PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 1 : GÉOMÉTRIE
À RENVOYER AU PLUS TARD LE 10 DÉCEMBRE 2022

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe junior est constitué des élèves nés en 2008 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe senior.
- Les exercices classés “Juniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés “Seniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Exercices Juniors

Exercice 1. Soient ω et Ω deux cercles concentriques (c'est-à-dire qu'ils ont le même centre) de sorte que le cerlce ω à l'intérieur du cercle Ω. Soient X et Y deux points sur le cercle ω. On note P et Q les points d'intersection respectifs du cercle Ω avec les tangentes en X et Y à ω, de telle sorte que P et Q soient du même côté par rapport à la droite (XY). Montrer que les points X, Y, P et Q sont cocycliques.

Exercice 2. Soit ABC un triangle avec $\widehat{BAC} = 60°$. Soient D et E les pieds des bissectrices issues respectivement des sommets B et C. Soit I le point d'intersection des droites (BD) et (CE). Montrer que les points A, I, D et E sont cocycliques.

Exercice 3. Soit ABC un triangle dont O est le centre du cercle circonscrit. On note ℓ une droite perpendiculaire à la droite (AO). La droite (ℓ) intersecte les côtés (AB) et (AC) en les points D et E. Montrer que les points B, C , E et D sont cocycliques.

Exercice 4. Soient ω_1 et ω_2 deux cercles disjoints. Une tangente commune extérieure à ces deux cercles coupe ω_1 en A et ω_2 en B. La deuxième tangente commune extérieure à ces deux cercles coupe ω_1 en D et ω_2 en C. La droite (BD) coupe ω_1 en le point P autre que D et ω_2 en le point Q autre que B. Montrer que $BQ = DP$.

Exercice 5. Soit ABC un triangle acutangle avec $AB < AC < BC$ et soit Ω son cercle circonscrit. Soient D et E les points diamètralement opposés respectivement aux points B et C dans le cercle Ω. Le cercle de centre A et de rayon AE intersecte $[AC]$ en K. Le cercle de centre A et de rayon AD coupe (BA) en L (de telle sorte A se trouve entre B et L). Montrer que les droites (EK) et (DL) se coupe sur le cercle Ω .

Exercice 6. Soit ABC un triangle avec $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 40°$. La bissectrice issue du sommet B coupe la droite (AC) au point D. Montrer que $BD + DA = BC$.

Exercice 7. Soit ABC un triangle. On note D et E les milieux respectifs des côtés AB et AC. Soit O le centre du cercle circonscrit du triangle ABC. On note K le point d'intersection des droites (OE) et (BC). On note L le deuxième point d'intersection de la droite (OD) avec le cercle circonscrit au triangle OKB. On note F la projection orthogonale de A sur le droite (KL). Montrer que les points D, E et F sont alignés.

Exercice 8. Soit ABC un triangle dont les angles sont aigus, ω son cercle circonscrit et O le centre de ω. La perpendiculaire issue de A par rapport à (BC) intersecte (BC) en D et ω en E. Soit F un point sur le segment $[AE]$ tel que $2 \cdot FD = AE$. Soit ℓ la perpendiculaire à (OF) passant par F. Montrer que la droite ℓ, la droite (BC) et la tangente à ω en E sont concourantes.

Exercice 9. Soit ABC un triangle équilatéral. Soit X un point de la droite (BC) différent de B et C. Soient Y et Z deux points sur les droites (AB) et (AC) de telle sorte que les deux droites (BZ) et (CY) sont parallèles à la droite (AX). La droite (XY) intersecte la droite (AC) en M et la droite (XZ) intersecte la droite (AB) en N. Montrer que la droite (MN) est tangente au cercle inscrit de ABC.

Exercices Seniors

Exercice 10. Soit ABC un triangle avec $\widehat{BAC} = 60°$. Soient D et E les pieds des bissectrices issues respectivement des sommets B et C. Soit I le point d'intersection des droites (BD) et (CE). Montrer que les points A, I, D et E sont cocycliques.

Exercice 11. Soit ABC un triangle, L, M et N les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. On suppose que $\widehat{ANC} = \widehat{ALB}$. Montrer que $\widehat{CAL} = \widehat{ABM}$.

Exercice 12. Soit ABC un triangle acutangle. Soient P et Q deux points sur le segment $[BC]$. On note respectivement O_1, O_2, O_3 et O_4 les centres des cercles circonscrits des triangles ABP, ABQ, ACP et ACQ. Montrer que les points O_1, O_2, O_3 et O_4 sont cocycliques si et seulement si $\widehat{BAP} = \widehat{QAC}$.

Exercice 13. Soit ABC un triangle. Soit t la tangente en A au cercle circonscrit du triangle ABC. On note A' le point de t de telle sorte que la droite (BC) coupe le segment $[AA']$ en son milieu. On note C' le symétrique de C par rapport à t. Montrer que les points B, A, C' et A' sont cocycliques.

Exercice 14. Soit ABC un triangle non isocèle en A et I le centre de son cercle inscrit. On note D le point de la droite (BC) tel que $\widehat{DIA} = 90°$. On note E le pied de la hauteur issue de I dans le triangle ADI. Montrer que le point E est sur le cercle circonscrit du triangle ABC.

Exercice 15. Soit ABC un triangle et Ω son cercle circonscrit. On note X le point d'intersection des tangentes à Ω en B et C. On note φ l'angle $\widehat{BAX}$ et μ l'angle $\widehat{XAC}$. On note Y le point de la droite (AX) tel que $\widehat{ACY} = \varphi$. Montrer que $\widehat{ABY} = \mu$.

Exercice 16. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe tel que $AC = BD$ et tel que les côtés AB et CD ne sont pas parallèles. Soit P le point d'intersection des diagonales (AC) et (BD). Soient E et F des points respectivement sur les segments $[BP]$ et $[AP]$ tels que $PC = PE$ et $PD = PF$. Montrer que le cercle circonscrit au triangle formé par les droites (AB), (CD) et (EF) est tangent au cercle circonscrit au triangle ABP.

Exercice 17. Soit ABC un triangle et H son orthocentre. On note ℓ_1 et ℓ_2 deux droites passant par H et perpendiculaire entre elles. On note X_1, Y_1 et Z_1 les points d'intersection de ℓ_1 avec les droites (BC), (CA) et (AB) respectivement. On note également X_2, Y_2 et Z_2 les points d'intersection de ℓ_2 avec les droites (BC), (CA) et (AB) respectivement. Montrer que les milieux des segments $[X_1X_2]$, $[Y_1Y_2]$ et $[Z_1Z_2]$ sont alignés.

Exercice 18. Soit ABC un triangle et ω son cercle inscrit dont les points de tangence sur $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ sont respectivement D, E et F. On note Ω le cercle tangent à ω et passant par B et C et T le point de tangence de ces deux cercles. On note X et Y les milieux des segments $[DE]$ et $[DF]$. On note U et V les seconds points d'intersection des droites (TX) et (TY) avec Ω. On note également Z et W les seconds points d'intersection des droites (AB) et (AC) avec Ω. Montrer que (ZU), (WV), (XY) et la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ sont concourantes.