

- Polynômes -

Les notions suivantes seront abordées pendant le cours (si le temps le permet) :

- Polynôme
- Ensembles $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{Z}[X]$
- Degré d'un polynôme
- Division euclidienne des polynômes
- Racines d'un polynôme
- Polynôme dérivé
- Interpolation de Lagrange
- Relations de Viète
- Formules de Newton

- Exercices d'application -

Exercice 1. Soient P, Q deux polynômes de degrés n et m respectivement. Calculer $\deg(P+Q)$ et $\deg(PQ)$.

Exercice 2.

1. Poser la division euclidienne de $X^3 - 2X + 2$ par $X - 1$.
2. Trouver le reste de la division euclidienne de $X^{2022} + 2022$ par $X - 1$.
3. Trouver le reste de la division euclidienne de $X^{100} - 2X^{51} + 1$ par $X^2 - 1$.

Exercice 3. Soit P un polynôme de degré 2022 tel que $P(0) = 1$, et $P(k) = k$ pour tout $k \in \{1, \dots, 2022\}$. Combien vaut $P(-1)$?

Exercice 4.

1. Montrer que $X + 1$ divise tout polynôme palindromique de degré impair.
2. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $(X + 1)^2$ divise $P(X) = X^{4n+2} + 2X^{2n+1} + 1$.

Exercice 5. Soient a_1, \dots, a_n et b_1, \dots, b_n des éléments de \mathbb{K} (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{Q}). Trouver tous les $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(a_k) = b_k$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$.

Exercice 6. Trouver toutes les valeurs du paramètre a pour que l'équation $ax^2 - (a+3)x + 2 = 0$ admette deux racines réelles de signe opposé.

Exercice 7. Trouver tous les x, y, z réels tels que $x + y + z = 17$, $xy + yz + zx = 94$ et $xyz = 168$.

- Exercices -

Exercice 8. Montrer que $|X|$ n'est pas un polynôme.

Exercice 9. Trouver tous les polynômes P tels que $16P(X^2) = P(2X)^2$.

Exercice 10. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que pour tous réels x , $P'(X)P''(X) = P(2X)$.

Exercice 11.

1. Trouver tous les polynômes à coefficients complexes P tels que $P(q) \in \mathbb{Q}$ pour tout $q \in \mathbb{Q}$.
2. (Bonus) et si P est surjectif?

Exercice 12. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul de degré n . Montrer que les sommes des racines (complexes) de $P, P', \dots, P^{(n-1)}$ (où $P^{(n-1)}$ est la dérivée $(n-1)$ -ème de P) sont en progression arithmétique.

Exercice 13. Trouver tous les réels x, y tels que $x + y = 3$ et $x^5 + y^5 = 33$.

Exercice 14. Trouver tous les réels x, y, z tels que

$$3 = x + y + z = x^2 + y^2 + z^2 = x^3 + y^3 + z^3.$$