Association pour l'animation mathématique

Préparation Olympique POFM Mathématiques

Coupe Animath d'Automne

12 octobre 2022

Durée : 3 heures (collège), 4 heures (lycée).

Instructions

- ▷ Les exercices « collégiens » concernent les élèves scolarisés au collège.
  Les exercices « lycéens » concernent les élèves scolarisés au lycée.
  Chaque exercice est noté sur 7 points.

- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**

- ▷ **Pour les exercices 1 et 8,** seule une réponse numérique est attendue ; un résultat correct sans justification vaudra donc 7 points, tandis qu'un résultat incorrect sans justification vaudra 0 point. Cependant, si un raisonnement accompagne un résultat faux (ou pas de résultat), ce raisonnement sera lu et noté et pourra rapporter une partie des points de l'exercice.

- ▷ **À part dans les exercices 1 et 8,** on demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.

- ▷ Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.

- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.

- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  LES CALCULATRICES SONT INTERDITES, AINSI QUE TOUS LES INSTRUMENTS ÉLECTRONIQUES.
  Cela concerne en particulier l'usage de l'ordinateur, et donc de *Geogebra* et de logiciels de traitement de texte.

Après l'épreuve, merci de renvoyer les copies par voie électronique via le formulaire de dépôt disponible à l'adresse suivante :

`http://igm.univ-mlv.fr/~juge/animath/`

Association Animath,
Préparation Olympique Française de Mathématiques (POFM)

contact-pofm@animath.fr

Exercices collégiens

Exercice 1. Calculer

$$\frac{1\times 2\times 4+2\times 4\times 8+3\times 6\times 12+4\times 8\times 16}{1\times 3\times 9+2\times 6\times 18+3\times 9\times 27+4\times 12\times 36}$$

Seule une réponse numérique est attendue ici. La réponse doit être donnée fractions sous la forme d'une fraction irréductible (c'est-à-dire sous la forme $\frac{a}{b}$ avec a et b deux entiers n'ayant aucun diviseur commun).

Solution de l'exercice 1 Plutôt que de calculer le numérateur et le dénominateur, on peut remarquer que les termes de la somme du numérateur sont les nombres $i\times(2i)\times(4i)=8i^3$ pour $1\leq i\leq 4$ et que les termes de la somme du dénominateur sont les nombres $i\times(3i)\times(9i)=27i^3$ pour $1\leq i\leq 4$.

En simplifiant au numérateur et au dénominateur par le nombre $(1^3+2^3+3^3+4^3)$, on obtient la fraction irréductible $\frac{8}{27}$.

La réponse attendue est donc $\frac{8}{27}$.

Solution alternative n°1 On peut simplifier directement la fraction en faisant à la main tous les calculs :

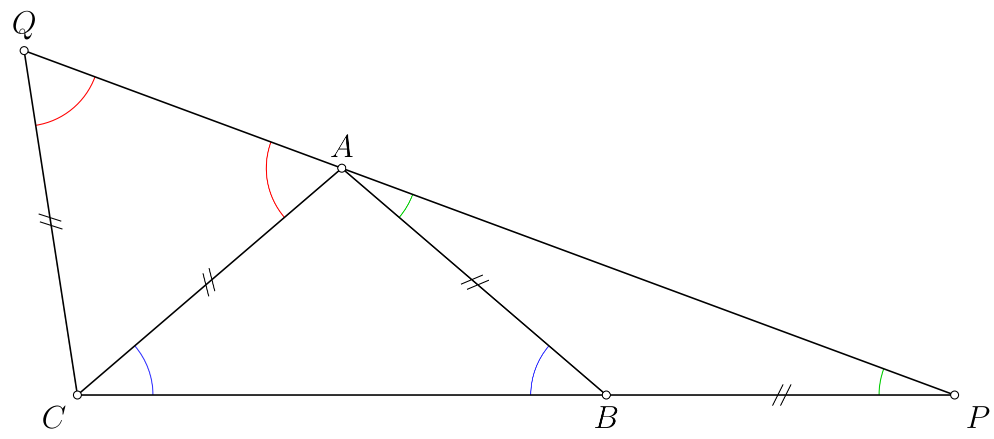
$$\begin{aligned}\frac{1\times 2\times 4+2\times 4\times 8+3\times 6\times 12+4\times 8\times 16}{1\times 3\times 9+2\times 6\times 18+3\times 9\times 27+4\times 12\times 36} &= \frac{8+64+216+512}{27+216+729+1728}\\ &= \frac{800}{2700}=\frac{8}{27}\end{aligned}$$

La réponse attendue est donc $\frac{8}{27}$.

Commentaire des correcteurs : Malheureusement, seule la moitié des élèves a donné la bonne réponse à ce premier exercice. On trouve un nombre important d'erreurs (parfois grossières) dans les simplifications de fractions, et beaucoup d'erreurs de calcul parviennent à se glisser dans les raisonnements

Exercice 2. Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $AB < BC$. Soit P le point de la droite (BC) situé en dehors du segment $[BC]$ tel que $BP = BA$. Soit Q le point de (AP) différent de A tel que $CQ = CA$. Si $\widehat{QPC} = x$, quelle est la mesure de l'angle $\widehat{PCQ}$?

Solution de l'exercice 2



Dans cet exercice, il faut écrire consciencieusement toutes les équations qui traduisent les hypothèses de l'énoncé.

Ici, les triangles QCA, BAC et PBQ sont isocèles donc les angles de leurs bases sont égaux, ce qui donne $\widehat{CQA} = \widehat{CAQ}$, $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ et $\widehat{BAP} = \widehat{BPA}$.

On commence par décomposer l'angle $\widehat{PCQ}$ en les angles $\widehat{QCA}$ et $\widehat{ACB}$, et l'on exprime séparément ces angles en fonction de x.

D'une part, puisque les points C, B et P sont alignés, on a :

$$\widehat{ACB} = \widehat{ABC} = 180° - \widehat{ABP} = \widehat{BAP} + \widehat{BPA} = 2x$$

D'autre part, puisque les points P, A et Q sont alignés et puisque la somme des angles dans le triangle BAC vaut $180°$, on a

$$\widehat{QAC} = 180° - \widehat{BAC} - \widehat{BAP} = \widehat{ACB} + \widehat{ABC} - \widehat{BAP} = 2x + 2x - x = 3x$$

On peut alors calculer l'angle $\widehat{QCA}$ en fonction de l'angle x, en se plaçant dans le triangle QCA :

$$\widehat{QCA} = 180° - \widehat{CQA} - \widehat{QAC} = 180° - 2\widehat{QAC} = 180° - 6x$$

Finalement, on peut conclure

$$\widehat{PCQ} = \widehat{QCA} + \widehat{ACP} = 180° - 6x + 2x = 180° - 4x$$

Commentaire des correcteurs : Le problème était loin d'être évident et nécessitait un effort d'organisation dans la chasse aux angles à effectuer, pour ne pas tourner en rond. Un tier des élèves est parvenu à compléter l'exercice. Les erreurs les plus courantes ne sont pas mathématiques mais sont plutôt des erreurs de lecture d'énoncé et d'inattention, que nous détaillons ici :

- On a déploré beaucoup de mauvaises figures. Les points n'étant pas disposés de la manière indiquée par l'énoncé, les élèves travaillant avec le mauvais énoncé ne pouvaient donc pas arriver au bon résultat. L'équipe de correction s'est montrée plutôt indulgente et a cherché à valoriser la méthode employée, même si elle était appliquée à la mauvaise figure. Mais des points ont inévitablement été perdus et il y en aurait encore plus dans le cadre d'une compétition.

- ▷ Toujours dans les mauvaises lectures d'énoncé, beaucoup d'élèves ont supposés que QAC était isocèle en A et non en C, ce qui empêche encore une fois de trouver la bonne réponse. D'autres se sont arrêtés au calcul de $\widehat{ACQ}$, alors que l'énoncé demandait l'angle $\widehat{PCQ}$. Il restait donc encore une petite étape, mais des points sont à nouveau perdus.
- ▷ Quelques erreurs de calcul dans les toutes dernières étapes, qui rappellent l'importance de la relecture de sa solution.

Exercice 3. Au tableau, Aline a écrit cinq entiers distincts qui vérifient la propriété suivante : quelque soit le choix de trois entiers distincts parmi ceux qui sont écrits, le produit des trois nombres choisis est divisible par 10. Montrer que l'un des cinq entiers écrits au tableau est divisible par 10.

Solution de l'exercice 3 Notons que $10 = 2 \times 5$.

Supposons que parmi les cinq entiers, il en existe trois, disons a, b et c, qui soient impairs. Alors abc est impair et n'est donc pas divisible par 10, ce qui contredit l'énoncé. Ainsi, il y a au plus deux entiers impairs parmi les cinq entiers.

De même, si l'on suppose que parmi les cinq entiers il en existe trois, disons d, e et f, qui ne soient pas divisibles par 5, alors le produit def n'est pas divisible par 5 et donc il n'est pas divisible par 10. Ainsi, il y a au plus deux entiers qui ne sont pas divisibles par 5 parmi les cinq entiers d'Anna.

Puisqu'il y a 5 entiers, qu'au plus 2 d'entre eux ne sont pas divisibles par 2 et qu'au plus 2 d'entre eux ne sont pas divisibles par 5, au moins $5 - 2 - 2 = 1$ des entiers est divisible à la fois par 2 et par 5. Cet entier est donc divisible par 10.

Solution alternative n°1 On note a_1, a_2, a_3, a_4 et a_5 les cinq entiers écrits au tableau.

Supposons par l'absurde qu'aucun de ces entiers n'est divisible par 10.

Puisque 10 divise $a_1a_2a_3$, 2 divise l'un des facteurs. Quitte à renuméroter les entiers, on peut supposer qu'il s'agit de a_1. De même, 5 divise l'un des facteurs a_1, a_2 et a_3. Comme 10 ne divise pas a_1 et 2 divise a_1, 5 ne peut diviser a_1. Une fois de plus, quitte à renuméroter les entiers, on peut supposer que 5 divise a_2. De plus 2 ne peut diviser a_2, sinon a_2 serait divisible par 10.

Par le même raisonnement, puisque 10 divise $a_1a_4a_5$, deux des entiers a_1, a_4 et a_5, disons a_4 et a_5 vérifient que 2 divise a_4 mais pas a_5 et 5 divise a_5 mais pas a_4.

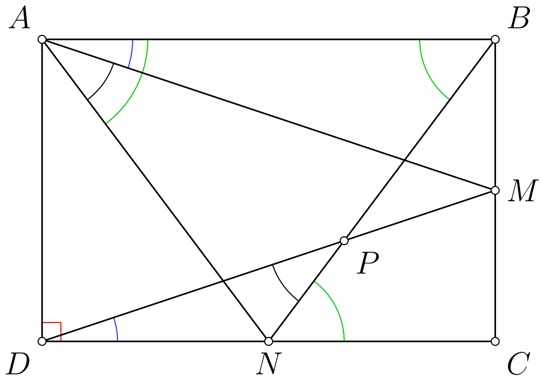
Puisque le produit $a_1a_2a_4$ est divisible par 10 et que 5 ne divise ni a_2 ni a_4, on déduit que 5 divise a_1. Puisque le produit $a_1a_3a_5$ est divisible par 10 et que 2 ne divise ni a_3 ni a_5, 2 divise a_1.

Ainsi, 2×5 divise a_1, ce qui contredit notre hypothèse de départ. On a donc une contradiction et il existe bien un entier divisible par 10.

Commentaire des correcteurs : L'idée générale est souvent comprise dans ce problème. Toutefois, même avec la bonne idée, les élèves perdent beaucoup de points pour avoir mal exprimé et ou mal mis en oeuvre leur raisonnement, car c'est là que résidait une partie de la difficulté de l'exercice. En particulier, beaucoup d'élèves se placent implicitement dans la configuration qui les arrange, à savoir le cas où tous les nombres sont multiples de 2 ou 5, sans justification. Nous félicitons les élèves qui sont parevnus à rédiger parfaitement l'exercice.

Exercice 4. Soit $ABCD$ un rectangle. On note M le milieu du segment $[BC]$ et N le milieu du segment $[CD]$. Soit P le point d'intersection des droites (BN) et (DM). Montrer que $\widehat{MAN} = \widehat{DPN}$.

Solution de l'exercice 4



Puisque $ABCD$ est un rectangle, il est symétrique par rapport à la médiatrice du segment $[BC]$. Puisque le point M est sur cette médiatrice et puisque la symétrie axiale conserve les angles, on a $\widehat{MAB} = \widehat{MDC}$.

De même, le rectangle $ABCD$ est symétrique par rapport à la médiatrice du segment $[DC]$ et puisque N est sur cette médiatrice, $\widehat{NAB} = \widehat{NBA}$.

On a alors

$$\widehat{DPN} = 180° - \widehat{PND} - \widehat{PDN} = \widehat{BNC} - \widehat{MDC} = \widehat{BNC} - \widehat{MAB}$$

Puisque les droites (AB) et (CD) sont parallèles, $\widehat{BNC} = \widehat{ABN} = \widehat{NAB}$. On déduit que

$$\widehat{DPN} = \widehat{BNC} - \widehat{MAB} = \widehat{NAB} - \widehat{MAB} = \widehat{MAN}$$

ce qui est l'égalité voulue.

Commentaire des correcteurs : Le problème a été plutôt bien abordé, on a pu voir beaucoup de solutions complètes. Bien souvent, ce qui a pausé problème aux les élèves est la rédaction et le manque de justification des égalités établies. Il fallait exploiter et explicitement citer les hypothèses de l'énoncé lorsque l'on donnait des égalités d'angles qui aurait été fausses si $ABCD$ était un quadrilatère autre qu'un rectangle.

Exercice 5. Soit n un entier positif impair et k un entier strictement positif. On suppose que le nombre de diviseurs positifs de $2n$ qui sont inférieurs ou égaux à k est impair. Montrer qu'il existe un diviseur d de $2n$ pour lequel $k < d \leqslant 2k$.

Solution de l'exercice 5 On commence par étudier les contraintes que doit vérifier un tel diviseur d. Tout d'abord, on observe que si d vérifie la propriété voulue, $\dfrac{d}{2} \leqslant k$. De plus, si d est pair et divise $2n$, alors $\dfrac{d}{2}$ divise n. Ceci nous encourage donc à plutôt chercher un diviseur d' de n inférieur ou égal à k tel que $2d' > k$. Si un tel nombre n'existe pas, cela veut dire que tout diviseur $d' \leqslant k$ de n vérifie également que $2d' \leqslant k$. Cette observation motive la preuve qui suit.

Puisque n est un entier impair, tous ses diviseurs sont également impairs. Notons $d_1, \ldots, d_r$ les diviseurs positifs de n qui sont inférieurs ou égaux à k et supposons par l'absurde que, pour tout i, on ait également $2d_i \leqslant k$.

Notons que les paires $(d_i, 2d_i)$ sont alors deux à deux disjointes. En effet, si deux indices i et j vérifient que $d_j \in \{d_i, 2d_i\}$, puisque d_j est impair il est égal à d_i. De même, si $2d_j \in \{d_i, 2d_i\}$, $2d_j = 2d_i$ et $d_i = d_j$. D'autre part, tout diviseur positif de $2n$ inférieur ou égal à k est soit un diviseur de n donc il s'agit de l'un des d_i, soit c'est le double d'un diviseur de n et donc il s'agit de l'un des $2d_i$.

Ainsi, les paires $(d_i, 2d_i)$ partitionnent l'ensemble des diviseurs positifs de $2n$ inférieurs ou égaux à k. Mais alors cela signifie que le nombre de diviseurs positifs de $2n$ inférieurs ou égaux à k est pair, ce qui contredit l'hypothèse de l'énoncé.

Il existe donc un indice i tel que $2d_i > k$. Puisque $d_i \leqslant k$, on a $2d_i \leqslant 2k$. Ainsi, l'entier $2d_i$ est un diviseur de $2n$ tel que $k < 2d_i \leqslant 2k$, ce qui est le résultat voulu.

Solution alternative n°1 On raisonne par l'absurde en supposant qu'il n'existe pas de diviseur d de $2n$ tel que $k < d \leqslant 2k$: c'est-à-dire que si d est un diviseur de $2n$ tel que $d \leqslant 2k$ alors $d \leqslant k$.

Puisque n est un entier impair, tous ses diviseurs sont également impairs. Les diviseurs de $2n$ sont donc exactement les diviseurs de n et les doubles de diviseurs de n.

Notons $d_1, d_2, \ldots, d_r$ les diviseurs distincts de n qui sont inférieurs ou égaux à k. Si d est un diviseur de $2n$, inférieur ou égal à $2k$ alors on a vu que $d \leqslant k$. Ainsi, soit d est un diviseur de n (donc l'un des d_i), soit c'est le double d'un des d_i (car les diviseurs de n inférieurs ou égaux à $\frac{k}{2}$ se trouvent parmi les d_i). Récirproquement, pour tout $1 \leq i \leq r,\ d_i \leqslant k$ et $2d_i$ est un diviseur de $2n$ inférieur ou égal à $2k$ donc est inférieur ou égal à k.

Ainsi, les diviseurs de $2n$ inférieurs ou égaux à k sont exactement les éléments de $\{d_i, 2di \mid 1 \leq i \leq r\}$. Comme pour tout $i \neq j$ on a $d_i \neq 2d_j$ (car d_i est impair) et $d_i \neq d_j$ (par définition) et $d_i \neq 2d_i$, les d_k et $2d_k$ pour $1 \leq k \leq r$ sont tous deux à deux disjoints donc $2n$ a exactement $2r$ diviseurs inférieurs ou égaux à k, absurde car il devrait y en avoir un nombre impair !

Finalement, il existe un diviseur d de $2n$ tel que $k < d \leqslant 2k$.

Commentaire des correcteurs : Le problème était difficile et se découpait en plusieurs étapes : il fallait exprimer les diviseurs de $2n$ en fonctions de ceux de n puis les grouper par paires pour exploiter la condition sur k. Rares sont ceux qui sont parvenus à fournir un raisonnement complet. Beaucoup d'élèves montraient que $2n$ n'est pas un carré parfait et donc a un nombre pair de diviseurs, traitaient des cas particuliers ou bien seulement la situation où $k > n/2$ (et alors $d = n$ ou $d = 2n$). Certains élèves avaient toutefois la bonne intuition (prendre le double du plus grand diviseur impair de n inférieur ou égal à k).

Exercice 6. Soit n un entier positif non nul. On suppose qu'il existe un ensemble de n droites distinctes dans le plan telles que chacune d'elle en intersecte exactement dix autres. Quelles sont les valeurs possibles pour n ?

Solution de l'exercice 6 On appelle S l'ensemble des droites considérées.

Considérons une droite quelconque (d) de S. On distingue alors dans $S \setminus \{(d)\}$ les p droites parallèles à (d) dans S et les 10 droites de S qui intersectent (d).

On obtient l'égalité $n - 1 = p + 10$ donc $p = n - 11$.

Le nombre p de droites parallèles à (d) a donc une valeur constante quel que soit le choix de la droite (d) ! Toute droite (d) dans l'ensemble S est donc parallèle à exactement $n - 11$ autres droites (et intersecte 10 autres droites).

Regroupons alors par faisceaux de droites parallèles les droites de S : en notant k le nombre de direction différentes que prennent des droites de S on obtient l'identité $n = k \cdot (1 + (n - 11))$ (chaque faisceau contient exactement 1 droites avec ses $n - 11$ parallèles).

Ainsi, n est un multiple de $n - 10$. Donc $n - 10$ est un diviseur de $n - (n - 10) = 10$.

Les seuls diviseurs (positifs) de 10 sont $1, 2, 5, 10$ donc $n \in \{11; 12; 15; 20\}$.

Réciproquement, on peut effectivement construire des ensembles de droites qui vérifient la propriété que toute droite en intersecte exactement 10 autres dans l'ensemble, grâce aux propriétés démontrées sur ces ensembles.

• Pour $n = 11$, il suffit de prendre 11 droites en position générale (aucune paire de droites n'est formé de deux droites parallèles).

• Pour $n = 12$, il suffit de prendre 6 paires de droites parallèles telles qu'aucune paire ne soit parallèle à une autre.

• Pour $n = 15$, on utilise le même type de construction : on prend 5 droites parallèles entre elles, 5 autres droites parallèles entre elles mais pas parallèles aux premières, et 5 autres droites parallèles entre elles qui ne sont parallèles à aucune des droites précédemment construites.

• Enfin, pour $n = 20$, on prend deux faisceaux de 10 droites parallèles de sorte que deux droites de deux faisceaux différents ne soient jamais parallèles.

L'ensemble des valeurs possibles pour n est donc effectivement $\{11; 12; 15; 20\}$ (on n'a pas compté de valeur en trop).

Commentaire des correcteurs : Les élèves ont su trouver des n qui vérifiaient l'énoncé. Mais rare sont ceux qui ont réussi à trouver assez d'exemples pour inférer des propriétés, et essayer de les prouver ensuite afin de montrer que les autres valeurs de n ne pouvaient convenir. Très peu d'élèves ont réussi entièrement l'exercice. Attention, ce n'est pas parce qu'un exemple marche pour n, et que si on rajoute une droite cela ne marche pas plus, que les éléments plus grands que n ne sont pas solution.

Exercice 7. Soit $n \geq 3$ un entier strictement positif. Montrer que pour tous réels $x_1, \ldots, x_n$ strictement positifs, on a l'inégalité suivante :

$$1 < \frac{x_1}{x_1+x_2} + \frac{x_2}{x_2+x_3} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_{n-1}+x_n} + \frac{x_n}{x_n+x_1} < n-1$$

Solution de l'exercice 7 Nous allons traiter séparément les deux inégalités.

• Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs.

Notons $S = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$.

Comme tous les x_k sont strictement positifs, pour tout $1 \leq i \leq n-1$, on a $x_i + x_{i+1} < S$ et $x_n + x_1 < S$.

On en déduit que

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{x_1+x_2} + \frac{x_2}{x_2+x_3} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_{n-1}+x_n} + \frac{x_n}{x_n+x_1} &> \frac{x_1}{S} + \frac{x_2}{S} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{S} + \frac{x_n}{S} \\ &= \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{S} = 1 \end{aligned}$$

Cela nous fournit la première égalité, quelles que soient les valeurs des $x_i > 0$.

• Considérons à nouveau $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs. L'inégalité qui reste à démontrer revient à prouver que :

$$n - 1 - \left(\frac{x_1}{x_1+x_2} + \frac{x_2}{x_2+x_3} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_{n-1}+x_n} + \frac{x_n}{x_n+x_1}\right) > 0$$

Réécrivons cette expression :

$$\begin{aligned} & n - 1 - \left(\frac{x_1}{x_1+x_2} + \frac{x_2}{x_2+x_3} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_{n-1}+x_n} + \frac{x_n}{x_n+x_1}\right) \\ &= \left(\left(1 - \frac{x_1}{x_1+x_2}\right) + \left(1 - \frac{x_2}{x_2+x_3}\right) + \ldots + \left(1 - \frac{x_{n-1}}{x_{n-1}+x_n}\right) + \left(1 - \frac{x_n}{x_n+x_1}\right)\right) - 1 \\ &= \left(\frac{x_2}{x_1+x_2} + \frac{x_3}{x_2+x_3} + \ldots + \frac{x_n}{x_{n-1}+x_n} + \frac{x_1}{x_n+x_1}\right) - 1 \end{aligned}$$

Cette dernière expression est très similaire à la première inégalité : on va donc pouvoir utiliser ce qu'on a montré au premier point.

Posons $y_i = x_{n+1-i}$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$: $(y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est bien une famille de réels positifs : on peut donc lui appliquer le résultat démontré au premier point pour toute famille de n réels strictement positifs.

On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{x_2}{x_1+x_2} + \frac{x_3}{x_2+x_3} + \ldots + \frac{x_n}{x_{n-1}+x_n} + \frac{x_1}{x_n+x_1} &= \frac{y_{n-1}}{y_n+y_{n-1}} + \frac{y_{n-2}}{y_{n-1}+y_{n-2}} + \ldots + \frac{y_1}{y_2+y_1} + \frac{y_n}{y_1+y_n} \\ &= \frac{y_1}{y_1+y_2} + \frac{y_2}{y_2+y_3} + \ldots + \frac{y_{n-1}}{y_{n-1}+y_n} + \frac{y_n}{y_n+y_1} > 1 \end{aligned}$$

Finalement,

$$n - 1 - \left(\frac{x_1}{x_1+x_2} + \frac{x_2}{x_2+x_3} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_{n-1}+x_n} + \frac{x_n}{x_n+x_1}\right) > 0$$

On obtient donc avec ces deux points l'encadrement souhaité : pour tous réels $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$:

$$1 < \frac{x_1}{x_1+x_2} + \frac{x_2}{x_2+x_3} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_{n-1}+x_n} + \frac{x_n}{x_n+x_1} < n-1$$

Solution alternative n°1 Une autre façons d'aborder le problème est d'exploiter le caractère cyclique de l'expression à encadrer. Pour simplifier les notations dans ce qui suit, on pose $x_{n+1} = x_1$.

Notons k un indice tel que $x_k + x_{k+1}$ soit le maximum des nombres $x_1 + x_2, x_2 + x_3, \ldots, x_n + x_1$.

Alors on se rend compte que sans perte de généralité, quitte à renuméroter les x_i en les décalant tous de k, on peut supposer que $k = 1$.

Plus formellement, on peut définir $y_1, y_2, \ldots, y_n > 0$ par : $y_1 = x_k, y_2 = x_{k+1}, \ldots, y_{n+1-k} = x_n, y_{n+2-k} = x_1, \ldots, y_n = x_{k-1}$. L'inégalité à démontrer pour $y_1, y_2, \ldots, y_n$ est alors exactement la même que celle que l'on devait démontrer sur $x_1, x_2, \ldots, x_n$! On dit que l'expression que l'on cherche à encadrer est invariante par permutation cyclique de ses variables. Cela nous permet donc de supposer (quitte à se ramener au même problème mais avec cette hypothèse en plus) que $x_1 + x_2$ est le plus grand des nombres $x_k + x_{k+1}$.

Définissons encore quelques notations avant de revenir à l'encadrement qui nous occupe : notons $P = (x_1 + x_2) \cdot (x_2 + x_3) \cdot \ldots \cdot (x_{n-1} + x_n) \cdot (x_n + x_1) > 0$, puis notons pour $1 \leqslant i \leqslant n,\ p_i = \frac{P}{x_i + x_{i+1}}$.

L'inégalité à démontrer revient à prouver

$$P < x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n < (n-1)P$$

Mais comme $x_1 + x_2 \geq x_2 + x_3,\ p_1 \leqslant p_2$ on obtient déjà :

$$P = (x_1 + x_2)p_1 = x_1 p_1 + x_2 p_1 \leqslant x_1 p_1 + x_2 p_2 < x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n$$

Pour l'autre encadrement, on va combiner cette idée avec celle de la partie précédente : comme $p_1 \leqslant p_n$, on a

$$P < x_1 p_1 + x_2 p_1 \leqslant x_1 p_n + x_2 p_1 < x_1 p_n + x_2 p_1 + x_3 p_2 + \ldots + x_n p_{n-1}$$

Mais

$$(x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_np_n)+(x_2p_1+x_3p_2+\ldots+x_{n+1}p_n) = (x_1+x_2)p_1+(x_2+x_3)p_2+\ldots+(x_n+x_{n+1})p_n = n \cdot P$$

En combinant les deux relations, on obtient finalement le résultat voulu

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n < (n-1)P$$

Ainsi, ona bien montré

$$1 < \frac{x_1}{x_1 + x_2} + \frac{x_2}{x_2 + x_3} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_{n-1} + x_n} + \frac{x_n}{x_n + x_1} < n - 1$$

Commentaire des correcteurs : Aucun élève n'a réussi à avoir des vraies avancées sur le problème, qui était très difficile : seuls 3 élèves ont réussi à avoir un point. Beaucoup de confusions à signaler, surtout sur les fractions) :

- ▷ x_j ne signifie ni x^j et $j \times x$,
- ▷ $\frac{a}{a+b}$ ne vaut pas $\frac{1}{b}$,
- ▷ $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ ne vaut pas $\frac{a+c}{b+d}$.
- ▷ Une fraction peut être strictement inférieure à n mais être strictement supérieure à $n - 1$.

Exercices lycéens

Exercice 8. Calculer

$$\sqrt{7+\sqrt{1+\sqrt{7+\sqrt{1+\sqrt{7+\sqrt{1+\sqrt{7+\sqrt{3+\sqrt{1}}}}}}}}}.$$

Seule une réponse numérique est attendue ici.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u> Onn remarque la simplification en chaîne suivante : $\sqrt{3+\sqrt{1}} = 2$ puis $\sqrt{7+\sqrt{3+\sqrt{1}}} = \sqrt{7+2} = 3$ puis $\sqrt{1+\sqrt{7+\sqrt{3+\sqrt{1}}}} = \sqrt{1+3} = 2$, et ainsi de suite...

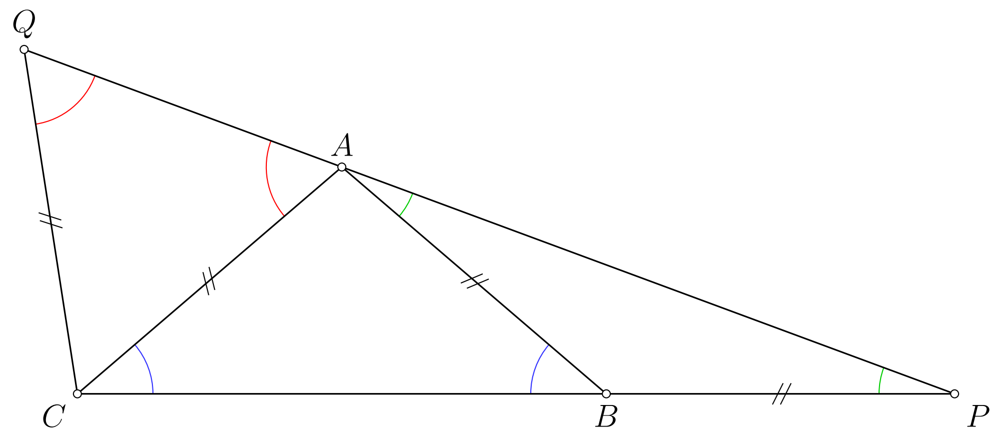
De proche en proche, on déduit que toute expression du type $\sqrt{1+\sqrt{7+\sqrt{1+\sqrt{\dots}}}}$ vaut 2 et que toute expression du type $\sqrt{7+\sqrt{1+\sqrt{7+\sqrt{\dots}}}}$ vaut 3 quel que soit le nombre de racines carrées, pourvu que $4 = 3+\sqrt{1}$ se trouve sous le dernier radical.

Comme c'est un 7 qui se trouve dans la somme sous le premier radical, la réponse est donc 3.

<u>**Commentaire des correcteurs :**</u> Dans l'ensemble, les élèves ne se sont pas laissés piéger par l'imbrication de toutes les racines carrées et ont très bien réussi cet exercice. Néanmoins on notera que beaucoup d'élèves écrivent juste le résultat sans aucune justification : comme mentionné dans les consignes, c'est prendre le risque d'avoir 0 directement en cas de réponse incorrecte, il vaut mieux justifier un minimum sa réponse pour éviter une déconvenue en cas d'erreur de calcul.

Exercice 9. Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $AB < BC$. Soit P le point de la droite (BC) situé en dehors du segment $[BC]$ tel que $BP = BA$. Soit Q le point de (AP) différent de A tel que $CQ = CA$. Si $\widehat{QPC} = x$, quelle est la mesure de l'angle $\widehat{PCQ}$?

Solution de l'exercice 9



Dans cet exercice, il faut écrire consciencieusement toutes les équations qui traduisent les hypothèses de l'énoncé.

Ici, les triangles QCA, BAC et PBQ sont isocèles donc les angles de leurs bases sont égaux, ce qui donne $\widehat{CQA} = \widehat{CAQ}$, $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ et $\widehat{BAP} = \widehat{BPA}$.

On commence par décomposer l'angle $\widehat{PCQ}$ en les angles $\widehat{QCA}$ et $\widehat{ACB}$, et l'on exprime séparément ces angles en fonction de x.

D'une part, puisque les points C, B et P sont alignés, on a :

$$\widehat{ACB} = \widehat{ABC} = 180° - \widehat{ABP} = \widehat{BAP} + \widehat{BPA} = 2x$$

D'autre part, puisque les points P, A et Q sont alignés et puisque la somme des angles dans le triangle BAC vaut $180°$, on a

$$\widehat{QAC} = 180° - \widehat{BAC} - \widehat{BAP} = \widehat{ACB} + \widehat{ABC} - \widehat{BAP} = 2x + 2x - x = 3x$$

On peut alors calculer l'angle $\widehat{QCA}$ en fonction de l'angle x, en se plaçant dans le triangle QCA :

$$\widehat{QCA} = 180° - \widehat{CQA} - \widehat{QAC} = 180° - 2\widehat{QAC} = 180° - 6x$$

Finalement, on peut conclure

$$\widehat{PCQ} = \widehat{QCA} + \widehat{ACP} = 180° - 6x + 2x = 180° - 4x$$

Commentaire des correcteurs : L'exercice est très bien résolu par les trois quarts des élèves. On déplore une quantité substantielle d'élèves qui perdent des points pour de mauvaises lectures d'énoncé : plusieurs travaillent avec la mauvaise figure et d'autres ne donnent pas la valeur de l'angle qui est demandée par l'énoncé. Il est dommage de perdre des points si précieux lorsque l'on a la bonne méthode. Signalons aussi un nombre conséquent d'élèves qui se contentent de lister plusieurs égalités à la chaîne sans jamais expliquer comment ils les obtiennent. L'équipe de correction s'est montrée particulièrement sévère devant les absences d'explications ou d'étapes intermédiaires.

Exercice 10. Au tableau, Aline a écrit cinq entiers distincts qui vérifient la propriété suivante : quelque soit le choix de trois entiers distincts parmi ceux qui sont écrits, le produit des trois nombres choisis est divisible par 10. Montrer que l'un des cinq entiers écrits au tableau est divisible par 10.

Solution de l'exercice 10 Notons que $10 = 2 \times 5$.

Supposons que parmi les cinq entiers, il en existe trois, disons a, b et c, qui soient impairs. Alors abc est impair et n'est donc pas divisible par 10, ce qui contredit l'énoncé. Ainsi, il y a au plus deux entiers impairs parmi les cinq entiers.

De même, si l'on suppose que parmi les cinq entiers il en existe trois, disons d, e et f, qui ne soient pas divisibles par 5, alors le produit def n'est pas divisible par 5 et donc il n'est pas divisible par 10. Ainsi, il y a au plus deux entiers qui ne sont pas divisibles parmi les cinq entiers d'Anna.

Puisqu'il y a 5 entiers, qu'au plus 2 d'entre eux ne sont pas divisibles par 2 et qu'au plus 2 d'entre eux ne sont pas divisibles par 5, au moins $5 - 2 - 2 = 1$ des entiers est divisible à la fois par 2 et par 5. Cet entier est donc divisible par 10.

Solution alternative n°1 On note a_1, a_2, a_3, a_4 et a_5 les cinq entiers écrits au tableau.

Supposons par l'absurde qu'aucun de ces entiers n'est divisible par 10.

Puisque 10 divise $a_1a_2a_3$, 2 divise l'un des facteurs. Quitte à renuméroter les entiers, on peut supposer qu'il s'agit de a_1. De même, 5 divise l'un des facteurs a_1, a_2 et a_3. Comme 10 ne divise pas a_1 et 2 divise a_1, 5 ne peut diviser a_1. Une fois de plus, quitte à renuméroter les entiers, on peut supposer que 5 divise a_2. De plus 2 ne peut diviser a_2, sinon a_2 serait divisible par 10.

Par le même raisonnement, puisque 10 divise $a_1a_4a_5$, deux des entiers a_1, a_4 et a_5, disons a_4 et a_5 vérifient que 2 divise a_4 mais pas a_5 et 5 divise a_5 mais pas a_4.

Puisque le produit $a_1a_2a_4$ est divisible par 10 et que 5 ne divise ni a_2 ni a_4, on déduit que 5 divise a_1. Puisque le produit $a_1a_3a_5$ est divisible par 10 et que 2 ne divise ni a_3 ni a_5, 2 divise a_1.

Ainsi, 2×5 divise a_1, ce qui contredit notre hypothèse de départ. On a donc une contradiction et il existe bien un entier divisible par 10.

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été en grande partie bien compris et bien résolu, mais de nombreux élèves font des hypothèses mal justifiées, invoquant un prétendu "meilleur cas" ou "cas le plus favorable". L'erreur la plus fréquente était de supposer sans justification que tous les nombres étaient multiples de 2 ou de 5 dans le raisonnement par l'absurde. Cela était tout à fait possible, à condition d'expliquer pourquoi : par exemple, en disant que si un nombre n'est multiple ni de 2 ni de 5, alors on peut le multiplier par 2 sans rien changer à la situation globale. Beaucoup d'élèves raisonnent sur un exemple sans essayer de le généraliser. Enfin, il y a eu quelques confusions sur la notion de divisibilité : pour qu'un produit de 3 nombres soit multiple de 10, il faut et il suffit que l'un des nombres soit multiple de 2 et que l'un soit multiple de 5.

Exercice 11. Les entiers $1, 2, \ldots, 20$ ont été arrangés autour d'un cercle, dans un certain ordre. Pour chacun de ces entiers k, Matthieu compte combien il y a d'entiers inférieurs à k parmi les 9 entiers qui suivent k lorsqu'on parcourt le cercle dans le sens des aiguilles d'une montre ; il en compte $A(k)$. Il compte aussi combien il y a d'entiers inférieurs à k parmi les 9 entiers qui suivent k lorsqu'on parcourt le cercle dans le sens inverse des aiguilles d'une montre ; il en compte $B(k)$. Matthieu note alors que $A(k) = B(k)$ pour tout k. Quel est le nombre diamétralement opposé à 11 sur le cercle ?

Solution de l'exercice 11 Dorénavant, pour simplifier les termes utilisés, quand on parlera de nombre "avant" (ou "après") tel autre nombre, cela signifiera que le premier nombre est situé parmi les 9 nombres précédant (ou suivant) le second nombre, en regardant dans le sens horaire.

Dans la suite, on note $o(a)$ le nombre diamétralement opposé à l'entier a dans le cercle.

On commence par quelques remarques utiles.

• Tout d'abord, le seul nombre qui n'apparaît ni avant ni après a est le nombre a.

• Par ailleurs, si deux nombres a et b sont situés à l'opposé l'un de l'autre sur le cercle, alors a est avant et b est après (ou a après et b avant) tout nombre du cercle autre que a et b.

Après ces remarques générales, regardons pour chaque nombre quel peut être son opposé sur le cercle.

Comme $A(2) = B(2)$, il y a autant de nombre inférieurs à 2 avant et après 2. Comme 1 est le seul entier inférieur à 2 parmi les entiers du cercle, on déduit que $A(2) = B(2) = 0$ et $o(2) = 1$.

On peut refaire ce même raisonnement de proche en proche pour montrer que les nombres $2k$ et $2k-1$ sont diamétralement opposés sur le cercle.

En effet, si l'on sait déjà que $o(2i) = 2i - 1$, pour tous $1 \leqslant i < k$, on peut démontrer que $2k$ et $2k-1$ le sont aussi.

Pour cela, on suppose par l'absurde que $o(2k) \neq 2k - 1$. Alors $2k - 1$ se situe soit avant, soit après $2k$. En considérant les paires de nombres opposés $(2i - 1, 2i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant k - 1$, on obtient $k - 1$ nombres avant $2k$ et $k - 1$ après $2k$ sur le cercle. En considérant le nombre $2k - 1$, situé soit avant, soit après $2k$ sur le cercle, comme les autres nombres sur le cercle sont tous plus grands que $2k$, on obtient $A(2k) = k - 1$ et $B(2k) = k$ ou $A(2k) = k$ et $B(2k) = k - 1$, ce qui est impossible. Ainsi, $o(2k) = 2k - 1$ comme annoncé.

Finalement, on a pu montrer que les nombres $2k$ et $2k-1$ sont toujours diamétralement opposés sur le cercle pour $1 \leqslant k \leqslant 10$. En particulier, le nombre diamétralement opposé à 11 sur le cercle est 12.

Remarque : On pouvait fournir une solution très similaire en remarquant par le même raisonnement que le nombre diamétralement opposé à 19 sur le cercle est nécessairement 20, puis redescendre jusqu'à 11 de proche en proche au lieu de remonter jusqu'à 11.

Solution alternative n°1 De même que dans la solution précédente, on établit que $o(2) = 1$.

Notons à présent que si $1 \leqslant k \leqslant 10$, le nombre d'entiers sur le cercle inférieurs à $2k$ est exactement $2k - 1$ qui est impair. Or $A(2k) = B(2k)$, donc il y a un nombre pair d'entiers inférieurs à $2k$ avant ou après lui. On déduit que $o(2k)$ est un des $2k - 1$ entiers inférieurs ou égaux à $2k$, soit que $o(2k) \leqslant 2k - 1$.

On utilise cette inégalité pour établir que $o(2k) = 2k - 1$, par le même procédé de proche en proche que dans la première solution.

On a déjà que $o(2) = 1$. Si l'on suppose que l'on a établi que $o(2i) = 2i - 1$ pour tout $i \leqslant k$, alors $o(2k) \leqslant 2k - 1$ mais $o(2k)$ n'est aucun des entiers des paires $(1, 2), \ldots, (2i, 2i - 1), \ldots, (2k - 3, 2k - 2)$. Donc $o(2k) = 2k - 1$ comme annoncé. On conclut de proche en proche que pour tout entier $1 \leqslant k \leqslant 20$, $o(2k) = 2k - 1$.

En particulier, $o(12) = 11$, ce qui signifie que 11 et 12 sont opposés, ce qui nous permet de retrouver le résultat voulu.

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été très bien réussi, néanmoins quelques erreurs récurrentes sont à déplorer :

- ▷ De nombreux élèves ont donné un exemple, régulièrement faux, en se disant que cela suffisait à résoudre le problème. Il n'y a pas de garantie que ce soit toujours le même nombre opposé à 11, l'énoncé pourrait avoir deux réponses.
- ▷ Plusieurs élèves montrent que 1 est en face de 2, et généralisent sans aucun argument à 3 en face de 4, puis à 11 en face de 12 : il faut détailler plus précisément pourquoi c'est le cas.

Exercice 12. Soit n un entier positif impair et k un entier strictement positif. On suppose que le nombre de diviseurs positifs de $2n$ qui sont inférieurs ou égaux à k est impair. Montrer qu'il existe un diviseur d de $2n$ pour lequel $k < d \leqslant 2k$.

Solution de l'exercice 12 On commence par étudier les contraintes que doit vérifier un tel diviseur d. Tout d'abord, on observe que si d vérifie la propriété voulue, $\dfrac{d}{2} \leqslant k$. De plus, si d est pair et divise $2n$, alors $\dfrac{d}{2}$ divise n. Ceci nous encourage donc à plutôt chercher un diviseur d' de n inférieur ou égal à k tel que $2d' > k$. Si un tel nombre n'existe pas, cela veut dire que tout diviseur $d' \leqslant k$ de n vérifie également que $2d' \leqslant k$. Cette observation motive la preuve qui suit.

Puisque n est un entier impair, tous ses diviseurs sont également impairs. Notons $d_1, \ldots, d_r$ les diviseurs positifs de n qui sont inférieurs ou égaux à k et supposons par l'absurde que, pour tout i, on ait également $2d_i \leqslant k$.

Notons que les paires $(d_i, 2d_i)$ sont alors deux à deux disjointes. En effet, si deux indices i et j vérifient que $d_j \in \{d_i, 2d_i\}$, puisque d_j est impair il est égal à d_i. De même, si $2d_j \in \{d_i, 2d_i\}$, $2d_j = 2d_i$ et $d_i = d_j$.

D'autre part, tout diviseur positif de $2n$ inférieur ou égal à k est soit un diviseur de n donc il s'agit de l'un des d_i, soit c'est le double d'un diviseur de n et donc il s'agit de l'un des $2d_i$.

Ainsi, les paires $(d_i, 2d_i)$ partitionnent l'ensemble des diviseurs positifs de $2n$ inférieurs ou égaux à k. Mais alors cela signifie que le nombre de diviseurs positifs de $2n$ inférieurs ou égaux à k est pair, ce qui contredit l'hypothèse de l'énoncé.

Il existe donc un indice i tel que $2d_i > k$. Puisque $d_i \leqslant k$, on a $2d_i \leqslant 2k$. Ainsi, l'entier $2d_i$ est un diviseur de $2n$ tel que $k < 2d_i \leqslant 2k$, ce qui est le résultat voulu.

Solution alternative n°1 On raisonne par l'absurde en supposant qu'il n'existe pas de diviseur d de $2n$ tel que $k < d \leqslant 2k$: c'est-à-dire que si d est un diviseur de $2n$ tel que $d \leqslant 2k$ alors $d \leqslant k$.

Puisque n est un entier impair, tous ses diviseurs sont également impairs. Les diviseurs de $2n$ sont donc exactement les diviseurs de n et les doubles de diviseurs de n.

Notons $d_1, d_2, \ldots, d_r$ les diviseurs distincts de n qui sont inférieurs ou égaux à k. Si d est un diviseur de $2n$, inférieur ou égal à $2k$ alors on a vu que $d \leqslant k$. Ainsi, soit d est un diviseur de n (donc l'un des d_i), soit c'est le double d'un des d_i (car les diviseurs de n inférieurs ou égaux à $\frac{k}{2}$ se trouvent parmi les d_i). Récirproquement, pour tout $1 \leqslant i \leqslant r,\ d_i \leqslant k$ et $2d_i$ est un diviseur de $2n$ inférieur ou égal à $2k$ donc est inférieur ou égal à k.

Ainsi, les diviseurs de $2n$ inférieurs ou égaux à k sont exactement les éléments de $\{d_i, 2di \mid 1 \leqslant i \leqslant r\}$. Comme pour tout $i \neq j$ on a $d_i \neq 2d_j$ (car d_i est impair) et $d_i \neq d_j$ (par définition) et $d_i \neq 2d_i$, les d_k et $2d_k$ pour $1 \leqslant k \leqslant r$ sont tous deux à deux disjoints donc $2n$ a exactement $2r$ diviseurs inférieurs ou égaux à k, absurde car il devrait y en avoir un nombre impair !

Finalement, il existe un diviseur d de $2n$ tel que $k < d \leqslant 2k$.

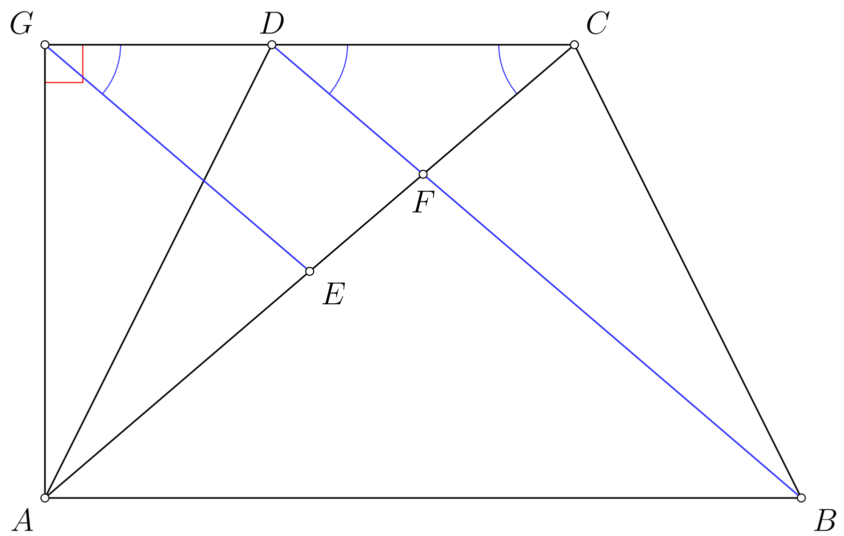
Commentaire des correcteurs : Le problème était difficile, certains élèves se sont contentés de traiter le cas particulier $2k > n$ ou bien le cas où n est premier. La plupart montrent que comme $2n$ n'est pas un carré parfait, il a un nombre pair de diviseurs puis en déduisent que $k < 2n$. Un certain nombre d'élèves a néanmoins eu la bonne intuition (prendre le double du plus grand diviseur de n inférieur ou égal à k), et une bonne partie d'entre eux sont parvenus à donner une solution complète ou presque complète, en appariant les diviseurs impairs de $2n$ avec leurs doubles.

Exercice 13. Soit $ABCD$ un quadrilatère tel que $AD = BC$, (AB) et (CD) sont parallèles, et $AB > CD$. Soit E le milieu de $[AC]$ et F le point d'intersection des diagonales (AC) et (BD). La parallèle à la droite (BD) passant par E coupe la droite (CD) au point G.

1) Montrer que le triangle CGA est rectangle en G.

2) On note $CD = b$ et $AB = a$. Calculer le rapport $\dfrac{EG}{CF}$ en fonction de a et b.

Solution de l'exercice 13



1) Le trapèze $ABCD$ étant isocèle, les segments $[CD]$ et $[AB]$ partagent la même médiatrice et le trapèze est symétrique par rapport à cette même médiatrice. En particulier, le point F appartient à cette médiatrice et les triangles FBA et FCD sont isocèles en F. En particulier $\widehat{FCD} = \widehat{FDC}$.

Puisque les droites (EG) et (DF) sont parallèles, les angles correspondants $\widehat{EGC}$ et $\widehat{FDC}$ sont égaux. On a donc

$$\widehat{EGC} = \widehat{FDC} = \widehat{FCD} = \widehat{GCE}$$

Le triangle GEC est donc isocèle en E.

On déduit que $EG = EC$. Puisque E est le milieu du segment $[AC]$, on a également que $EG = EC = EA$. Le point E est donc le centre du cercle passant par les points A, G et C. puisque A, E et C sont alignés, $[AC]$ est un diamètre de ce cercle, ce qui implique que l'angle $\widehat{AGC}$ est droit, comme voulu.

2) Puisque le triangle FDC est isocèle en F, $CF = DF$. Puisque les droites (EG) et (FD) sont parallèles, d'après le théorème de Thalès on a

$$\frac{EG}{CF} = \frac{EG}{DF} = \frac{EC}{FC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AC}{CF}$$

On applique ensuite le théorème de Thalès aux paires de droites (DC) et (AB). On obtient

$$\frac{AF}{FC} = \frac{AB}{CD} = \frac{a}{b}$$

On déduit finalement que

$$\frac{EG}{CF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AC}{CF} = \frac{1}{2}\frac{AF + CF}{CF} = \frac{1}{2}\left(\frac{AF}{CF} + 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + 1\right) = \frac{a+b}{2b}$$

Commentaire des correcteurs : Cet exercice a été dans l'ensemble bien réussi. Un bon nombre d'élèves a abordé le problème, ce qui est remarquable pour un exercice de géométrie situé à cet endroit du sujet. Cela a souvent été accompagné de réussite, la moitié des copies a réussi la première question et un bon nombre a rendu une solution complète. Néanmoins des erreurs récurrentes sont à signaler.

- ▷ Un grand nombre de copies à tracer une mauvaise figure, sans doute à cause d'une mauvaise lecture de l'énoncé, en ayant $AB < CD$ alors que l'énoncé précisait le contraire. Il est conseillé de toujours bien lire attentivement l'énoncé pour ne pas faire fausse route.
- ▷ Au sujet des figures, très souvent une figure était jointe, ce qui est un très bon point, mais il faudrait qu'il soit encore plus systématique : on rappelle qu'il est fortement recommandé de joindre une figure à sa solution, surtout lorsqu'on introduit des points qui ne sont pas donnés dans l'énoncé, cela peut beaucoup clarifier une copie.
- ▷ On constate beaucoup de problèmes de vocabulaires sur les trapèzes : un certain nombre de copies utilise les termes de trapèze "régulier" ou "équilibré", d'autres considèrent qu'un trapèze vérifie forcément $AD = BC$. On rappelle qu'un trapèze est un quadrilatère possédant deux côtés opposés parallèles, et si de plus on a $(AB)//(CD), AB > CD, AD = BC$ on parle alors de trapèze isocèle.
- ▷ De nombreuses copies ont bien pensé à utiliser le théorème de Thalès, essentiel à la résolution de la question 2. Cependant un certain nombre de copies a mal appliqué ce théorème, avec notamment des difficultés avec la "configuration papillon".
- ▷ Enfin certaines copies tournent en rond dans leurs tentatives de preuve (en admettant des propriétés immédiatement équivalentes au résultat démontré) ou utilisent des résultats non triviaux qui ne sont pas démontrés : pour qu'une solution soit valable, il faut que chaque étape soit rigoureusement et soigneusement justifiée.

Exercice 14. Soit n un entier strictement positif et $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ des réels strictement positifs tels que $x_1 + \ldots + x_n = y_1 + \ldots + y_n = 1$. Montrer que

$$|x_1 - y_1| + \ldots + |x_n - y_n| \leqslant 2 - \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{x_i}{y_i} - \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{y_i}{x_i}$$

Pour tous réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i$ désigne le plus petit des n nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Solution de l'exercice 14 On note $\alpha = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{x_i}{y_i}$ et $\beta = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{y_i}{x_i}$.

Posons $A = \{1 \leqslant i \leqslant n, x_i > y_i\} = \{i_1, \ldots, i_a\}$, $B = \{1 \leqslant i \leqslant n, x_i \leqslant y_i\} = \{j_1, \ldots, j_b\}$, avec $a + b = n$. Les ensembles A et B forment une partition de l'ensemble des indices allant de 1 à n.

On commence par se débarasser des valeurs absolues en séparant les termes pour lesquels $|x_i - y_i| = x_i - y_i$ et les termes pour lesquels $|x_i - y_i| = y_i - x_i$. Pour cela on introduit les quantités

$$\begin{aligned} S_x^+ &= x_{i_1} + x_{i_2} + \ldots + x_{i_a} = \textstyle\sum_{i \in A} x_i & \quad S_x^- &= x_{j_1} + x_{j_2} + \ldots + x_{j_b} = \textstyle\sum_{i \in B} x_i \\ S_y^+ &= y_{j_1} + y_{j_2} + \ldots + y_{j_b} = \textstyle\sum_{i \in B} y_i & \quad S_y^- &= y_{i_1} + y_{i_2} + \ldots + y_{i_a} = \textstyle\sum_{i \in A} y_i \end{aligned}$$

de sorte que

$$S_x^+ + S_x^- = x_{i_1} + \ldots + x_{i_a} + x_{j_1} + \ldots + x_{j_b} = x_1 + \ldots + x_n = 1$$

et de même

$$S_y^+ + S_y^- = 1$$

et

$$\begin{aligned} |x_1 - y_1| + \ldots + |x_n - y_n| &= |\underbrace{x_{i_1} - y_{i_1}}_{\geqslant 0}| + \ldots + |\underbrace{x_{i_a} - y_{i_a}}_{\geqslant 0}| + |\underbrace{x_{j_1} - y_{j_1}}_{\leqslant 0}| + \ldots + |\underbrace{x_{j_b} - y_{j_b}}_{\leqslant 0}| \\ &= x_{i_1} - y_{i_1} + \ldots + x_{i_a} - y_{i_a} + y_{j_1} - x_{j_1} + \ldots + y_{j_b} - x_{j_b} \\ &= S_x^+ - S_y^- + S_y^+ - S_x^- \end{aligned}$$

On remarque désormais que si $i \in A$, $\dfrac{y_i}{x_i} \geqslant \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{y_i}{x_i} = \beta$, ce qui signifie que $y_i \geqslant \beta x_i$. De même, si $i \in B$, $x_i \geqslant \alpha y_i$, de sorte que $S_y^- \geqslant \beta S_x^+$ et $S_x^- \geqslant \alpha S_y^+$. Ainsi

$$S_x^+ - S_y^- + S_y^+ - S_x^- \leqslant (1 - \beta) S_x^+ + (1 - \alpha) S_y^+ \leqslant 1 - \beta + 1 - \alpha = 2 - \alpha - \beta$$

ce qui est l'inégalité voulue.

Commentaire des correcteurs : Cet exercice était difficile et peu d'élèves ont réussi à y répondre complètement. Néanmoins de nombreuses erreurs sont à signaler.

Exercice 15. Soit n un entier positif impair.

1) Déterminer, en fonction de n, le plus grand entier r possédant la propriété suivante : pour tous réels $a_1, \ldots, a_n$, il existe r entiers $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leqslant n$ tels que pour tous entiers k, ℓ vérifiant $1 \leqslant k, \ell \leqslant r$, $a_{i_k} - a_{i_\ell} \neq 1$.

2) Soit α un nombre irrationnel. Déterminer, en fonction de n, le plus grand entier r possédant la propriété suivante : pour tous réels $a_1, \ldots, a_n$, il existe r entiers $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leqslant n$ tels que pour tous entiers k, ℓ vérifiant $1 \leqslant k, \ell \leqslant r$, $a_{i_k} - a_{i_\ell} \neq 1$ et $a_{i_k} - a_{i_\ell} \neq \alpha$.

Un nombre irrationnel est un réel qui ne peut pas s'écrire sous la forme $\dfrac{a}{b}$, où a et b sont des entiers et $b \neq 0$.

Solution de l'exercice 15 Dans ce problème, il s'agit de trouver le plus grand entier r possédant deux propriétés. Si non note $f(n)$ ce plus grand entier, pour montrer que $f(n)$ est bien le maximum, le raisonnement est forcément divisé en deux parties indépendantes : d'une part, on doit montrer que tout choix de réels $a_1, \ldots, a_n$, il existe un ensemble de $f(n)$ indices satisfaisant la propriété ; et d'autre part on doit donner une construction de n réels $a_1, \ldots, a_n$ tels que pour tout choix de $f(n)+1$ indices, il en existe deux i et j tels que $a_i - a_j = 1$.

Dans la suite, un ensemble I d'indices est dit *bon* si pour tous indices $i, j \in I$, $a_i - a_j \neq 1$.

1) Soient $a_1 \ldots, a_n$ des réels. Quitte à renuméroter, on peut supposer de plus que $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$. On va chercher à créer le plus grand ensemble bon possible. Pour cela, on répartit les indices de 1 à n en deux ensembles A et B de la façon suivante :

On commence par placer l'indice 1 dans A. Puis, on note i_2 le plus petit indice j, s'il existe, tel que $a_j - 1 \neq a_1$ et on range i_2 dans A ainsi que tous les indices i tels que $a_i = a_{i_2}$. On construit alors l'ensemble A de proche en proche de la façon suivante : si on suppose que $A = \{1, i_2, \ldots, i_k\}$, on place dans A l'indice i_{k+1}, défini, s'il existe, comme le plus petit indice j tel que $a_j - 1 \neq a_1, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$, ainsi que tous les indices j tels que $a_j = a_{i_{k+1}}$.

Une fois que l'on ne peut plus placer de nouveau nombre dans l'ensemble A, on note $A = \{1, i_2, \ldots, i_r\}$ et B l'ensemble des indices que l'on n'a pas rangé dans A. Par hypothèse, l'ensemble A est bon. D'autre part, si $i \in B$, par hypothèse il existe un indice j dans A tel que $a_i - a_j = 1$. Ainsi, si $k \in B$ vérifie $a_i - a_k = 1$, alors $a_k = a_j$, ce qui impliquerait que $k \in A$. Ainsi, il n'existe pas d'indice k dans B tel que $a_i - a_k = 1$ et B est également un ensemble bon.

Puisque A et B forment une partition de $\{1, \ldots, n\}$, on a $|A| + |B| = n$, de sorte que $|A| \geqslant \frac{n}{2}$ ou $|B| \geqslant \frac{n}{2}$. Ainsi, il existe toujours un ensemble bon de cardinal $\lceil \frac{n}{2} \rceil$, où $\lceil x \rceil$ est le plus petit entier supérieur ou égal à x.

Réciproquement, on construit un ensemble de n réels $a_1, \ldots, a_n$ tel que, quelque soit le choix de $\lceil n/2 \rceil + 1$ de ces réels, on en trouve toujours deux dont la différence vaut 1.

Si n est pair, on écrit $n = 2k$. Considérons l'ensemble des réels $\{1, 2, \ldots, n\}$ et répartissons ces entiers en les ensembles $\{1,2\}, \{3,4\}, \ldots, \{2k-1, 2k\}$. Notons qu'il y a k tels ensembles. Quelque soit le choix de $k+1$ de ces réels, il en existe donc deux appartenant au même ensemble. Leur différence vaut alors 1, donc l'ensemble des $k+1$ réels choisis n'est pas bon. On a donc exhibé un ensemble dans lequel aucun sous-ensemble de taille $\frac{n}{2} + 1$ n'est bon.

Si n est impair, on l'écrit $n = 2k+1$. Considérons l'ensemble des réels $\{1, 2, \ldots, n\}$ et répartissons ces entiers en les ensembles $\{1,2\}, \{3,4\}, \ldots, \{2k-1, 2k\}$ et $\{2k+1\}$. Il y a $k + 1 = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ ensembles. Quelque soit le choix de $k+2$ de ces réels, il en existe donc deux appartenant au même ensemble. Leur différence vaut alors 1, donc l'ensemble des $k+1$ réels choisis n'est pas bon. On a donc exhibé un ensemble dans lequel aucun sous-ensemble de taille $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ n'est bon.

En conclusion, le plus grand entier r tel qu'il existe toujours un ensemble bon parmi n réels est $r = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

2) L'hypothèse que α est irrationnel se traduit par la propriété suivante : si a, b, c et d sont des entiers tels que $a + b\alpha = c + d\alpha$, alors $a = c$ et $b = d$. En effet, l'égalité se réécrit $(d-b)\alpha = c - a$, de sorte que si $b \neq d$, $\alpha = \frac{c-a}{b-d}$ est rationnel, ce qui est exclu. Ainsi $b = d$ et on déduit que $a = c$ comme annoncé.

On adapte la preuve de la question 1). Un ensemble A d'indices est dit bon si deux indices i et j quelconques de A vérifient $a_i - a_j \neq 1$ et $a_i - a_j \neq \alpha$.

Pour tout réel a de $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$, on note $S(a)$ l'ensemble des nombres de S qui s'écrivent sous la forme $a + n + m\alpha$, où m et n sont des entiers relatifs. Notons que si $b \in S(a)$, alors on dispose d'entiers n et m tels que $b = a + n + m\alpha$ de sorte que $a = b - n - m\alpha$ et $a \in S(b)$. Ainsi, l'ensemble S admet une partition en ensembles $S(a_{i_1}), S(a_{i_2}) \ldots, S(a_{i_k})$ deux à deux disjoints.

Soit i_j un indice. L'ensemble $S(a_{i_j})$ peut être partitionné en les deux ensembles : $S(a_{i_j})_p = S \cap \{a_{i_j} + m + n\alpha \,|\, m + n \text{ est pair }\}$ et $S(a_{i_j})_i = S \cap \{a_{i_j} + m + n\alpha \,|\, m + n \text{ est impair }\}$, où la notation $X \cap Y$ désigne l'ensemble des éléments appartenant à X et à Y.

Chacun des ensembles $S(a_{i_j})_p$ et $S(a_{i_j})_i$ est bon. En effet, soient b et c deux éléments de $S(a_{i_j})_p$, que l'on écrit respectivement sous la forme $a_{i_j} + n_b + m_b\alpha$ et $a_{i_j} + n_c + m_c\alpha$. Alors $b - c = (n_b - n_c) + (m_b - m_c)\alpha$, et $n_b - n_c + m_b - m_c$ est un entier pair. Ainsi, si $b - c = 1 = 1 + 0 \cdot \alpha$, on déduit que $m_b - m_c = 0$ et $1 = n_b - n_c = n_b - n_c + m_b - m_c$ est pair, ce qui est absurde. De même, on ne peut avoir $c - b = \alpha$. L'ensemble $S(a_{i_j})_p$ est donc bon, et on montre de la même manière que $S(a_{i_j})_i$ est bon.

L'un des deux ensembles $S(a_{i_j})_p$ et $S(a_{i_j})_i$ contient plus de la moitié des éléments de $S(a_{i_j})$.

Ainsi, pour tout i_j, on dispose d'un sous-ensemble bon B_j de $S(a_{i_j})$ de taille $|B_j| \geqslant \frac{1}{2}|S(a_{i_j})|$.

Notons alors que l'union des B_j, notée $\bigcup B_j$, constitue un ensemble bon : si b et c appartiennent à $\bigcup B_j$, alors soit b et c appartiennent au même B_j et alors leur différence n'est pas dans $\{1, \alpha\}$ car B_j est bon, soit ils ne sont pas dans le même B_j mais alors la différence $b - c$ ne s'écrit pas sous la forme $n + m\alpha$.

On a de plus, puisque les B_j sont deux à deux disjoints,

$$|\bigcup B_j| = |B_1| + \ldots + |B_k| \geqslant \frac{1}{2}|S(a_{i_1})| + \ldots + \frac{1}{2}|S(a_{i_k})| = \frac{1}{2}(|S(a_{i_1})| + \ldots + |S(a_{i_k})|) = \frac{n}{2}$$

de sorte que $|\bigcup B_j| \geqslant \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Ainsi, il existe toujours un ensemble bon de cardinal $\lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Réciproquement, de même que pour la question 1), on vérifie que l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ ne contient pas de sous-ensemble bon de cardinal $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$, puisqu'on a vu à la question 1) que tout sous-ensemble de taille $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ contient toujours deux entiers dont la différence vaut 1.

<u>*Solution alternative n°1*</u> On donne une preuve qu'il existe toujours un ensemble bon de cardinal $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ à la question 1) et à la question 2) en utilisant le formalisme des graphes.

1) On introduit G le graphe dont les sommets sont les réels $a_1, \ldots, a_n$ et deux sommets a_i et a_j sont réliés par une arête si $|a_i - a_j| = 1$. Soit $C = (a_{i_1}, \ldots, a_{i_r} = a_{i_1})$ un cycle de G. Alors pour tout k, $a_{i_k} - a_{i_1} = a_{i_k} - a_{i_{k-1}} + a_{i_{k-1}} - a_{i_{k-2}} + \ldots +, a_{i_2} - a_{i_1}$ est une somme de k nombres égaux à 1 ou -1. Donc $a_{i_k} - a_{i_1}$ est un entier de la même parité que k. Mais alors $0 = a_{i_r} - a_{i_1}$ est pair, si bien que r est pair.

On déduit que G n'admet pas de cycle de longueur impaire. G est donc un graphe bipartite : on peut répartir ses sommets en deux ensembles A et B tels que deux sommets de A ne sont jamais reliés entre eux et deux sommets de B ne sont jamais reliés entre eux. Ainsi A et B sont deux ensembles bons, et la somme de leurs cardinaux vaut n, donc $|A| \geqslant n/2$ ou $|B| \geqslant n/2$. Ainsi, il existe toujours un ensemble bon de cardinal au moins $\lceil \frac{n}{2} \rceil$.

2) Cette fois-ci, deux sommets de G sont reliés si $|a_i - a_j| = 1$ ou $|a_i - a_j| = |\alpha|$. On montre à nouveau que G n'admet pas de cycle de taille paire. En effet, si $C = (a_{i_1}, \dots, a_{i_r})$ est un cycle, alors $a_{i_k} - a_{i_1} = a_{i_k} - a_{i_{k-1}} + a_{i_{k-1}} - a_{i_{k-2}} + \dots +, a_{i_2} - a_{i_1}$ est un somme de nombres appartenant à $\{\pm 1, \pm \alpha\}$, donc $a_{i_k} - a_{i_1}$ est de la forme $n + m\alpha$, avec $n + m$ de la même parité que k.

Ainsi, $0 = a_{i_r} - a_{i_1} = m + n\alpha$. Ceci implique que $n = 0$, sans quoi on aurait $\alpha = -\frac{m}{n}$, ce qui contredit le fait qu'il est irrationnel. On déduit que $m = n = 0$ et r est de la parité de $m + n = 0$, donc r est pair.

Ainsi, G n'admet pas de cycle de longueur impaire, G est donc un graphe bipartite et on conclut à nouveau qu'il existe un ensemble bon de taille au moins $\lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été très peu abordé et très peu résolu. Toutefois, beaucoup d'élèves ont réussi à obtenir des points partiels pour de bonnes idées. Pas mal d'élèves se contentent de donner un exemple réalisant la borne maximal. Si fournir une telle construction faisait partie de l'exercice, il faut être conscient que cela ne fournit pas une preuve. De même, les arguments qui disent que la "situation optimale" est atteinte pour l'exemple "donné" ne sont pas convaicants, en particulier parce qu'il n'y avait pas unicité du cas optimal.