Groupe Avancé : polynomes irreductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

December 10, 2022

Exercise 1. Deux joueurs A et B jouent au jeu suivant. Le joueur A pense à un polynome $P(x)$ à coefficient entiers positifs. Le joueur B choisit un entier a et demande à A de lui donner $P(a)$. Ensuite le joueur B choisit un autre entier b et demande à A la valeur de $P(b)$. Après ces deux question B doit deviner le polynome P. A-t-il une stratégie gagnante?

Exercise 2. Soit $P(x) = x^4 + 6x^2 + 1$ Montrer que pour tout premier p, P est n'est pas irreductible dans $\mathbb{F}_p[x]$ mais est irreductible dans $\mathbb{Z}[x]$.

Exercise 3. Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$. Tel que $|a_0|$ est premier et $|a_0| > |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$. Montrer que P est irreductible.

Exercise 4. Soit $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{C}[x]$. Montrer qu'il exists $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$ et $|P(z)| \geq 1$.

Exercise 5. Soit P un polynome irreductible de $\mathbb{Z}[x]$. Montrer que P n'a pas de racines multiples.

Exercise 6. (IMO 1993) Soit $P(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$. Montrer que $P(x)$ est irreductible dans $\mathbb{Z}[x]$.

Exercise 7. Soit $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ un polynome irreductible. On suppose que $|P(0)|$ n'est pas un carré. Montrer que $P(x^2)$ est aussi irréductible.

Exercise 8. Soit $P(x)$ un polynome irreductible. On suppose qu'il a deux racines dont le produit est égale 1. Montrer que le degré de P est pair.

Exercise 9. (IMO Shortlist 2005) Trouver tous les polynomes $P(x) = x^2 + ax + b \in \mathbb{Z}[x]$ tel qu'il existe un polynome $Q(x) \in \mathbb{Z}[x]$ de sorte que $P(x)Q(x)$ soit un polynome dont tous les coefficients sont égaux à ± 1.

Exercise 10. (IMO 2002) Trouver tous les entiers $m, n \geq 3$ tel qu'il existe une infinité d'entiers a de sorte que

$$\frac{a^m + a - 1}{a^n + a - 1} \in \mathbb{Z}.$$