aux angles. On a conservé la symétrie entre B et C, essayons de la conserver encore pour la chasse aux angles (ce n'est pas toujours possible). On définit P comme le point d'intersection autre que H de Γ_B et Γ_C. On veut montrer qu'il se trouve sur Ω. Plutôt que de montrer qu'il est cocyclique avec A, B, C, montrons qu'il est cocyclique avec $AB'C'$. En effet, on ne sait rien de la direction de la droite PB ou PC, alors que PB' et PC' sont des cordes de Γ_B et Γ_C. De plus, l'angle $\widehat{B'AC'}$ est connu (c'est-à-dire qu'on peut l'exprimer avec des opérations simples en fonction des angles du triangle ABC).

On veut donc trouver la valeur connue de $\widehat{B'PC'}$. Pour exploiter la définition de P, on éclate cet angle en $\widehat{B'PH}$ et $\widehat{HPC'}$. On cherche donc une relation simple entre ces deux angles. Ce sont des angles inscrits, qui interceptent un arc de deux fois la longueur de HY_1 d'un côté de HZ_1 de l'autre. On cherche donc une relation entre l'angle $\widehat{HY_2Y_1}$ et $\widehat{Z_1Z_2H}$, mais ces deux angles sont entre la même droite ℓ_2 et les côtés du triangle. On a donc une relation, qui, en remontant tout, donne une relation simple entre $\widehat{B'AC'}$ et $\widehat{B'PC'}$, qui ne peut être que la somme des deux valant $180°$, ce qui terminerait. On est maintenant convaincu que cette petite chasse aux angles va terminer ce problème, il suffit de l'écrire pour finir la preuve de l'exercice.

Commentaire des correcteurs : Les élèves ont très bien vu comment réécrire l'énoncé pour se ramener à la concourance de trois cercles. Ensuite, les méthodes employées sont variées et utilisent principalement le point de Miquel. Une poignée d'élèves ont été plus que ravis d'appliquer des résultats invoquant des paraboles.

Si une telle technologie permettait en apparence d'annihiler l'exercice, elle ne donne ici qu'une réécriture des raisonnements autour du point de Miquel commun aux différents quadrilatères de la figure, des raisonnements plus élémentaires et, au goût des correcteurs, bien plus instructifs pour les élèves.

Exercice 18. Soit ABC un triangle et ω son cercle inscrit dont les points de tangence sur $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ sont respectivement D, E et F. On note Ω le cercle tangent à ω et passant par B et C et T le point de tangence de ces deux cercles. On note X et Y les milieux des segments $[DE]$ et $[DF]$. On note U et V les seconds points d'intersection des droites (TX) et (TY) avec Ω. On note également Z et W les seconds points d'intersection des droites (AB) et (AC) avec Ω. Montrer que (ZU), (WV), (XY) et la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ sont concourantes.

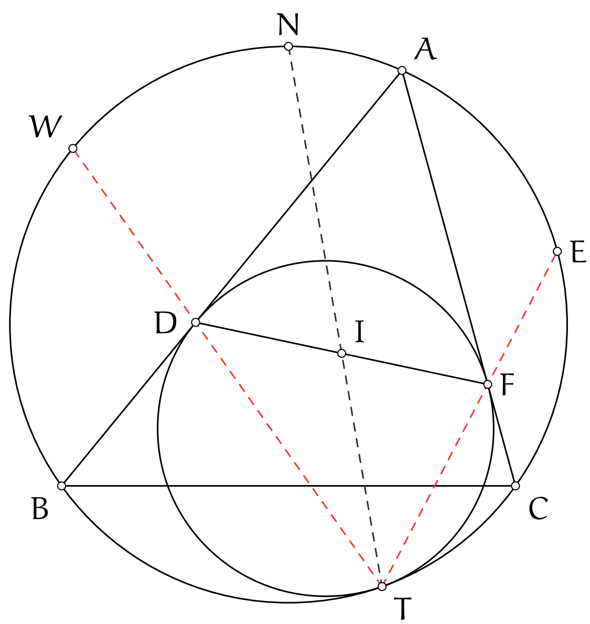
Solution de l'exercice 18

Pendant toute la preuve on va utiliser les résultats du lemme qui suit. On commence d'abord par une notation.

Soit ABC un triangle, on note Ω le cercle circonscrit à ABC, on note également ω le cercle tangent à (AB), (AC) et intérieurement à Ω, on dit que ce cercle est le *cercle mixtilinéaire* (intérieur) du triangle ABC depuis A.

Lemme 3. *Soit ABC un triangle, on note I le centre de son cercle inscrit, on note de de plus, Ω le cercle circonscrit à ABC ainsi que ω le cercle mixtilinéaire depuis A. On note T (resp. D et F) le point de tangence de ω avec Ω (resp. (AC) et (AB)) ainsi que N le pôle nord (le milieu de l'arc BC qui contient A). Sous ces hypothèses et notation on sait alors que I est le milieu du segment $[DF]$ et que les points T, I et N sont alignés.*

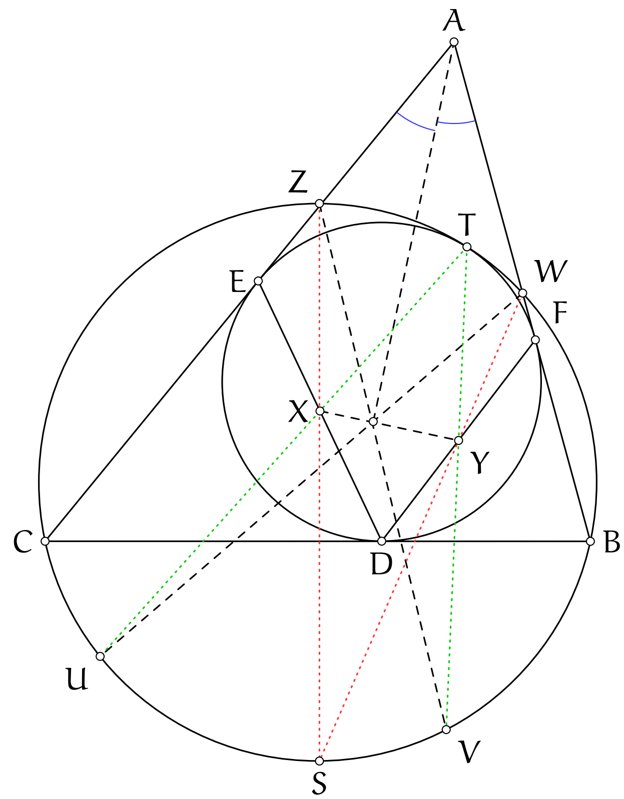
Démonstration.



Notons E et W les milieux respectifs des arcs AC et AB. D'après le lemme du bocal on sait que les points W, D et T sont alignés ainsi que les points T, F et E. On sait de plus d'après le théorème du pôle sud que les points B, I et E sont alignés ainsi que les points C, I et W. On peut alors appliquer le théorème de Pascal à l'hexagone $BETWCA$ pour conclure que les points D, I et F sont alignés. Comme l'axe (AI) est un axe de symétrie qui échange (AB) avec (AC) et ω avec lui-même on peut en déduire que le point I est bien le milieu du segment $[EF]$.

Pour la deuxième partie du lemme, on note β et γ les angles en B et C respectivement dans le triangle ABC. Dans le triangle TDF on remarque que la droite (TI) est une médiane d'après la première partie du lemme. De plus, par des propriétés classique de la construction de la symédiane (voir par exemple le cours d'Alexander Semenov au stage de Valbonne 2022 ou bien celui de Thomas Budzinski à Montpellier

2016) la droite (TA) est la symédiane. Ainsi, $\widehat{ITC} = \widehat{ITF} + \widehat{FTC} = \widehat{ATD} + \widehat{FTC} = \gamma/2 + \beta/2 = \widehat{BTI}$ où la dernière égalité découle par symétrie. Cela conclut la deuxième partie du lemme.



On peut maintenant passer à la preuve de l'exercice.

En se plaçant dans le triangle ZBC on remarque que ω est le cercle mixtiliniéaire depuis B. Ainsi, d'après le Lemme 3, le point Y est le centre du cercle inscrit de ce triangle et de plus, la droite (TY) passe par le pôle Nord issu de B dans ZBC, ce point est le point V de l'énoncé. De la même manière le point X est le centre du cercle inscrit du triangle WBC et U est le milieu de l'arc BW qui contient C. Cela montre en particulier que la droite (WV) bissecte extérieurement l'angle $\widehat{AWZ}$, de la même manière la droite (ZU) est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{WZA}$. Ainsi il est maintenant clair que dans le triangle AWZ les droites (WV), (ZU) et la bissectrice issue de A sont concourantes en un point P.

On veut également démontrer que la droite (YZ) passe par ce point P. On veut pour cela appliquer le théorème de Pascal à l'hexagone $TUZSWV$, où S dénote le milieu de l'arc BC sur le cercle Ω. Mais la droite (ZY) est bien la bissectrice de l'angle $\widehat{BZC}$ comme Y est le centre du cercle inscrit au triangle ZBC. De la même manière la droite (WX) passe bien par le point S, on peut alors conclure en appliquant le théorème de Pascal.

<u>Commentaire des correcteurs :</u> Les élèves ayant abordé le problème ont presque tous résolu le problème. Ceux qui ont remarqué le cercle mixtilinéaires de la figure s'en sont sortis avec une preuve beaucoup plus courte. Il est conseillé d'énoncer les propriétés du cercle mixtilinéaires utilisées lors de la preuve pour rendre une copie plus agréable à lire.