- Triangles Semblables : définition et propriétés -

Définition 1 (Triangles semblables)**.** Deux triangles $\triangle ABC$ et $\triangle A'B'C'$ sont dits semblables (noté $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$) si et seulement si on a les trois égalités d'angles suivantes :

$$\widehat{A} = \widehat{A'}$$
$$\widehat{B} = \widehat{B'}$$
$$\widehat{C} = \widehat{C'}.$$

Comme la somme des angles d'un triangle vaut toujours $180°$, il suffit que deux des paires soient égales.

Propriété 2. Deux triangles semblables $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ vérifient les relations suivantes :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}.$$

Si de plus ces ratios valent 1 (ou -1 si l'on travaille avec des longueurs orientées), alors on dit que ces triangles sont *isométriques*.

La propriété ci-dessus est en fait une équivalence : si les trois ratios sont égaux, alors les triangles sont semblables. Plus généralement, les points suivants sont équivalents :

1. $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$;
2. Au moins deux des trois relations d'angles tiennent ;
3. Les trois ratios de côtés sont égaux ;
4. Deux ratios de côtés sont égaux ET l'angle entre les côtés concernés sont égaux.

Dans ce qui suit, on ne suppose aucune connaissance avancée en géométrie olympique. La chasse aux angles suffit.

- Résultats classiques -

Exercice 1 (Théorème de Thalès)**.** Comprendre le théorème de Thalès à l'aide des triangles semblables.

Exercice 2 (Théorème de Pythagore)**.** Soit $\triangle ABC$ rectangle en A. En posant H le pied de la hauteur issue de A, redémontrer le théorème de Pythagore à l'aide des triangles semblables.

Exercice 3 (Théorème de la bissectrice)**.** Soit $\triangle ABC$ et D le pied de sa bissectrice issue de A. Montrer que

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD}.$$

Exercice 4 (Puissance d'un point)**.** Soit P un point en dehors d'un cercle $\mathcal{C}$. Soit A, B les points d'intersection d'une droite d passant par P avec $\mathcal{C}$. Soit de même C, D les points d'intersection d'une droite d' passsant par P avec $\mathcal{C}$. Montrer que

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$

Que dire si P est à l'intérieur du cercle ?

Remarque 3. On se convainc facilement que toutes les réciproques des théorèmes ci-dessus sont vraies. Cela nous donnes des outils pour montrer des propriétés importantes : si des droites sont parallèles, si un triangle est rectangle, si une droite est la bissectrice, et enfin si des points sont cocycliques.

- Exercices -

Exercice 5. Soient $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ deux cercles de centres respectifs O_1 et O_2, qui s'intersectent en deux points X, Y. Soit A un point de $\mathcal{C}_1$ et B l'intersection, autre que Y, de (AY) avec $\mathcal{C}_2$. Montrer que $\triangle XO_1O_2 \sim \triangle XAB$.

Exercice 6. Soit $\triangle ABC$ acutangle, D et E les pieds des hauteurs issues de B et C respectivement. Soient F et G les pieds des perpendiculaires (BF) et (CG) à la droite (DE). Montrer que $EF = DG$.

Exercice 7. Soit $\triangle ABC$ iscrit dans un cercle $\mathcal{C}$, S le milieu (opposé à A) de l'arc BC, et D l'intersection de (AS) avec (BC). Montrer que (SB) est tangente au cercle circonscrit à $\triangle ABD$.

Exercice 8. Soit $\triangle ABC$, A_1, B_1, C_1 les milieux des côtés opposés. Soit G le centre de gravité du triangle. La droite parallèle à (BB_1) passant par A intersecte B_1C_1 en F. Montrer que les triangles $\triangle ABC$ et $\triangle FAA_1$ sont semblables si et seulement si les points A, B_1, G, C_1 sont cocycliques.