Exercices avec solutions - Groupe A - Chasse aux angles

Cours en ligne POFM

12 novembre 2022

Exercices

Exercice 1. Soit un cercle Γ et P un point à l'extérieur de Γ. Soient A et B sur Γ tels que les droites (PA) et (PB) sont les deux tangentes à Γ passant par P. Montrer que PAB est isocèle en P.

Exercice 2. Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles s'intersectant en deux points P et Q. Une droite passant par P coupe Γ_1 en $A \neq P$ et Γ_2 en $A' \neq P$. Une droite passant par Q coupe Γ_1 en $B \neq Q$ et Γ_2 en $B' \neq Q$. Montrer que (AB) et $(A'B')$ sont parallèles.

Exercice 3. (Théorème du pôle Sud) Soit ABC un triangle de cercle circonscrit Γ. La bissectrice de $\widehat{BAC}$ coupe Γ en $S \neq A$. Montrer que S est le milieu de l'arc $\overset{\frown}{BC}$.

Exercice 4. Soit ABC un triangle, O le centre du cercle circonscrit, C' le pied de la hauteur issue de C. Montrer que $\widehat{ACC'} = \widehat{OCB}$.

Exercice 5. (Théorème de Miquel) Soit ABC un triangle et D, E, F trois points respectivement sur $[AB], [BC], [CA]$. Montrer que les cercles circonscrits aux triangles BDE, CEF et AFD ont un point commun.

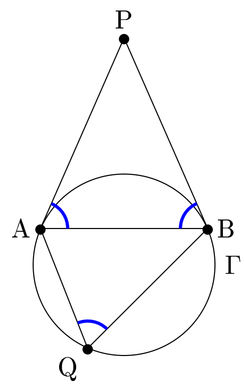
Exercice 6. (Droite de Simson) Soit ABC un triangle de cercle circonscrit Γ. Soit P un point de Γ et D, E, F les projetés orthogonaux de P sur $(AB), (BC), (CA)$ respectivement. Montrer que D, E, F sont alignés.

Exercice 7. Soit ABC avec $\widehat{BAC} > 90°$, Γ son cercle circonscrit et O le centre du cercle circonscrit. Le cercle circonscrit à AOB recoupe $[BC]$ en un point D. Montrer que (OD) est perpendiculaire à (AC).

Exercice 8. Soit $ABCD$ un rectangle, P le milieu de $[AB]$ et Q le point de $[PD]$ tel que les droites (CQ) et (PD) sont perpendiculaires. Montrer que le triangle BQC est isocèle en B.

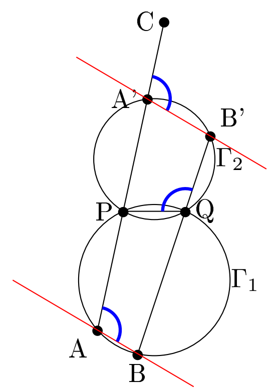
Solutions

Solution exercice 1 :



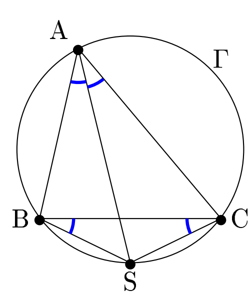
Soit Q un point sur Γ. Par angle tangentiel $\widehat{BAP} = \widehat{BQA} = \widehat{ABP}$ donc PAB est isocèle en P.

Solution exercice 2 :



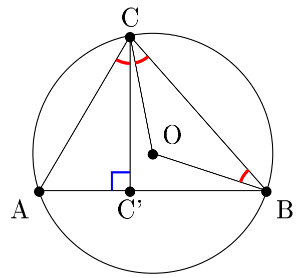
Par angles opposés dans un cercle on a $\widehat{BQP} = 180° - \widehat{BAP}$. Donc $\widehat{B'QP} = \widehat{BAP}$. De même $\widehat{B'QP} = \widehat{B'A'C}$. Donc $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C}$. Par angles correspondants, $(AB)//(A'B')$.

Solution exercice 3 :



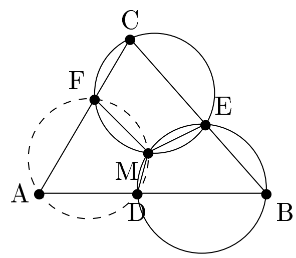
Par angle inscrit $\widehat{SCB} = \widehat{SAB}$ et $\widehat{SBC} = \widehat{SAC}$. Comme $\widehat{SAC} = \widehat{SAB}$ alors $\widehat{SBC} = \widehat{SCB}$. Donc SBC est isocèle en S, d'où le résultat.
En particulier la bissectrice de $\widehat{BAC}$ et la médiatrice de $[BC]$ se coupent sur le cercle circonscrit à ABC.

Solution exercice 4 :



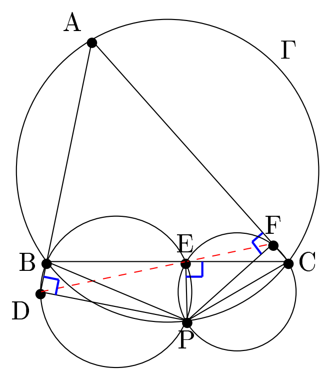
On a $\widehat{ACC'} = 90^\circ - \widehat{CAB}$. Par angle au centre : $\widehat{COB} = 2\widehat{CAB}$. Donc $\widehat{ACC'} = \frac{180^\circ - \widehat{COB}}{2} = \frac{\widehat{OCB}+\widehat{CBO}}{2}$. Or $\widehat{OCB} = \widehat{CBO}$. Donc $\widehat{ACC'} = \widehat{OCB}$, comme voulu. Cela signifie que (CC') et (CO) sont symétriques par rapport à la bissectrice de $\widehat{ACB}$.

Solution exercice 5 :



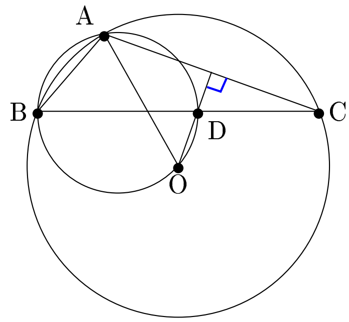
Soit M l'intersection des cercles circonscrits à BDE et CEF. Il suffit de montrer que A, F, M, D sont cocycliques. On a $\widehat{FME} = 180^\circ - \widehat{ACB}$ et $\widehat{DME} = 180^\circ - \widehat{CBA}$. Or $\widehat{FMD} = 360^\circ - \widehat{FME} - \widehat{DME}$. Donc $\widehat{FMD} = \widehat{ACB} + \widehat{CBA} = 180^\circ - \widehat{BAC}$, d'où $\widehat{FMD} + \widehat{FAD} = 180^\circ$, on obtient bien A, F, M, D cocycliques, ce qui conclut.

Solution exercice 6 :



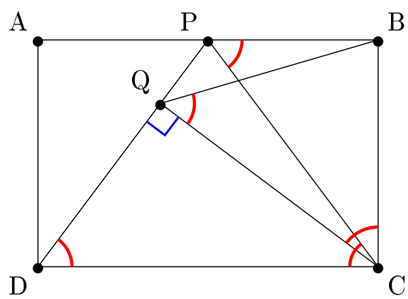
$\widehat{PEC} = \widehat{PFC}$ donc P, E, F, C cocycliques. De plus $\widehat{BDP} + \widehat{BEP} = 180^\circ$: B, D, P, E sont cocycliques. Il suit $\widehat{DEP} = \widehat{DBP}$. Or $\widehat{DBP} = 180^\circ - \widehat{PBA}$ et $\widehat{PCA} = 180^\circ - \widehat{PBA} = \widehat{PEF}$. Donc $\widehat{DEP} + \widehat{PEF} = 180^\circ$. Donc D, E, F sont alignés.
La réciproque de cet énoncé est encore vraie : si D, E, F sont alignés alors P est sur le cercle.

Solution exercice 7 :



Comme AOC est isocèle en O : la hauteur issue de O est aussi la bissectrice de $\widehat{AOC}$. Il suffit de montrer que $\widehat{AOD} = \frac{\widehat{AOC}}{2}$. Or par angle inscrit, $\widehat{AOD} = \widehat{ABD} = \widehat{ABC}$ et par angle au centre $\widehat{ABC} = \frac{\widehat{AOC}}{2}$. On a donc le résultat voulu, ce qui conclut.

Solution exercice 8 :



On a $\widehat{PQC} + \widehat{PBC} = 90° + 90° = 180°$ donc P, B, Q, C sont cocycliques. D'pù $\widehat{BQC} = \widehat{BPC}$. Or par angles alternes-internes, comme $(AB)//(DC)$: $\widehat{BPC} = \widehat{PCD}$, et de plus $PB = PA$ donc $PC = PD$: PCD isocèle en P. D'où $\widehat{PCD} = \widehat{PDC} = 90° - \widehat{QCD} = \widehat{BCQ}$. Finalement $\widehat{BCQ} = \widehat{BQC}$, donc BQC est bien isocèle en B.