Chasse aux angles

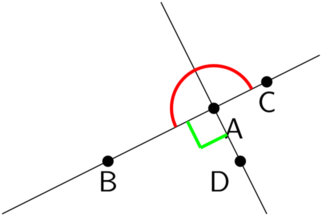
POFM Groupe A

Quentin Hurez

12 novembre 2022, 14h00-16h30

Association pour l'animation mathématique

Mesures d'angles importantes



Angle plat

On a $\widehat{BAC} = 180°$.

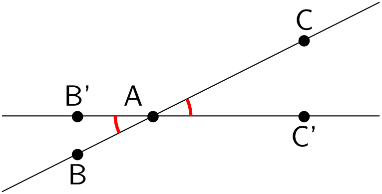
Angle droit

On a $\widehat{DAB} = 90°$.

Tour complet

Un tour complet vaut donc $360°$.

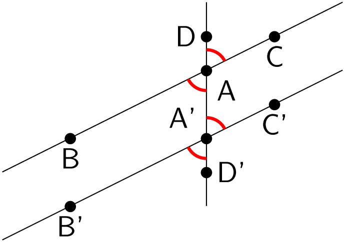
Angles opposés par le sommet



Mesure des angles opposés

On a $\widehat{BAB'} = \widehat{CAC'}$.

Angles alternes-internes et angles correspondants



Angles alternes-internes

$(BC)//(B'C')$ ssi $\widehat{BAA'} = \widehat{AA'C}$

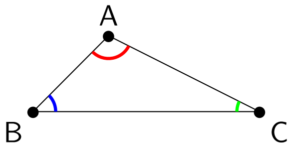
Angles correspondants

$(BC)//(B'C')$ ssi $\widehat{C'A'D} = \widehat{CAD}$

Angles alternes-externes (plus rare)

$(BC)//(B'C')$ ssi $\widehat{D'A'B'} = \widehat{DAC}$

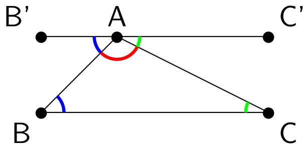
Somme des angles d'un triangle



Somme des angles d'un triangle

On a
$\widehat{ABC} + \widehat{BCA} + \widehat{CAB} = 180°$.

Somme des angles d'un triangle



Preuve

$(B'C')//(BC)$ passant par A.

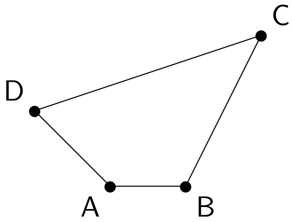
Angles alternes-internes :

- $\widehat{ABC} = \widehat{BAB'}$
- $\widehat{BCA} = \widehat{C'AC}$

$\widehat{C'AC} + \widehat{CAB} + \widehat{BAB'} = 180°$

D'où le résultat.

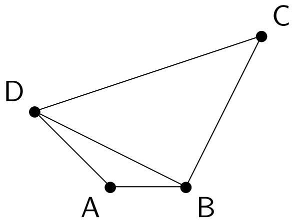
Somme des angles d'un quadrilatère



Somme des angles d'un quadrilatère

$\widehat{ABC} + \widehat{BCD} + \widehat{CDA} + \widehat{DAB} = 360°$.

Somme des angles d'un quadrilatère



Preuve

On découpe en triangles.

$\widehat{CDA} = \widehat{CDB} + \widehat{BDA}$

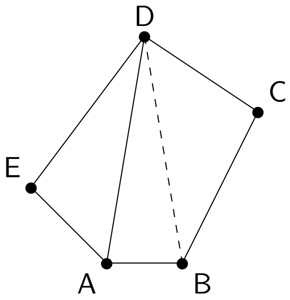
$\widehat{ABC} = \widehat{ABD} + \widehat{DBC}$

$\widehat{ABD} + \widehat{BDA} + \widehat{DAB} = 180°$

$\widehat{DBC} + \widehat{BCD} + \widehat{CDB} = 180°$

En sommant on a le résultat.

Somme des angles d'un polygone à n côtés



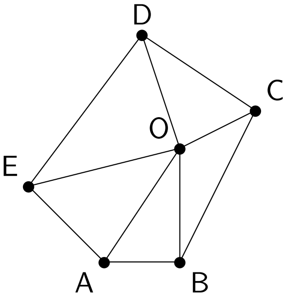
Somme des angles d'un n-gone

Dans un polygone à $n \geq 3$ côtés, la somme des angles est $(n-2) \times 180°$.

Preuve

On découpe en un triangle et un $(n-1)$-gone.
On recommence sur le $(n-1)$-gone jusqu'à avoir des triangles.
On découpe ainsi en $(n-2)$ triangles.

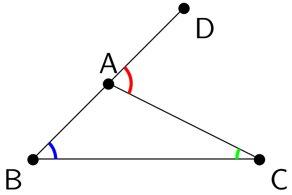
Somme des angles d'un polygone à n côtés



Preuve alternative

On prend O à l'intérieur. On trace les n triangles. La somme des angles des triangles vaut la somme des angles du n-gone plus 360° (le tour complet autour de O). Donc la somme des angles du n-gone est $(n-2) \times 180^\circ$.

Angle extérieur



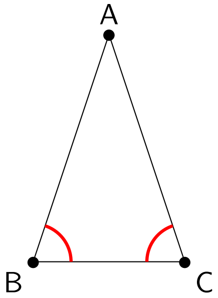
Angle extérieur

On a $\widehat{CAD} = \widehat{CBA} + \widehat{ACB}$.

Preuve

$$\widehat{CAD} = 180° - \widehat{BAC}$$
$$\widehat{BAC} = 180° - (\widehat{CBA} + \widehat{ACB})$$

Angles dans un triangle isocèle



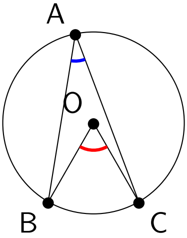
Angles triangle isocèle

ABC isocèle en A $(AB = AC)$ si et seulement si $\widehat{ABC} = \widehat{BCA}$

Cas particulier

Dans un triangle équilatéral, tous les angles valent 60° (ils sont tous égaux et leur somme est 180°).

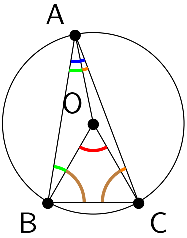
Angle au centre



Théorème de l'angle au centre

On a $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC}$.

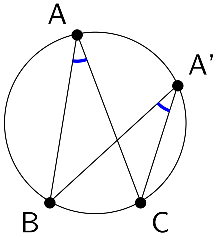
Angle au centre



Preuve

BOC, COA, AOB isocèles en O.
D'où $\widehat{BAC} = \widehat{BAO} + \widehat{OAC}$
$\widehat{BAC} = \widehat{ABO} + \widehat{ACO}$
Or $\widehat{BOC} = 180° - 2\widehat{OBC}$
$2\widehat{BAO} + 2\widehat{OAC} + 2\widehat{CBO} = 180°$
Alors $\widehat{BOC} = 2(\widehat{ABO} + \widehat{ACO})$
Donc $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC}$.

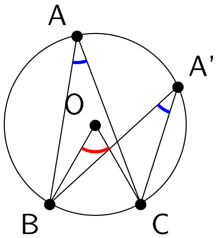
Angle inscrit



Théorème de l'angle inscrit

On a $\widehat{BAC} = \widehat{BA'C}$.

Angle inscrit



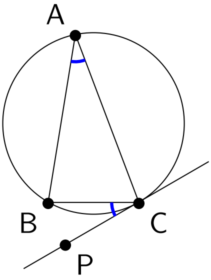
Preuve

Par angle au centre on a :

- $\widehat{BAC} = \dfrac{\widehat{BOC}}{2}$
- $\widehat{BA'C} = \dfrac{\widehat{BOC}}{2}$

Donc $\widehat{BAC} = \widehat{BA'C}$.

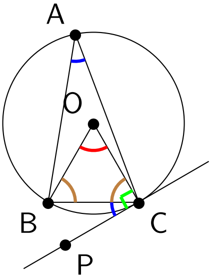
Angle tangentiel



Théorème de l'angle tangentiel

On a $\widehat{BAC} = \widehat{BCP}$.

Angle tangentiel



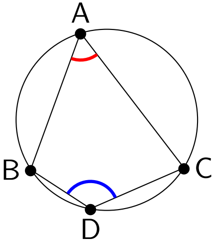
Preuve

On a $\widehat{PCO} = 90°$.
Donc $\widehat{BCP} = 90° - \widehat{OCB}$.
Or $\widehat{BOC} = 180° - 2\widehat{OCB}$.
Donc

$$\widehat{BCP} = 90° - \left(90° - \frac{\widehat{BOC}}{2}\right).$$

Par angle au centre
$\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC}$.
Donc $\widehat{BCP} = \widehat{BAC}$.

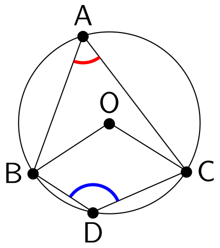
Angles opposés sur un cercle



Somme des angles opposés

Si A, B, D, C sont cocycliques, c'est-à-dire sur un même cercle (on dit aussi $ABDC$ cyclique), alors :
$\widehat{BAC} + \widehat{BDC} = 180°$

Angles opposés sur un cercle



Preuve

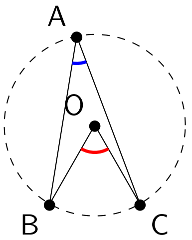
Par angle au centre :

$\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC}$

$360° - \widehat{BOC} = 2\widehat{BDC}$

D'où le résultat.

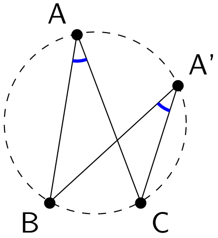
Réciproque de l'angle au centre



Réciproque de l'angle au centre

Si $OB = OC$ et $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC}$, alors O est le centre du cercle circonscrit à ABC.

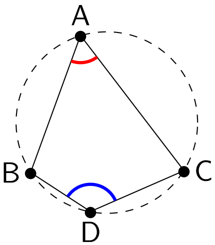
Réciproque de l'angle inscrit



Réciproque de l'angle inscrit

Si $\widehat{BAC} = \widehat{BA'C}$ alors les points B, C, A', A sont cocycliques.

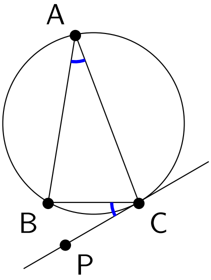
Réciproque des angles opposés



Réciproque des angles opposés

Si $\widehat{BAC} + \widehat{BDC} = 180°$ alors A, B, D, C sont cocycliques.

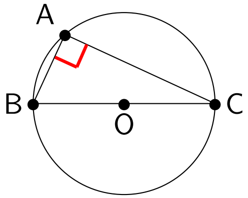
Réciproque de l'angle tangentiel



Réciproque de l'angle tangentiel

Si $\widehat{BAC} = \widehat{BCP}$ alors la droite (CP) est tangente au cercle en P.

Situation classique



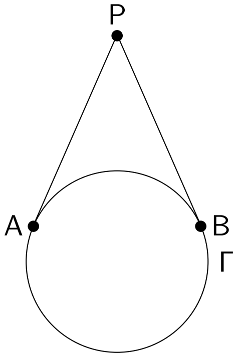
Triangle rectangle

$[BC]$ est un diamètre du cercle circonscrit à ABC si et seulement si BAC est rectangle en A.

Preuve

Si $[BC]$ diamètre : par angle au centre $2\widehat{BAC} = \widehat{BOC} = 180°$ donc $\widehat{BAC} = 90°$, et réciproquement.

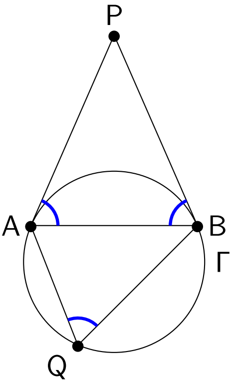
Exercice 1



Exercice 1

Soit un cercle Γ et P un point à l'extérieur de Γ. Soient A et B sur Γ tels que les droites (PA) et (PB) sont les deux tangentes à Γ passant par P. Montrer que PAB est isocèle en P.

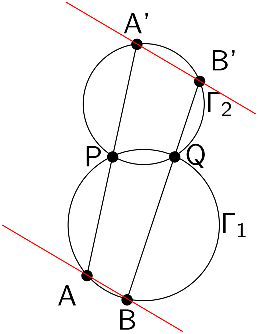
Solution exercice 1



Solution exercice 1

Soit Q un point sur Γ. Par angle tangentiel $\widehat{BAP} = \widehat{BQA} = \widehat{ABP}$ donc PAB est isocèle en P.

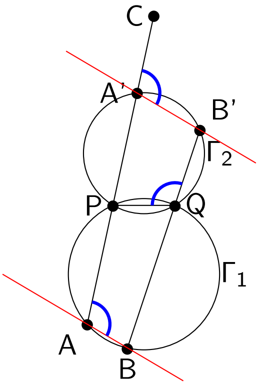
Exercice 2



Exercice 2

Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles s'intersectant en deux points P et Q. Une droite passant par P coupe Γ_1 en $A \neq P$ et Γ_2 en $A' \neq P$. Une droite passant par Q coupe Γ_1 en $B \neq Q$ et Γ_2 en $B' \neq Q$. Montrer que (AB) et $(A'B')$ sont parallèles.

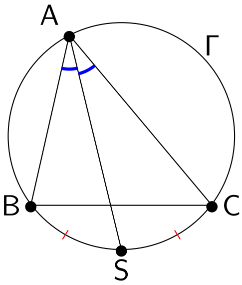
Solution exercice 2



Solution exercice 2

Par angles opposés $\widehat{BQP} = 180° - \widehat{BAP}$. Donc $\widehat{B'QP} = \widehat{BAP}$. De même $\widehat{B'QP} = \widehat{B'A'C}$. Donc $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C}$. Par angles correspondants, $(AB)//(A'B')$.

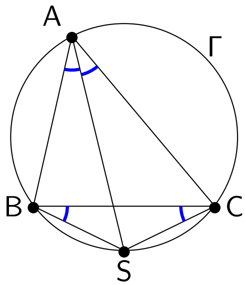
Exercice 3



Exercice 3 (Théorème du Pôle Sud)

Soit ABC un triangle de cercle circonscrit Γ. La bissectrice de $\widehat{BAC}$ coupe Γ en $S \neq A$. Montrer que S est le milieu de l'arc $\overset{\frown}{BC}$.

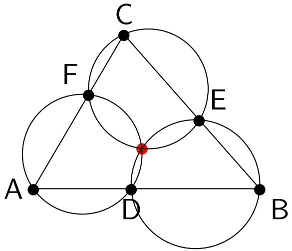
Solution exercice 3



Solution exercice 3

Par angle inscrit $\widehat{SCB} = \widehat{SAB}$ et $\widehat{SBC} = \widehat{SAC}$. Comme $\widehat{SAC} = \widehat{SAB}$ alors $\widehat{SBC} = \widehat{SCB}$. Donc SBC est isocèle en S, d'où le résultat.
En particulier la bissectrice de $\widehat{BAC}$ et la médiatrice de $[BC]$ se coupent sur le cercle circonscrit à ABC.

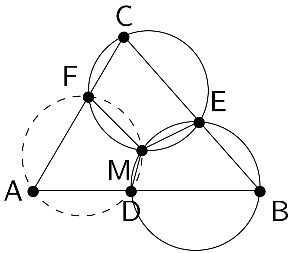
Exercice 5



Exercice 5 (Théorème de Miquel)

Soit ABC un triangle et D, E, F trois points respectivement sur $[AB], [BC], [CA]$. Montrer que les cercles circonscrits aux triangles BDE, CEF et AFD ont un point commun.

Solution exercice 5



Solution exercice 5

M intersection cercles BDE, CEF. But : A, F, M, D cocycliques. On a $\widehat{FME} = 180° - \widehat{ACB}$ et $\widehat{DME} = 180° - \widehat{CBA}$. Or $\widehat{FMD} = 360° - \widehat{FME} - \widehat{DME}$. Donc $\widehat{FMD} = \widehat{ACB} + \widehat{CBA} = 180° - \widehat{BAC}$, d'où $\widehat{FMD} + \widehat{FAD} = 180°$, comme voulu.