Coupe Animath d'Automne

12 octobre 2022

Durée : 3 heures (collège), 4 heures (lycée).

Instructions

- ▷ Les exercices « collégiens » concernent les élèves scolarisés au collège.
  Les exercices « lycéens » concernent les élèves scolarisés au lycée.
  Chaque exercice est noté sur 7 points.

- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**

- ▷ **Pour les exercices 1 et 8,** seule une réponse numérique est attendue ; un résultat correct sans justification vaudra donc 7 points, tandis qu'un résultat incorrect sans justification vaudra 0 point. Cependant, si un raisonnement accompagne un résultat faux (ou pas de résultat), ce raisonnement sera lu et noté et pourra rapporter une partie des points de l'exercice.

- ▷ **À part dans les exercices 1 et 8,** on demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.

- ▷ Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.

- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.

- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  LES CALCULATRICES SONT INTERDITES, AINSI QUE TOUS LES INSTRUMENTS ÉLECTRONIQUES.
  Cela concerne en particulier l'usage de l'ordinateur, et donc de *Geogebra* et de logiciels de traitement de texte.

Après l'épreuve, merci de renvoyer les copies par voie électronique via le formulaire de dépôt disponible à l'adresse suivante :

`http://igm.univ-mlv.fr/~juge/animath/`

Association Animath,
Préparation Olympique Française de Mathématiques (POFM)

contact-pofm@animath.fr

Exercices collégiens

Exercice 1. Calculer

$$\frac{1 \times 2 \times 4 + 2 \times 4 \times 8 + 3 \times 6 \times 12 + 4 \times 8 \times 16}{1 \times 3 \times 9 + 2 \times 6 \times 18 + 3 \times 9 \times 27 + 4 \times 12 \times 36}$$

Seule une réponse numérique est attendue ici. La réponse doit être donnée sous la forme d'une fraction irréductible (c'est-à-dire sous la forme $\frac{a}{b}$ avec a et b deux entiers n'ayant aucun diviseur commun).

Exercice 2. Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $AB < BC$. Soit P le point de la droite (BC) situé en dehors du segment $[BC]$ tel que $BP = BA$. Soit Q le point de (AP) différent de A tel que $CQ = CA$. Si $\widehat{QPC} = x$, déterminer la mesure de l'angle $\widehat{PCQ}$ en fonction de x.

Exercice 3. Au tableau, Aline a écrit cinq entiers distincts qui vérifient la propriété suivante : quel que soit le choix de trois entiers distincts parmi ceux qui sont écrits, le produit des trois nombres choisis est divisible par 10. Montrer que l'un des cinq entiers écrits au tableau est divisible par 10.

Exercice 4. Soit $ABCD$ un rectangle. Soient M le milieu du segment $[BC]$ et N le milieu du segment $[CD]$. Soit P le point d'intersection des droites (BN) et (DM). Montrer que $\widehat{MAN} = \widehat{DPN}$.

Exercice 5. Soit n un entier positif impair et k un entier strictement positif. On suppose que le nombre de diviseurs positifs de $2n$ qui sont inférieurs ou égaux à k est impair. Montrer qu'il existe un diviseur d de $2n$ pour lequel $k < d \leqslant 2k$.

Exercice 6. Soit n un entier positif non nul. On suppose qu'il existe un ensemble de n droites distinctes dans le plan telles que chacune d'elles en intersecte exactement dix autres. Quelles sont les valeurs possibles pour n ?

Exercice 7. Soit $n \geqslant 3$ un entier strictement positif. Montrer que pour tous réels $x_1, \ldots, x_n$ strictement positifs, on a l'inégalité suivante :

$$1 < \frac{x_1}{x_1 + x_2} + \frac{x_2}{x_2 + x_3} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_{n-1} + x_n} + \frac{x_n}{x_n + x_1} < n - 1$$

Exercices lycéens

Exercice 8. Calculer

$$\sqrt{7+\sqrt{1+\sqrt{7+\sqrt{1+\sqrt{7+\sqrt{1+\sqrt{7+\sqrt{3+\sqrt{1}}}}}}}}}.$$

Seule une réponse numérique est attendue ici.

Exercice 9. Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $AB < BC$. Soit P le point de la droite (BC) situé en dehors du segment $[BC]$ tel que $BP = BA$. Soit Q le point de (AP) différent de A tel que $CQ = CA$. Si $\widehat{QPC} = x$, déterminer la mesure de l'angle $\widehat{PCQ}$ en fonction de x.

Exercice 10. Au tableau, Aline a écrit cinq entiers distincts qui vérifient la propriété suivante : quel que soit le choix de trois entiers distincts parmi ceux qui sont écrits, le produit des trois nombres choisis est divisible par 10. Montrer que l'un des cinq entiers écrits au tableau est divisible par 10.

Exercice 11. Les entiers $1, 2, \ldots, 20$ ont été arrangés autour d'un cercle, dans un certain ordre. Pour chacun de ces entiers k, Matthieu compte combien il y a d'entiers inférieurs à k parmi les 9 entiers qui suivent k lorsqu'on parcourt le cercle dans le sens des aiguilles d'une montre ; il en compte $A(k)$. Il compte aussi combien il y a d'entiers inférieurs à k parmi les 9 entiers qui suivent k lorsqu'on parcourt le cercle dans le sens inverse des aiguilles d'une montre ; il en compte $B(k)$. Matthieu note alors que $A(k) = B(k)$ pour tout k. Quel est le nombre diamétralement opposé à 11 sur le cercle ?

Exercice 12. Soit n un entier positif impair et k un entier strictement positif. On suppose que le nombre de diviseurs positifs de $2n$ qui sont inférieurs ou égaux à k est impair. Montrer qu'il existe un diviseur d de $2n$ pour lequel $k < d \leqslant 2k$.

Exercice 13. Soit $ABCD$ un quadrilatère tel que $AD = BC$, (AB) et (CD) sont parallèles, et $AB > CD$. Soit E le milieu de $[AC]$ et F le point d'intersection des diagonales (AC) et (BD). La parallèle à la droite (BD) passant par E coupe la droite (CD) au point G.

1) Montrer que le triangle CGA est rectangle en G.

2) On note $CD = b$ et $AB = a$. Calculer le rapport $\dfrac{EG}{CF}$ en fonction de a et b.

Exercice 14. Soit n un entier strictement positif et $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ des réels strictement positifs tels que $x_1 + \ldots + x_n = y_1 + \ldots + y_n = 1$. Montrer que

$$|x_1 - y_1| + \ldots + |x_n - y_n| \leqslant 2 - \min_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{x_i}{y_i} - \min_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{y_i}{x_i}$$

Pour tous réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} a_i$ désigne le plus petit des n nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Exercice 15. Soit n un entier strictement positif.

1) Déterminer, en fonction de n, le plus grand entier r possédant la propriété suivante : pour tous réels $a_1, \ldots, a_n$, il existe r entiers $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leqslant n$ tels que pour tous entiers k, ℓ vérifiant $1 \leqslant k, \ell \leqslant r$, $a_{i_k} - a_{i_\ell} \neq 1$.

2) Soit α un nombre irrationnel. Déterminer, en fonction de n, le plus grand entier r possédant la propriété suivante : pour tous réels $a_1, \ldots, a_n$, il existe r entiers $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leqslant n$ tels que pour tous entiers k, ℓ vérifiant $1 \leqslant k, \ell \leqslant r$, $a_{i_k} - a_{i_\ell} \neq 1$ et $a_{i_k} - a_{i_\ell} \neq \alpha$.

Un nombre irrationnel est un réel qui ne peut pas s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$, où a et b sont des entiers et $b \neq 0$.