

Introduction aux nombres complexes en géométrie

13 novembre 2022

Références :

- “cours complet de géométrie analytique” (sur le site de la POFM)
- Euclidian Geometry in Mathematical Olympiads, (Evan Chen)

1 Exercices autour du cours

1.1 Autour des similitudes

Exercice 1. Soient les points A, B, C, D , trouver le centre de la similitude qui envoie A sur C et B sur D .

Exercice 2. Montrer que ABC forme un triangle équilatéral si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.

Exercice 3. (Théorème de Napoléon) Soit ABC un triangle. On construit trois triangles équilatéraux BCD, BAE, ACF à l'extérieur du triangle ABC et on note leurs centres X, Y, Z . Montrer que XYZ forme un triangle équilatéral.

1.2 Autour du cercle unité

Exercice 4. Soit A, B sur le cercle unité. Montrer que P est sur la corde (AB) si et seulement si $p + ab\bar{p} = a + b$.

Exercice 5. Soit A, B, C, D sur le cercle unité. Montrer que AD perpendiculaire à BC si et seulement si $ad + bc = 0$.

Exercice 6. (cercle à 9 points) Soit ABC un triangle, O le centre du cercle circonscrit, H l'orthocentre et N le milieu de $[OH]$. Montrer que N est à égale distance du milieu de BC , du milieu de AH et du projeté de A sur BC .

Exercice 7. Soient A, B, C, D cocycliques. On note H_A, H_B, H_C, H_D les orthocentres des triangles BCD, CDA, DAB et ABC . Montrer que $(AH_A), (BH_B), (CH_C)$ et (D, H_D) sont concourantes.

Exercice 8. Soit ABC un triangle et A', B', C' les points diamétralement opposés à A, B, C sur le cercle circonscrit. Soit P un point à l'intérieur de ABC et on note D, E, F les projetés orthogonaux de P sur respectivement BC, CA, AB . Soit X, Y, Z les réflexions de A, B, C par rapport à D, E, F respectivement. Montrer que XYZ est semblable au triangle ABC .

2 Problèmes

Problème 1. Montrer que cercle à 9 points (Exercice 6) et le cercle inscrit sont tangents.

Problème 2. Soit $ABCDEF$ un hexagone convexe tel que $\angle B + \angle D + \angle F = 360^\circ$ et

$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DE} \cdot \frac{EF}{FA} = 1.$$

Montrer que

$$\frac{BC}{CA} \cdot \frac{AE}{EF} \cdot \frac{FD}{DB} = 1.$$