PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 2 : ALGÈBRE
À RENVOYER AU PLUS TARD LE 11 JANVIER 2023

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe junior est constitué des élèves nés en 2008 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe senior.
- Les exercices classés “Juniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés “Seniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Exercices Juniors

Exercice 1. Soient x, y deux réels strictement positifs. Montrer que

$$\left(x+\frac{2}{y}\right)\left(\frac{y}{x}+2\right) \geqslant 8.$$

Quand a-t-on égalité ?

Exercice 2. Trouver tous les réels x et y tels que

$$x(x-2y)+y(2y-4)+4=0.$$

Exercice 3. Pour un réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x (par exemple, $\lfloor 2,7 \rfloor = 2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$ et $\lfloor -1,5 \rfloor = -2$).
Soient a, b deux réels tels que

$$a + \lfloor a \rfloor = b + \lfloor b \rfloor.$$

Montrer que $a = b$.

Exercice 4. Soit n un entier strictement positif et $x \geqslant n$ un réel. Montrer que $x + \frac{n}{x} \geqslant n+1$ et donner les cas d'égalité.

Exercice 5. Trouver tous les triplets de réels positifs ou nuls (a, b, c) tels que

$$\begin{cases} a^2 + ab = c \\ b^2 + bc = a \\ c^2 + ca = b \end{cases}.$$

Exercice 6. Montrer que pour tous réels a, b et c strictement positifs :

$$\frac{bc}{a^2+2bc}+\frac{ca}{b^2+2ca}+\frac{ab}{c^2+2ab} \leqslant 1 \leqslant \frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ca}+\frac{c^2}{c^2+2ab}$$

Exercice 7. Soient x, y, z des réels strictement positifs tels que $xy + yz + zx = 1$. Montrer que

$$2(x^2+y^2+z^2)+\frac{4}{3}\left(\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{z^2+1}\right) \geqslant 5.$$

Exercice 8. Soient a et b deux réels. On définit les suites (a_n) et (b_n) par $a_0 = a, b_0 = b$ et pour tout n entier naturel, $a_{n+1} = a_n + b_n$ et $b_{n+1} = a_n b_n$. Déterminer toutes les paires (a, b) telles que $a_{2022} = a_0$ et $b_{2022} = b_0$.

Exercice 9. Soient $b_1, \ldots, b_{2022}$ des réels positifs ou nuls tels que $b_1 + b_2 + \ldots + b_{2022} = 2$. Soient $a_0, a_1, \ldots, a_{2022}$ des nombres réels tels que $a_0 = a_{2022} = 0$. Supposons que pour tout i compris entre 1 et 2022 inclus,

$$|a_i - a_{i-1}| \leqslant b_i.$$

Montrer que l'on a

$$(a_0+a_1)b_1 + (a_1+a_2)b_2 + \ldots + (a_{2021}+a_{2022})b_{2022} \leqslant 2.$$

Exercices Seniors

Exercice 10. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite périodique de période 2022 et de période 5. Montrer que (u_n) est constante.

Une suite (u_n) est dite périodique de période t si, pour tout entier naturel n, $u_{n+t} = u_n$.

Exercice 11. Soit n un entier strictement positif et $x \geqslant n$ un réel. Montrer que $x + \frac{n}{x} \geqslant n+1$ et donner les cas d'égalité.

Exercice 12. Soit (a_n) une suite de réels. On suppose que $a_0 = 1$ et que pour tout $n \geqslant 1$, a_n est la plus petite solution strictement positive de

$$(a_n - a_{n-1})(a_n + a_{n-1} - 2\sqrt{n}) = 2.$$

Trouver le plus petit entier n tel que $a_n \geqslant 2022$.

Exercice 13. Soit $n \geqslant 3$ et soient $x_1, \ldots, x_n$ des réels. Montrer que

$$2(x_1 + \cdots + x_n)^2 \leqslant n(x_1^2 + \cdots + x_n^2 + x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n + x_nx_1)$$

Exercice 14. Soient $a, b, c, x, y, z > 0$ des réels tels que $a+b+c = x+y+z$ et $abc = xyz$. On suppose de plus $a \leqslant x < y < z \leqslant c$ et $a < b < c$. Montrer que $a = x, b = y, c = z$.

Exercice 15. Pour une fonction f et n un entier strictement positif, on note f^n la composée n-ième de f définie par $f^n = f \circ f \circ \ldots \circ f$ où f apparaît n fois dans le membre de droite.
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que

$$f^{f(n)}(m) + mn = f(m)f(n)$$

pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 16. Soient $b_1, \ldots, b_{2022}$ des réels positifs ou nuls tels que $b_1 + b_2 + \ldots + b_{2022} = 2$. Soient $a_0, a_1, \ldots, a_{2022}$ des nombres réels tels que $a_0 = a_{2022} = 0$. Supposons que pour tout i compris entre 1 et 2022 inclus,

$$|a_i - a_{i-1}| \leqslant b_i.$$

Montrer que l'on a

$$(a_0 + a_1)b_1 + (a_1 + a_2)b_2 + \ldots + (a_{2021} + a_{2022})b_{2022} \leqslant 2.$$

Exercice 17. Soit $\alpha \neq 0$. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x, y,

$$f(x^2 + y + f(y)) = f(x)^2 + \alpha y.$$

Exercice 18. Soit $P(X)$ un polynôme à coefficients réels unitaire de degré 2022. Emile joue au jeu suivant : il écrit le polynôme $P(X)$ au tableau et à chaque étape, si le polynôme $f(X)$ est écrit au tableau, Emile peut le remplacer par :

— Le polynôme $f(X) + c$, pour c un réel de son choix, ou
— le polynôme $P(f(X))$.

Trouver tous les entiers positifs ou nuls n tels que, quelque soit le polynôme P initial, Emile peut trouver une suite d'opérations afin que le polynôme obtenu ait exactement n racines réelles distinctes.