Equations fonctionnelles-Exercices

1 Substitution et réflexes de base

Exercice 1.
Déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous réels x et y :

$$f(x+y) = f(x) + y$$

Solution de l'exercice 1.
Analyse : Soit f une fonction solution.
En prenant $x = 0$, on obtient pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$f(y) = f(0) + y$$

Donc avec $a = f(0) \in \mathbb{R}$ une fonction de la forme $f(x) = x + a$
Synthèse : Réciproquement, soit $a \in \mathbb{R}$ et f la fonction telle que $f(x) = x + a$.
On a alors $f(x+y) = x + y + a = f(x) + y$ donc c'est bien une solution, on a toutes les solutions.

Exercice 2.
Déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous réels x et y :

$$f(x - f(y)) = 1 - x - y$$

Solution de l'exercice 2.
Analyse : Soit f une fonction solution.
En prenant $y = 0$, on a :

$$f(x - f(0)) = 1 - x$$

Ainsi, en prenant $w = x - f(0)$ qui parcourt tout $\mathbb{R}$ quand x parcourt $\mathbb{R}$, on a :

$$f(w) = 1 - w - f(0)$$

Donc f est de la forme $f(x) = a - x$
Synthèse : Avec $f(x) = a - x$, on a :

$$f(x - f(y)) = 2a - x - y$$

Donc f est solution si et seulement si $a = \dfrac{1}{2}$
Ainsi, la seule solution est $f(x) = \dfrac{1}{2} - x$

Exercice 3.
Soit $a \in \mathbb{R}$.
Déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous réels x et y distincts :

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = a$$

Solution de l'exercice 3.
Analyse : Soit f une fonction solution.
En prenant $y = 0$, on a :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = a$$

Soit $f(x) = f(0) + ax$, cette égalité est encore vraie pour $x = 0$, donc f est de la forme $f(x) = ax + b$
Synthèse : Soit f une fonction de la forme $f(x) = ax + b$. On a bien

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = a$$

Pour tout $x \neq y$

Exercice 4.
Déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous réels x et y :

$$f(x)f(y) = f(xy) + x + y$$

Solution de l'exercice 4.
Analyse : Soit f une fonction solution.
En prenant $x = y = 0$, on a :

$$f(0)^2 = f(0)$$

Donc $f(0) = 0$ ou 1.
Si $f(0) = 0$, pour $x = 0$ et $y = 1$, on a $0 = 1$, c'est impossible!
Donc $f(0) = 1$. En prenant $y = 0$:

$$f(x) = 1 + x$$

Synthèse : Réciproquement, si $f(x) = x + 1$:

$$f(x)f(y) = (x + 1)(y + 1) = f(xy) + x + y$$

Donc f est bien solution

Exercice 5.
Déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous réels x et y :

$$f(xy) = xf(x) + yf(y)$$

Solution de l'exercice 5.
Analyse : Soit f une fonction solution.
En prenant $x = y = 0$, $f(0) = 0$
En prenant, $x = 0$,

$$0 = xf(x)$$

Donc $f(x) = 0$ pour $x \neq 0$, c'était aussi vrai pour $x = 0$, donc $f = 0$
Synthèse : Si $f = 0$, on a bien :

$$f(xy) = xf(x) + yf(y)$$

Exercice 6.
Déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ telles que pour tous réels x et y strictement positifs :

$$(x + y)f(yf(x)) = x^2(f(x) + f(y))$$

Solution de l'exercice 6.
Analyse : Soit f une fonction solution.
En prenant $x = y = 1$, on a :

$$f(f(1)) = f(1)$$

En prenant $x = f(1)$ et $y = 1$,

$$(f(1)+1)f(1) = f(1)^2 \times (2f(1))$$

Soit : $2(f(1)-1)(f(1)+\frac{1}{2}) = 0$ et donc $f(1) = 1$ ou $-\frac{1}{2}$, comme $f(1) > 0$, on a $f(1) = 1$
En prenant $x = 1$, on a :

$$(1+y)f(y) = 1 + f(y)$$

D'où, $f(y) = \frac{1}{y}$.
Synthèse : Si $f(x) = \frac{1}{x}$, on a :

$$(x+y)f(yf(x)) = \frac{x^2}{y} + x = x^2(f(x)+f(y))$$

2 Propriétés d'une fonction

Exercice 7.
Déterminer dans chaque cas si toutes les solutions de ces fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont injectives, surjectives ou bijectives :

1. $f(x+f(y)) = 2f(x) + y$
2. $f(f(x)) = 0$
3. $f(x+y) = f(x)f(y)$

Solution de l'exercice 7.

1. En prenant $x = 0$, $f(f(y)) = 2f(0) + y$
   Si $f(a) = f(b)$, on a $f(f(a)) = f(f(b))$, soit $2f(0) + a = 2f(0) + b$, donc $a = b$. Donc f est injective.
   De plus pour $z \in \mathbb{R}$, $f(f(z - 2f(0))) = z$, donc f est surjective donc bijective
2. $f = 0$ est une solution ni injective ni surjective, mais on peut même prouver que toutes les solutions ne sont ni injectives ni surjectives :
   On suppose f injective, soit $a \neq b$, alors $f(a) \neq f(b)$ et $f(f(a)) \neq f(f(b))$. C'est impossible donc f n'est pas injective
   On suppose f surjective, soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) = 1$. Soit $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $f(\beta) = \alpha$. Alors $f(f(\beta)) = f(\alpha) = 1$, c'est impossible. Donc f n'est pas surjective
3. On remarque que $f(x) = 1$ est solution qui n'est ni injective ni surjective

Exercice 8.
Déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous réels x et y :

$$f(f(x)+y) = 2x + f(f(y) - f(f(x)))$$

Solution de l'exercice 8.
Analyse : Soit f une fonction solution.
En prenant (par exemple) $y = 0$, on a :

$$f(f(x)) = 2x + f(f(0) - f(f(x)))$$

Si $f(a) = f(b)$, on a en prenant $x = a$ et $x = b$, on obtient dans ce qui précède $a = b$, donc f est injective.
On prend $x = 0$, on a alors :

$$f(f(0) + y) = f(f(y) - f(f(0)))$$

Par injectivité de f, on a alors :

$$f(0) + y = f(y) - f(f(0))$$

Donc $f(y) = y + a$ avec $a \in \mathbb{R}$
Synthèse : Soit f telle que $f(x) = x + a$. On a alors :
$f(f(x) + y) = 2a + x + y$ et $2x + f(f(y) - f(f(x))) = x + y$
Donc la seule solution est pour $a = 0$ et donc $f(x) = x$ est la seule solution.

Exercice 9.
Déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous réels x et y :

$$f(f(f(x))) + f(f(y)) = f(y) + x$$

Solution de l'exercice 9.
Analyse : Soit f une fonction solution.
En prenant $y = 0$, on a

$$f(f(f(x))) = x + f(0) - f(f(0))$$

On voit alors que f est surjective.
En prenant, $f(y) = z$, pour $z \in \mathbb{R}$, on a alors, avec $x = 0$,

$$f(z) = z - f(f(f(0)))$$

Donc f est de la forme $f(x) = x + a$
Synthèse : Soit f une fonction telle que $f(x) = x + a$, on a alors

$$f(f(f(x))) + f(f(y)) = 5a + x + y$$

et

$$f(y) + x = x + y + a$$

Donc f est solution si et seulement si $a = 0$, et donc $f(x) = x$ est l'unique solution.

Exercice 10.
Déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous réels x et y :

$$f(x^2 - y^2) = (x - y)(f(x) + f(y))$$

Solution de l'exercice 10.
Analyse : Soit f une fonction solution.
Avec $x = y$, on a $f(0) = 0$
En prenant, $y = 0$, on a

$$f(x^2) = xf(x)$$

donc en changeant x en $-x$, on obtient :

$$-xf(-x) = xf(x)$$

C'est à dire $-f(-x) = f(x)$ pour $x \neq 0$. Comme $f(0) = 0$, f est impaire.
En changeant y en $-y$ dans l'égalité initiale, on ne change pas le terme de gauche donc on a :

$$(x+y)(f(x) - f(y)) = (x-y)(f(x) + f(y))$$

D'où : $xf(y) = yf(x)$. En prenant $y = 1$, $f(x) = xf(1)$.
Donc f est de la forme $f(x) = ax$
Synthèse : Soit f une fonction telle que $f(x) = ax$. On a alors bien :

$$f(x^2 - y^2) = a(x^2 - y^2) = (x-y)(f(x) + f(y))$$

Donc on a bien l'ensemble des solutions.

Exercice 11.
Déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous réels x et y :

$$f(f(x) + 9y) = f(y) + 9x + 24y$$

Solution de l'exercice 11.
Analyse : Soit f une fonction solution.

On pose tout d'abord $y = 0$ ce qui nous donne $f(f(x)) = f(0) + 9x$, $f(0)$ étant constant, en faisant varier x, on peut atteindre toutes les valeurs réelles, en particulier, on en déduit que f est surjective. Il existe donc au moins un réel k tel que $f(k) = 0$, or, on a donc $f(f(k)) = f(0)+9k$ soit $f(0) = f(0)+9k$ d'où $k = 0$ soit encore $f(0) = 0$
En particulier, on a

$$f(f(x)) = 9x$$

pour tout x.
On pose maintenant $x = 0$ ce qui donne $f(9y) = f(y) + 24y$ soit encore $f(f(f(y))) = f(y) + 24y$ f étant surjective, il existe donc un w tel que $f(w) = y$ en substituant on a

$$f(f(f(f(w)))) = f(f(9w)) = 81w = f(f(w)) + 24f(w) = 9w + 24f(w)$$

Soit encore

$$24f(w) = (819)w = 72w$$

D'où

$$f(w) = 3w$$

pour tout $w \in \mathbb{R}$ (en faisant varier $y \in \mathbb{R}$).
Synthèse : Soit f la fonction telle que $f(x) = 3x$
On a alors

$$f(f(x) + 9y) = 9x + 27y = f(y) + 9x + 24y$$

Donc f est bien l'unique solution