STAGE OLYMPIQUE DE VALBONNE 2022

Animath
Association pour l'animation mathématique

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

CNRS

Jane Street

Avant-propos

Le stage olympique de Valbonne 2022 a été organisé par l'association Animath.

*Son objet a été de rassembler 80 collégiennes, collégiens,
lycéennes et lycéens de la quatrième à la terminale,
de 11 à 17 ans, passionnés de mathématiques
sélectionnés parmi les plus de 1100 candidats à la Coupe Animath,
dont certains représenteront la France aux compétitions internationales :
Olympiades Internationales de Mathématiques (IMO),
Olympiades Balkaniques Junior de Mathématiques (JBMO),
Olympiades Européennes de Filles de Mathématiques (EGMO),
Romanian Masters of Mathematics (RMM),
European Mathematical Cup (EMC),
Olympiade Francophone de Mathématiques (OFM).*

*Un peu plus qu'un tiers des stagiaires a pu découvrir la beauté des mathématiques olympiques,
tandis que les autres, ayant déjà une petite expérience dans ce domaine,
a pu approfondir ses connaissances.*

Nous tenons à remercier le Centre International de Valbonne pour son excellent accueil.

Les Animatheurs


Emile Avérous


Mathieu Barré


Matthieu Bouyer


Thomas Budzinski

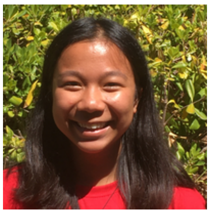

Paul Cahen

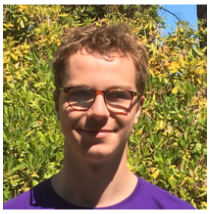

Auguste De Lambilly


Antoine Derimay


Raphaël Ducatez


Benoît Fanton


Hannah Faucheu


Aurélien Fourré


Raphaël Gandin

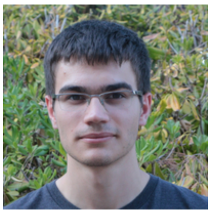

Tristan Humbert


Isaline Jouve

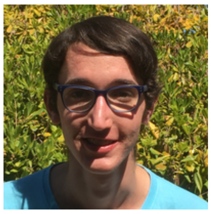

Vincent Jugé


Savinien Kreczman


Théo Lenoir


Arthur Léonard


Rémi Lesbats

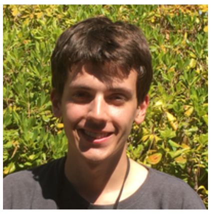

Xavier Pigé


Martin Rakovsky

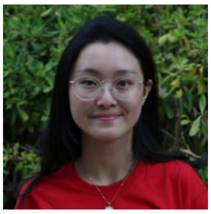

Aladin Sabbagh


Domitille Saliou


Alexander Semenov

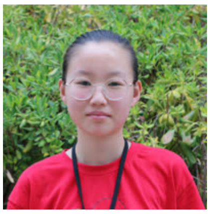

Baptiste Serraille


Issam Tauil


Angela Xue

Les Élèves


Matteo Argentin


Aminaa Batsaikhan


Bilguunsaikhan Batsaikhan


Hélie Bernard


Serge Bidallier


Zoé Blin


Apollinaire Bourin-Lecaille


Anatole Bouton


Leopold Camsing


Théodore Camsing


Ambre Caron


Gaspard Causse


Sanae Chakroune


Hugo Chartoire


Axel Choné


Lancelot Choné


Lucile Cloup


Eva Corot


Maëlys Croisille


Charles Dai

Gaëtan Dautzenberg

Madeleine de Belloy

Gaspard Delabre

Claire Deloye

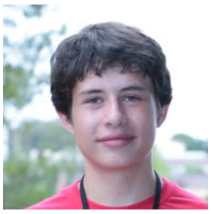
Adrien Déprés

Nils Desurmont

Erik Desurmont

François Dhonneur

Elian Dumanowski



Pierre-Akin Dürrüoglu

Céleste Entraygues

Hadrien Faucheu

Héloïse Faucheu

Oscar Faure

Louis Fréchette

Clément Genninasca

Théo Hollender

Henri Hovasse

Noam Ismaaili-Erny

Itaï Israël


Eva Jacob


Olivia Kahn


Tristan Kévorkian-Mielly

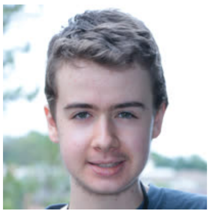

Maryam Kouhkan


Nathan Landau


Noé Le Monnier de Gouville


Nathanaël Lee


Thibault Lefort


Ronan Legros


Irène Lenglart


Corentin Lescœur

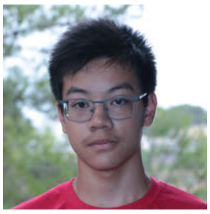

Nicolas Marcus


Hadriel Milot


Augustin Molimard


Baptiste Molinié


Thibault Montrieux


Ahn-Duc Nguyen

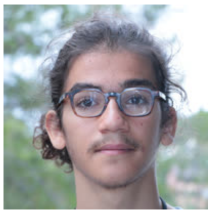

Tristan Nguyen


Khalil Oualdi


Alexandre Paun


Camille Pawlowski


Gabriel Pesquet


Solal Pivron-Djeddi


Auguste Ramondou


Madis Roosma


Thomas Schneider


Nathan Seillan


Arthur Tézé


Georges Tézé


Thomas Thévenon


Clementina Tierno


Lilas Treilleux


Melvil Treilleux


Niels van der Hoeven


Aliénor Vincent


Menglin Yang


Akram Zakine


Alex Zhang


Benjamin Zheng


Elisa Zheng

Table des matières

I. Déroulement du stage

Pour la 7e fois, le Centre International de Valbonne (CIV) nous a accueilli du lundi 15 août vers 15 h au jeudi 25 août vers 11 h, avec un effectif final de 80 stagiaires et 27 animatheurs.

Parmi les plus de 1200 candidats à la Coupe Animath, un peu moins de 600 ont franchi le cap des éliminatoires en temps limité en ligne. Sur la base des résultats de la Coupe, nous devions accueillir 80 stagiaires, dont environ 30 de fin de première, 25 de seconde, 15 de troisième et 10 de quatrième. En prévision des EGMO (Olympiades Européennes Féminines de Mathématiques), et de la JBMO (Olympiades Balkaniques Junior de Mathématiques), des bonifications ont été ajoutées pour favoriser les filles et les plus jeunes.

Le stage était structuré comme ceux des années précédentes : deux périodes de quatre jours (16 - 19 août et 20 - 23 août), trois de cours / exercices, un entraînement de type olympique le matin du quatrième jour (de 9h à 12h, ou, pour le groupe D, de 8h à 12h) et une après-midi récréative. Les élèves étaient répartis en 4 groupes A, B, C, et D en fonction de leur expérience en mathématiques olympiques. Le programme est construit suivant ce qui est demandé lors des compétitions internationales : Arithmétique, Algèbre, Combinatoire et Géométrie.

En plus des cours étaient prévues, le soir, des conférences à vocation culturelle, permettant de découvrir de nouveaux pans des mathématiques. Merci à Vincent Jugé pour son exposé sur les algorithmes de tri, à Thomas Budzinski pour son exposé sur le calcul de la somme des inverses des carrés de manière géométrique, et à Pierre Bernhard pour sa conférence sur la théorie des jeux, et ses applications en économie et en biologie.

L'après-midi suivant le premier entraînement fut organisée une grande chasse au trésor organisée par Raphaël D. et Arthur L. où les élèves ont dû retrouver les numéros préférés des animatheurs. Lors de l'après-midi suivant le deuxième entraînement, un grand poule-renard-vipère a été organisé pour ceux qui voulaient, et de nombreux jeux de société ont été mis à disposition pour les autres.

Il est possible de retrouver les comptes rendus du stage au jour le jour sur le site de la POFM : `https://maths-olympiques.fr/?p=9808`

		Groupe A	Groupe B
15/08	Soirée	Remise des prix de la coupe Animath et présentation du stage, de la POFM et des Olympiades Théo	
16/08	Matin	Découverte des mathématiques Aladin	Algèbre : Récurrence Issam
	Après-midi	Arithmétique : Divisibilité et PGCD Raphaël D	Combinatoire : Principe des tiroirs et de l'extremum Angela
	Soirée	Conférence : "Tris, comparaisons et efficacité" Vincent	
17/08	Matin	Arithmétique : Nombres premiers Antoine	Combinatoire : Pavages, coloriages et invariants Arthur
	Après-midi	Algèbre : Inégalités Auguste	Algèbre : Équations fonctionnelles Rémi
	Soirée	Conférence : "Somme des inverses des carrés" et soirée astronomie Thomas	
18/08	Matin	Arithmétique : Modulo et factorisation Rémi	Combinatoire : Comptage et TD pot pourri Aladin
	Après-midi	Algèbre : TD d'inégalités Théo	Algèbre : TD d'inégalités Angela et Émile
	Soirée	Soirée libre	
19/08		Entraînement, Chasse au trésor, Correction des exercices et astronomie	
20/08	Matin	Combinatoire : Principe des tiroirs Vincent	Arithmétique : Divisibilité, PGCD et nombres premiers Matthieu Bo
	Après-midi	Géométrie : Chasse aux angles Mathieu Ba	Géométrie : Chasse aux angles Domitille et Benoît
	Soirée	Conférence : "Théorie des jeux" et soirée astronomie Pierre Bernhard	
21/08	Matin	Géométrie : Triangles semblables Domitille et Isaline	Arithmétique : Introduction aux modulos Raphaël G
	Après-midi	Combinatoire : Principe du maximum et optimisation Hannah	Géométrie : Triangles semblables Alexander
	Soirée	Soirée libre	
22/08	Matin	Combinatoire : Invariants Xavier	Géométrie : TD pot pourri Hannah et Mathieu Ba
	Après-midi	Géométrie : TD pot pourri Baptiste et Martin	Arithmétique : TD pot pourri Antoine
	Soirée	Soirée libre	
23/08		Entraînement, Activités libres, Correction des exercices et astronomie	
24/08	Matin	Révisions Isaline	Théorie des graphes Xavier
	Après-midi	Théorie des graphes Benoît	Deux points avec une règle trop courte Baptiste
	Soirée	Clôture du stage	

		Groupe C	Groupe D
15/08	Soirée	Remise des prix de la coupe Animath et présentation du stage, de la POFM et des Olympiades Théo	
16/08	Matin	Arithmétique : Ordre et théorème de Fermat Vincent	Théorie des nombres et combinatoire Théo
	Après-midi	Géométrie : Puissance d'un point et axes radicaux Antoine	Combinatoire : Algorithme glouton Arthur
	Soirée	Conférence : "Tris, comparaisons et efficacité" Vincent	
17/08	Matin	Géométrie : Transformations du plan Thomas	Arithmétique : Problèmes de construction Paul et Martin
	Après-midi	Arithmétique : Lemme des restes chinois Issam	Combinatoire : Problèmes de grilles Émile
	Soirée	Conférence : "Somme des inverses des carrés" et soirée astronomie Thomas	
18/08	Matin	Arithmétique : Encadrements Mathieu Bo et Auguste	Arithmétique : Équations fonctionnelles Thomas
	Après-midi	Géométrie : TD pot pourri Martin	Combinatoire : Exercices divers Paul et Vincent
	Soirée	Soirée libre	
19/08		Entraînement, Chasse au trésor, Correction des exercices et astronomie	
20/08	Matin	Algèbre : Équations fonctionnelles Raphaël D	Géométrie : Hypothèses d'angle Martin
	Après-midi	Combinatoire : Double comptage Théo	Algèbre : Équations fonctionnelles Rémi
	Soirée	Conférence : "Théorie des jeux" et soirée astronomie Pierre Bernhard	
21/08	Matin	Algèbre : Polynômes I Benoît	Géométrie : Lemmes divers Baptiste
	Après-midi	Géométrie combinatoire Rémi et Aurélien	Algèbre : Inégalités et Polynômes Antoine
	Soirée	Soirée libre	
22/08	Matin	Algèbre : Polynômes II Raphaël G	Géométrie : Inversion et symédiane Alexander
	Après-midi	Combinatoire : Monovariants Savinien	Algèbre : Divers Tristan et Aurélien
	Soirée	Soirée libre	
23/08		Entraînement, Activités libres, Correction des exercices et astronomie	
24/08	Matin	Leçon de grammaire Savinien	Logique et théorie des modèles Raphaël D
	Après-midi	Irrationalité de π Alexander	Preuve combinatoire du point fixe de Brouwer Tristan
	Soirée	Clôture du stage	

II. Coupe Animath de printemps 2022

Le 8 juin avait lieu la coupe Animath de printemps ! Parmi les plus de 1000 candidats, 5 élèves se sont distingués en particulier, puisqu'ils ont fini en première position pour leur catégorie d'âge. Les lauréats de la coupe Animath de printemps de 2021 sont donc :

— Georges TÉZÉ (parmi les élèves de première) ;
— Auguste RAMONDOU (parmi les élèves de seconde) ;
— Arthur TÉZÉ (parmi les élèves de troisième) ;
— Hadrien FAUCHEU (parmi les élèves de quatrième) ;
— Benjamin ZHENG (parmi les élèves de cinquième).

Exercices collégiens

Exercice 1
Calculer

$$\sqrt{32\sqrt{16\sqrt{8\sqrt{4}}}}.$$

Seule une réponse numérique est attendue ici.

Solution de l'exercice 1
On a :

$$\sqrt{32\sqrt{16\sqrt{8\sqrt{4}}}} = \sqrt{32\sqrt{16\sqrt{8\cdot 2}}} = \sqrt{32\sqrt{16\sqrt{16}}} = \sqrt{32\sqrt{16\cdot 4}} = \sqrt{32\sqrt{64}} = \sqrt{32\cdot 8} = \sqrt{256} = 16.$$

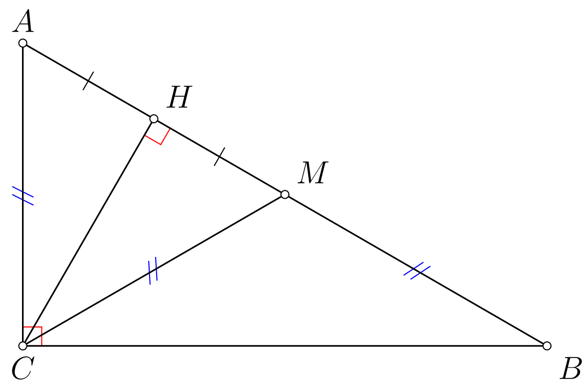
Solution alternative $n°1$ En utilisant la multiplicativité de la racine carrée, on trouve :

$$\begin{aligned}
\sqrt{32\sqrt{16\sqrt{8\sqrt{4}}}} &= \sqrt{32}\cdot\sqrt[4]{16\sqrt{8\sqrt{4}}} \\
&= 4\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{16}\cdot\sqrt[8]{8\sqrt{4}} \\
&= 4\sqrt{2}\cdot 2\cdot\sqrt[8]{8}\cdot\sqrt[16]{4} \\
&= 8\cdot 2^{1/2}\cdot 2^{3/8}\cdot 2^{2/16} \\
&= 8\cdot 2^{1/2+3/8+1/8} \\
&= 8\times 2 = 16.
\end{aligned}$$

<u>Commentaire des correcteurs :</u> L'exercice est très bien réussi. Les quelques erreurs sont dues à des mauvaises manipulations de la racine carrée.

Exercice 2
Soit AMC un triangle isocèle en M et tel que l'angle $\widehat{AMC}$ est aigu. Soit B le symétrique du point A par rapport au point M et soit H le pied de la hauteur issue du sommet C dans le triangle ABC. On suppose que $AH = HM$. Calculer les valeurs des trois angles du triangle ABC.

<u>Solution de l'exercice 2</u>



Dans le triangle AMC, la droite (CH) est à la fois la hauteur et la médiane issues du sommet C. Le triangle ACM est donc isocèle en C. Ainsi, $AC = CM$. Puisque $CM = MA$, le triangle ACM est équilatéral et $\widehat{BAC} = 60°$.

Comme les points A, M et B sont alignés, on a $\widehat{CMB} = 180° - \widehat{AMC} = 120°$.

Puisque A et B sont symétriques par rapport à M, on a $MA = MB = MC$, de sorte que le triangle MBC est isocèle en M. Ainsi,

$$180° = \widehat{BMC} + \widehat{MBC} + \widehat{BCM} = \widehat{BMC} + 2\widehat{MBC}.$$

On a donc $2\widehat{MBC} = 180° - \widehat{BMC} = 60°$ et $\widehat{ABC} = 30°$.

On déduit finalement que $\widehat{ACB} = \widehat{ACM} + \widehat{MCB} = 60° + 30° = 90°$.

Les angles du triangle sont donc $(\widehat{ABC}, \widehat{BCA}, \widehat{CAB}) = (30°, 90°, 60°)$.

<u>Commentaire des correcteurs :</u> L'exercice est globalement bien réussi. Les intuitions sont bonnes et les collégiens parviennent par plusieurs méthodes à montrer que AMC est équilatéral puis à bien utiliser ce résultat. La plupart du temps, les élèves qui n'ont pas résolu l'exercice n'ont pas assez exploité l'égalité $HM = HA$ de l'énoncé, qui est le point-clef pour montrer que AMC est isocèle en C.

Exercice 3
On considère vingt immeubles arrangés autour d'un cercle. Chaque immeuble possède un nombre entier d'étages compris entre 1 et 20. On suppose que deux immeubles quelconques ont toujours un nombre d'étages différent. Un immeuble est dit *intéressant* s'il possède plus d'étages que l'un de ses voisins et moins d'étage que l'autre de ses voisins. Les immeubles sont arrangés de telle sorte qu'il y a six immeubles intéressants en tout.

1) Montrer que la somme des nombres d'étages des immeubles intéressants est toujours supérieure ou égale à 27.

2) Donner une configuration de vingt immeubles pour laquelle il y a exactement six immeubles intéressants et dont la somme des nombres d'étages vaut exactement 27.

Solution de l'exercice 3

1) Puisqu'il y a vingt immeubles et que les nombres d'étages sont toujours différents pour deux immeubles différents, pour chaque entier n entre 1 et 20, il y a exactement un immeuble qui possède exactement n étages.

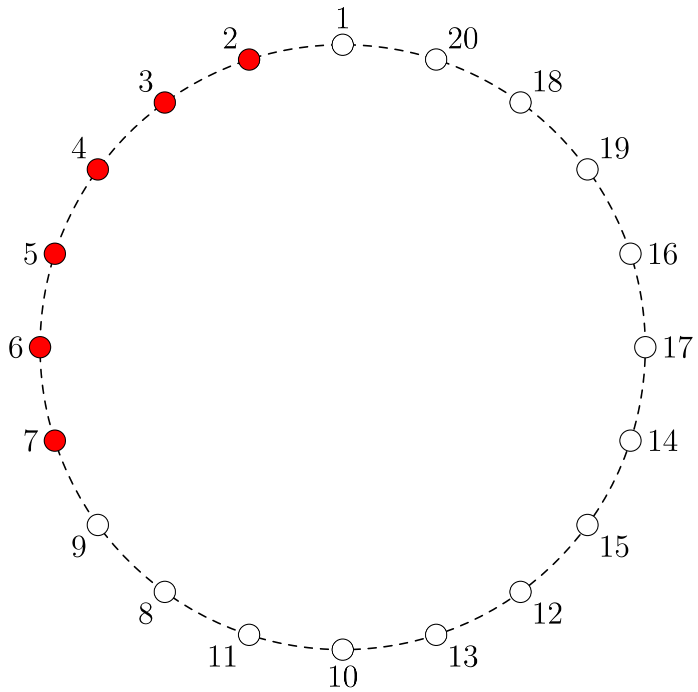
L'immeuble possédant 1 étage a forcément moins d'étages que ses voisins, il n'est donc pas intéressant.

Ainsi, l'immeuble intéressant avec le moins d'étages possède au moins deux étages. De même, l'immeuble intéressant avec le deuxième plus petit nombre d'étages possède au moins trois étages. De proche en proche, l'immeuble intéressant avec le $k^{\text{ème}}$ plus petit nombre d'étages possède au moins $k+1$ étages. La somme des nombres d'étages des immeubles intéressants est donc toujours supérieure ou égale à

$$2+3+4+5+6+7=27,$$

ce qui est bien la valeur minimale voulue.

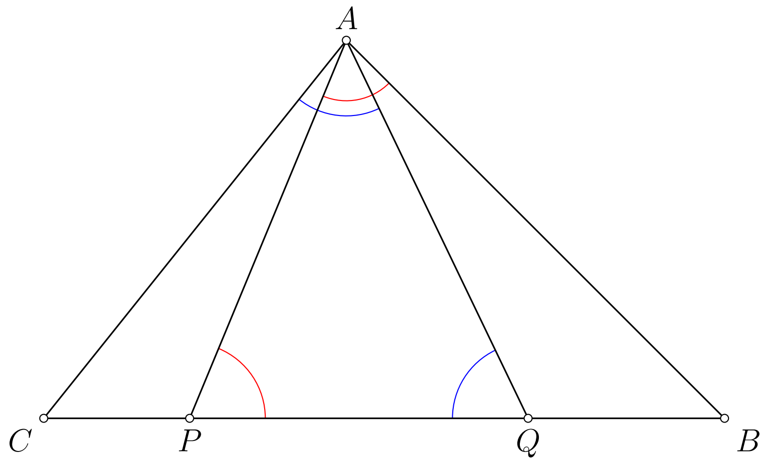
2) Dans la configuration suivante, les immeubles sont représentés par des points et les numéros correspondent au nombre d'étages des immeubles. On vérifie qu'il y a exactement 6 immeubles intéressants (en rouge) et que la somme de leurs nombres d'étages vaut 27 :



Commentaire des correcteurs : L'exercice est bien réussi. Les erreurs proviennent souvent de fautes d'inattention. Les preuves manquaient parfois de rigueur, mais la plupart avaient les bonnes idées. On rappelle que tenter de construire un exemple avec la somme la plus basse possible et arriver à une somme de 27 ne suffit pas à montrer que la somme minimale est 27.

Exercice 4
Soit ABC un triangle dans lequel $BC > AB$ et $BC > AC$. Soit P le point du segment $[BC]$ tel que $AB = BP$ et soit Q le point du segment $[BC]$ tel que $AC = CQ$. Montrer que $\widehat{BAC} + 2\widehat{PAQ} = 180°$.

Solution de l'exercice 4



Puisque le triangle APB est isocèle, on a

$$180° = \widehat{ABP} + \widehat{BAP} + \widehat{APB} = \widehat{ABC} + 2\widehat{PAB}. \tag{II.1}$$

Puisque le triangle CAQ est isocèle, on a

$$180° = \widehat{ACQ} + \widehat{CAQ} + \widehat{AQC} = \widehat{ACB} + 2\widehat{CAQ}. \tag{II.2}$$

On peut alors calculer :

$$\begin{aligned}
\widehat{PAQ} &= \widehat{BAC} - \widehat{CAP} - \widehat{BAQ} \\
&= (\widehat{BAC} - \widehat{CAP}) + (\widehat{BAC} - \widehat{BAQ}) - \widehat{BAC} \\
&= \widehat{PAB} + \widehat{QAC} - \widehat{BAC}
\end{aligned}$$

En multipliant par 2 des deux côtés de l'égalité ainsi obtenue, et en utilisant (1) et (2), on trouve bien

$$\begin{aligned}
2\widehat{PAQ} + \widehat{BAC} &= 2(\widehat{PAB} + \widehat{QAC} - \widehat{BAC}) + \widehat{BAC} \\
&= 2\widehat{PAB} + 2\widehat{QAC} - \widehat{BAC} \\
&= 180° - \widehat{ABC} + 180° - \widehat{ACB} - \widehat{BAC} \\
&= 360° - (\widehat{ABC} + \widehat{ACB} + \widehat{BAC}) \\
&= 180°,
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé que la somme des angles du triangle ABC vaut $180°$. On a donc bien l'égalité annoncée.

Commentaire des correcteurs : L'exercice est bien réussi. Les élèves ont produit des solutions variées, parfois différentes de la solution officielle.

Exercice 5

Dans une salle il y a dix élèves. Aline écrit dix entiers relatifs consécutifs au tableau. Chaque élève choisit un des dix entiers écrits au tableau, de sorte que deux élèves choisissent toujours deux entiers différents. Chaque élève calcule ensuite la somme des neuf entiers choisis par les neuf autres élèves. Chaque élève dont le résultat est un carré parfait reçoit alors un cadeau.

Quel est le nombre maximum d'élèves qui vont recevoir un cadeau ?

Un carré parfait est un entier de la forme n^2, où n est un entier naturel.

Solution de l'exercice 5

L'exercice demande de déterminer la valeur maximale d'une certaine quantité. Le raisonnement contient donc deux étapes, appelées analyse et synthèse.

Étape 1, l'analyse : On montre que le nombre d'élèves recevant un cadeau est forcément inférieur ou égal à quatre, et ce quelques soients les nombres choisis par Aline.

Soient $n, n+1, \ldots, n+9$ les dix nombres écrits au tableau et soit S leur somme. Si l'on efface un des entiers du tableau, la somme des neuf nombres restants est l'un des entiers :

$$S-n\,,\;S-n-1\,,\;\ldots\,,S-n-9$$

qui sont dix entiers consécutifs.

On cherche alors le maximum d'entiers qui peuvent être des carrés parfaits parmi dix entiers consécutifs.

Tout d'abord, puisque les carrés parfaits sont des entiers positifs, un ensemble de dix entiers consécutifs dont l'un est négaitf contient moins de carrés parfaits que l'ensemble $\{0, \ldots, 9\}$. Ensuite, notons que parmi les entiers de 0 à 9, on compte quatre carrés parfaits, qui sont les entiers $0, 1, 4$ et 9. Supposons qu'il existe dix entiers consécutifs positifs tels qu'au moins cinq d'entre eux soient des carrés parfaits. On dispose alors d'un entier a positif tel que les nombres $a^2, (a+1)^2, (a+2)^2, (a+3)^2$ et $(a+4)^2$ figurent parmi les dix entiers consécutifs. On a alors $9 \geqslant (a+4)^2 - a^2 = 8a + 16 > 9$, ce qui est absurde.

Ainsi, le maximum d'entiers qui peuvent être des carrés parfaits parmi les dix entiers $S-n, \ldots, S-n-9$ est 4, ce qui signifie qu'il y a au maximum quatre élèves qui recevront un cadeau.

Étape 2, la synthèse : On montre que la borne obtenue dans l'analyse est atteignable, c'est-à-dire qu'il existe dix entiers consécutifs pour lesquels les élèves peuvent s'arranger pour recevoir quatre cadeaux.

Pour cela, on observe que la somme de neuf des dix entiers $n, n+1, \ldots, n+9$ est toujours comprise entre

$$n + (n+1) + \ldots + (n+8) = 9n + 36 \quad \text{et} \quad (n+1) + (n+2) + \ldots + (n+9) = 9n + 45$$

Ainsi, les carrés parfaits que choisissent les élèves sont des entiers compris entre $9n + 36$ et $9n + 45$. On a vu lors de l'analyse que l'ensemble $\{0, \ldots, 9\}$ contenait 4 carrés parfaits. On cherche donc n satisfaisant $9n + 36 = 0$ et $9n + 45 = 9$, ce qui conduit à $n = -4$.

Ainsi, si Aline écrit les entiers

$$-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

les élèves peuvent choisir les entiers $5, 4, 1$ ou -4, de sorte que la somme des neuf entiers restant vaudra respectivement $0, 1, 4$ et 9.

Le plus grand nombre d'élèves possible qui recevront un cadeau est quatre.

Commentaire des correcteurs : L'exercice était difficile pour beaucoup d'élèves, et n'a le plus souvent été que partiellement résolu. Il était composé de deux parties : une analyse qui consiste à montrer qu'on ne peut pas faire mieux que 4 cadeaux, et une synthèse dans laquelle il faut expliciter avec quels entiers initialement au tableau on peut effectivement obtenir 4 cadeaux. De nombreux élèves n'ont pas pris en compte le fait que les entiers écrits au tableau étaient relatifs, donc positifs ou négatifs, et se sont malheureusement limités au cas positif. Beaucoup oublient certains arguments principaux, comme le fait que les sommes obtenues sont consécutives, ce qui justifie le fait de chercher des carrés dans un intervalle de taille 10. Certains tentent d'invoquer des arguments de « densité » des carrés pour essayer de justifier qu'il faut s'intéresser aux petits entiers pour trouver beaucoup de carrés, mais cet argument est insuffisant. Enfin, une étonnante proportion des élèves oublie que 0 est un carré parfait, ce qui n'a finalement pas été pénalisé.

Exercice 6

Déterminer tous les triplets de réels (a, b, c) satisfaisant les trois équations

$$a^2 + b = c^2 \ , \ b^2 + c = a^2 \ , \ c^2 + a = b^2.$$

Solution de l'exercice 6

On commence par sommer les trois équations. On obtient

$$a^2 + b + b^2 + c + c^2 + a = c^2 + a^2 + b^2$$

ce qui, après simplification, donne que $a + b + c = 0$.

D'autre part, la troisième équation se réécrit :

$$a = b^2 - c^2 = (b - c)(b + c)$$

En utilisant que $b + c = -a$, on trouve que $a = -a(b - c)$, soit $a(b - c + 1) = 0$. On a donc $a = 0$ ou $b = c - 1$. De la même manière, on a $b = 0$ ou $c = a - 1$ et $c = 0$ ou $a = b - 1$.

Supposons que $a = 0$. La troisième équation devient $c^2 = b^2$, soit $b = \pm c$. Si $b = c$, alors $0 = b + c = 2b = 2c$ donc $a = b = c = 0$. Réciproquement, le triplet $(0, 0, 0)$ vérifie bien les trois équations. Si $b = -c$, la première équation fournit $c^2 = -c$, soit $0 = c^2 + c = c(c + 1)$. Si $c = 0$, alors $b = -a - c = 0$ et on a trouvé à nouveau le triplet $(0, 0, 0)$. Si $c + 1 = 0$, alors $c = -1 = -b$. Réciproquement, le triplet $(0, 1, -1)$ vérifie les équations.

On traite de la même manière le cas où $b = 0$, qui donne les deux triplets $(0, 0, 0)$ et $(-1, 0, 1)$, dont on vérifie qu'ils sont bien solutions du problème, ainsi que le cas où $c = 0$, qui donne les deux triplets $(0, 0, 0)$ et $(1, -1, 0)$, dont on vérifie qu'ils sont bien solutions du problème.

On suppose désormais qu'aucun des réels a, b ou c n'est nul. On a alors $c = b + 1$, $b = a + 1$ et $a = c + 1$. Mais alors $a = c + 1 = b + 2 = a + 3$, ce qui est absurde.

Les seuls triplets solutions sont donc $\{(0, 0, 0), (0, 1, -1), (-1, 0, 1), (1, -1, 0)\}$.

Commentaire des correcteurs : Ce problème était difficile et très peu l'ont entièrement réussi. Mais beaucoup ont réussi à avancer, et à donner des pistes très pertinentes pour avancer, ce qui a évidemment rapporté des points à leurs auteurs.

— La notion de racine carrée est utilisée souvent à mauvais escient. Des élèves utilisent que $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$, qui est faux, d'autant plus quand certaines quantités pouvaient être négatives. Par exemple, $a = b^2 - c^2$ n'implique pas que $\sqrt{a} = b - c$.

— Les élèves ont souvent trouvé $(0,0,0)$ comme solution. Mais rarement ceux-ci ont vu que $(1,0,-1)$ par exemple était solution. Trouver $(0,0,0)$ comme solution devait encourager à regarder $b = 0$ pour voir d'autres solutions : pour avoir des points en trouvant les solutions, il faut souvent les trouver toutes.

— Souvent des élèves ont factorisé certaines expressions et abouti, par exemple, à $(c-b)(c+b) = c+b$. Certains simplifient sans vergogne pour aboutir à $c - b = 1$, mais il ne faut pas oublier le cas où $b + c = 0$.

— Une bonne partie des élèves a réussi à prouver que $a + b + c = 0$. Mais souvent, le raisonnement s'arrête abruptement en disant que forcément $(a,b,c) = (0,0,0)$. Il faut être rigoureux et honnête : conclure hâtivement que $(a,b,c) = (0,0,0)$ empêche d'avoir une preuve complète, et de développer des idées pertinentes pour avancer.

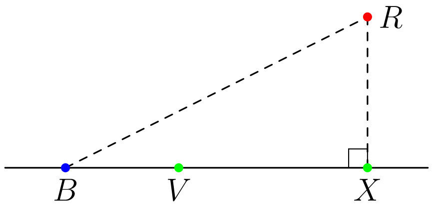
— Les solutions trouvées doivent toujours être vérifiées. En compétition internationale, cela peut faire perdre un point.

Exercice 7
On colorie chaque point du plan avec l'une des trois couleurs bleu, vert ou rouge. Pour chaque couleur, on suppose qu'il existe au moins un point du plan colorié avec cette couleur. Montrer qu'il existe un triangle rectangle dont les trois sommets sont de couleurs différentes deux à deux.

Solution de l'exercice 7
La solution se base sur l'idée suivante : considérer une droite d particulière, regarder les perpendiculaires à d passant par des points bien choisis et tirer parti de l'infinité de points sur d et sur les perpendiculaires à d.

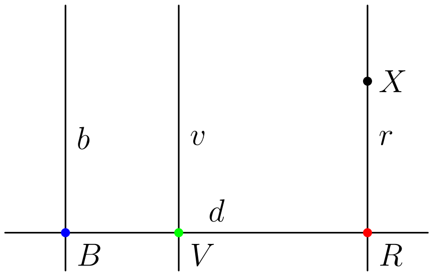
On suppose par l'absurde qu'il n'existe pas de triangles rectangle dont les trois sommets sont de trois couleurs distinctes.

Soient B, V et R trois points respectivement de couleur bleue, verte et rouge. Soit X le projeté orthogonale du point R sur la droite (BV). Si X est bleu, alors le triangle RXV est rectangle en X et a ses trois sommets de même couleur. Si X est vert, le triangle BXR est rectangle en X et a ses trois sommets de même couleur.

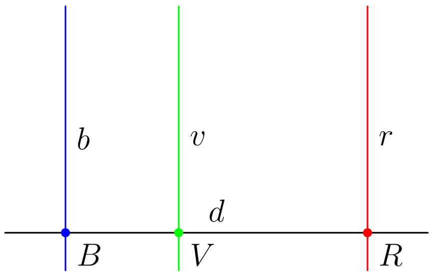


Dans la suite, on suppose donc que le point X est rouge, et on le renomme R. On dispose donc de trois points B, V et R alignés sur une même droite et de trois couleurs différentes.

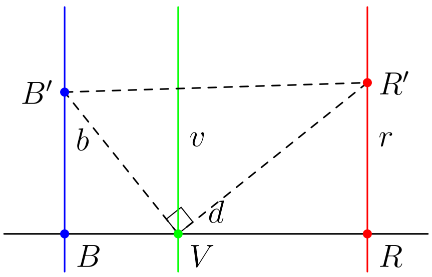
On note à présent b, v et r les perpendiculaires à la droite (BV) passant respectivement par les points B, V et R.



En réitérant l'argument précédent, on obtient que tout point de b est bleu, tout point de v est vert et tout point de r est rouge. En effet, prenons un point Y sur la droite r. Si Y n'est pas rouge, alors l'un des triangles VRX ou BRX est rectangle en R et a ses trois sommets de trois couleurs différentes. On obtient donc une contradiction.



On prend alors un point R' différent de R sur la droite r. On trace ensuite la perpendiculaire p à (VR') passant par V. Puisque (VR') n'est pas perpendiculaire à v, p n'est pas parallèle à v et donc à b, donc p coupe b en un point B'. Le triangle $B'VR$ est alors rectangle en V et possède un sommet de chaque couleur, ce qui est encore en contradiction avec notre hypothèse de départ.



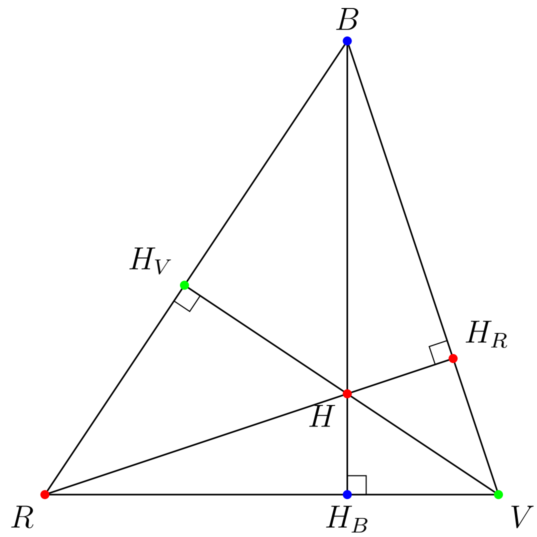
Ceci conclut le cas où il existe trois points V, B, R de chaque couleur alignés sur une même droite.

<u>*Solution alternative n°1*</u> Commençons par montrer qu'il existe un triangle non plat dont les trois sommets sont de couleurs différentes.

Supposons que ce ne soit pas le cas et prenons B un point bleu et V un point vert. Par notre hypothèse, tous les points rouges du plan appartiennent à la droite (BV). En effet, dans le cas contraire, il existerait un point R rouge qui n'appartient pas à (BV) et alors le triangle BVR est non plat et a ses sommets de trois couleurs différentes.

Soit R un point rouge quelconque. Le point rouge est donc aligné avec B et V. En appliquant notre raisonnement précédent à la droite (RV), on obtient que tous les points bleus du plan appartiennent à la droite (RV). Mais alors, les points du plan qui ne sont pas sur la droite passant par B, R et V sont tous verts. On peut alors construire un triangle dont les trois sommets sont de trois couleurs différentes en reliant les points B et R ainsi qu'un point vert qui n'est pas sur (BV). Ceci contredit à nouveau notre hypothèse.

On dispose donc d'un triangle non plat BVR tel que B est bleu, V est vert et R est rouge. On note H_B le pied de la hauteur issue de B, H_V le pied de la hauteur issue de V et H_R le pied de la hauteur issue de R. Les droites $(H_B B), (H_V V)$ et $(H_R R)$ sont concourantes en l'orthocentre du triangle BVR, que l'on note H.



Si le point H_B n'est pas bleu, alors l'un des triangles BH_BR ou BH_BV est un triangle rectangle avec trois sommets de couleurs différentes.

On suppose donc dans la suite que le point H_B est bleu. En appliquant le même raisonnement que précédemment aux points H_V et H_R, on se restreint au cas où H_V est vert et H_R est rouge.

Si H est bleu, alors le triangle HH_RV est rectangle et a ses trois sommets de couleurs différentes. Si H est vert, le triangle HH_BR est rectangle et a ses trois sommets de couleurs différentes. Et enfin si H est rouge, le triangle HH_VB est rectangle et a ses trois sommets de couleurs différentes.

Dans tous les cas, on a obtenu un triangle satisfaisant la propriété de l'énoncé.

Commentaire des correcteurs : Ce problème était difficile et peu l'ont entièrement réussi. La principale difficulté de ce problème était de trouver la bonne façon de penser, c'est-à-dire partir de nos trois points de couleurs différentes et en construire de nouveaux ne pouvant être d'une certaine couleur, voire même déterminer leur couleur. De nombreuses solutions différentes ont été présentées.

— La notion d'infini est globalement mal comprise : souvent les élèves invoquent l'infini pour obtenir l'existence d'un objet, alors que cette existence est loin d'être triviale. Ici le fait qu'il existe une infinité de points d'une couleur n'était d'aucune utilité. Traiter des cas particuliers allant dans ce sens n'était pas utile. Un argument d'autorité comme invoquer l'infini ne peut constituer une preuve.

— Certains élèves ont tenté d'appliquer Pythagore, ou de calculer des coordonnées : cela n'était malheureusement pas utile ici.

— Beaucoup d'élèves donnaient un processus pour construire une famille de points ne pouvant être d'une couleur fixée et se contentaient ensuite de dire que cela recouvrait le plan. Tout l'enjeu du problème était de vérifier que les différentes droites ou cercles créés recouvraient le plan. Et les élèves ayant introduit ce processus n'ont jamais réussi à conclure, ni même à bien avancer dans l'exercice.

— Certains élèves considèrent trois points de couleurs différentes, puis construisent des triangles à partir de ceux-là (en considérant les projetés orthogonaux) en oubliant que le triangle initial peut être plat, ou admettent directement l'existence d'un triangle non plat tricolore, ce qui demande pourtant une preuve.

Exercices lycéens

Exercice 8
Le prix (en euros) d'un diamant correspond à sa masse (en grammes) élevée au carré puis multipliée par 100. Le prix (en euros) d'un cristal correspond à trois fois sa masse (en grammes).

Martin et Théodore déterrent un trésor composé de pierres précieuses qui sont soit des diamants soit des cristaux et dont la valeur totale est de $5\,000\,000$ €. Ils découpent chaque pierre précieuse en deux, et prennent chacun une moitié de chaque pierre. La valeur totale des pierres de Martin vaut $2\,000\,000$ €. En euros, quelle était la valeur totale initiale des diamants contenus dans le trésor ?

Seule une réponse numérique est attendue ici.

Solution de l'exercice 8
On note r le nombre de pierres qui sont des diamants et on note $d_1, \ldots, d_r$ les masses respectives des diamants déterrés. On note également c la masse de cristal déterrée. On cherche à déterminer la valeur de $100(d_1^2 + \ldots + d_r^2)$.

Puisque la valeur totale des pierres précieuses déterrées vaut $5\,000\,000$, on a

$$100(d_1^2 + \ldots + d_r^2) + 3c = 5\,000\,000 \tag{II.3}$$

Puisque Martin reçoit la moitié de la masse totale de diamant et la moitié de la masse totale de cristal, et que la valeur de la part de Martin vaut $2\,000\,000$, on a aussi

$$100\left[\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{d_r}{2}\right)^2\right] + 3 \cdot \frac{c}{2} = 2\,000\,000 \tag{II.4}$$

En soustrayant deux fois (2) à (1), on trouve

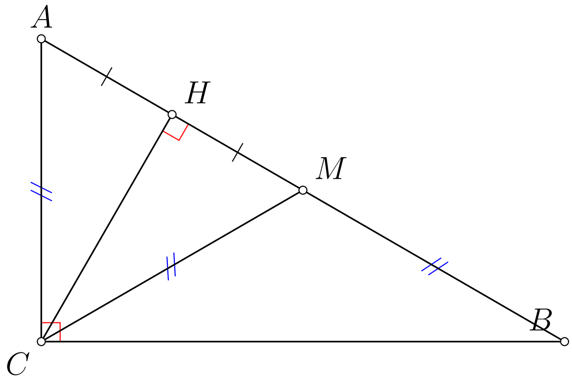
$$100(d_1^2 + \ldots + d_r^2) - 2 \times 25(d_1^2 + \ldots + d_r^2) + 3c - 2 \times 3 \cdot \frac{c}{2} = 5\,000\,000 - 2 \times 2\,000\,000$$

soit $50(d_1^2 + \ldots + d_r^2) = 1\,000\,000$. Ainsi, $100(d_1^2 + \ldots + d_r^2) = 2\,000\,000$ et la valeur totale initiale des diamants contenus dans le trésor vaut $2\,000\,000$.

Commentaire des correcteurs : Un exercice bien réussi pour la grande majorité. Les fautes commises sont majoritairement dues à une mauvaise modélisation de l'énoncé. Plusieurs élèves se sont contentés d'écrire un résultat numérique faux et n'ont donc reçu aucun point pour ce premier exercice qui était le plus simple du sujet lycée. Même si seule une réponse numérique est attendue, on conseille donc d'écrire son raisonnement pour prendre quelques points.

Exercice 9
Soit AMC un triangle isocèle en M et tel que l'angle $\widehat{AMC}$ est aigu. Soit B le symétrique du point A par rapport au point M et soit H le pied de la hauteur issue du sommet C dans le triangle ABC. On suppose que $AH = HM$. Calculer les valeurs des trois angles du triangle ABC.

Solution de l'exercice 9



Dans le triangle AMC, la droite (CH) est la hauteur et la médiane issue du sommet C. Le triangle ACM est donc isocèle en C. Donc $AC = CM$. Puisque $CM = MA$, le triangle ACM est équilatéral et $\widehat{BAC} = 60°$.

Puisque les points A, M et B sont alignés, on a $\widehat{CMB} = 180° - \widehat{AMC} = 120°$.

Puisque A et B sont symétriques par rapport à M, on a $MA = MB = MC$, de sorte que le triangle MBC est isocèle en M. Ainsi,

$$180° = \widehat{BMC} + \widehat{MBC} + \widehat{BCM} = \widehat{BMC} + 2\widehat{MBC}$$

On a donc $2\widehat{MBC} = 180° - \widehat{BMC} = 60°$ et $\widehat{ABC} = 30°$.

On déduit finalement que $\widehat{ACB} = \widehat{ACM} + \widehat{MCB} = 60° + 30° = 90°$.

Les angles du triangle sont donc $(\widehat{ABC}, \widehat{BCA}, \widehat{CAB}) = (30°, 90°, 60°)$.

Commentaire des correcteurs : Exercice très bien réussi dans l'ensemble. Les élèves ont su tirer profit des hypothèses de l'énoncé pour déterminer les angles du triangle et plusieurs méthodes ont été proposées.

La plupart du temps, les élèves qui n'ont pas résolu l'exercice n'ont pas exploité l'égalité $HM = HA$ de l'énoncé. Il est crucial d'essayer d'exploiter au maximum les hypothèses de l'énoncé : tout raisonnement ne les utilisant pas en totalité était voué à l'échec ici. Vérifier que toutes les hypothèses ont été invoquées est également une bonne façon de relire son raisonnement.

D'autres élèves ont perdu des points dans leurs justifications. Attention à bien justifier clairement ses propos, notamment pour démontrer que le triangle AMC est équilatéral : constater une propriété sur un grand nombre de figures ne suffit pas pour la prouver.

D'autre part, les approches trigonométriques ou analytiques, en général risquées, aboutissaient souvent ici à une perte de points due à des erreurs de calcul.

Enfin, il est dommage que certains élèves perdent inutilement des points à cause d'une mauvaise lecture de l'énoncé, nous rappelons donc également l'importance de réaliser une figure claire pour éviter cela.

Exercice 10

On considère vingt immeubles arrangés autour d'un cercle. Chaque immeuble possède un nombre entier d'étages compris entre 1 et 20. On suppose que deux immeubles quelconques ont toujours un nombre d'étages différent. Un immeuble est dit *intéressant* s'il possède plus d'étages que l'un de ses voisins et moins d'étage que l'autre de ses voisins. Les immeubles sont arrangés de telle sorte qu'il y a six immeubles intéressants en tout.

1) Montrer que la somme des nombres d'étages des immeubles intéressants est toujours supérieure ou égale à 27.

2) Donner une configuration de vingt immeubles pour laquelle il y a exactement six immeubles intéressants et dont la somme des nombres d'étages vaut exactement 27.

Solution de l'exercice 10

1) Puisqu'il y a vingt immeubles et que les nombres d'étages sont toujours différents pour deux immeubles différents, pour chaque entier n entre 1 et 20, il y a exactement un immeuble qui possède exactement n étages.

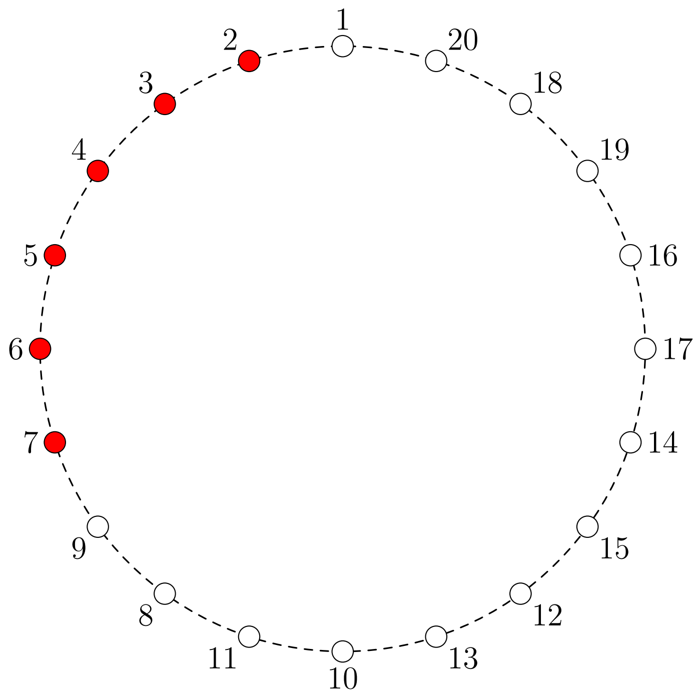
L'immeuble possédant 1 étage a forcément moins d'étages que ses voisins, il n'est donc pas intéressant.

Ainsi, l'immeuble intéressant avec le moins d'étages possède au moins deux étages. De même, l'immeuble intéressant avec le deuxième plus petit nombre d'étages possède au moins trois étages. De proche en proche, l'immeuble intéressant avec le $k-$ème plus petit nombre d'étages possède au moins $k+1$ étages. La somme des nombres d'étages des immeubles intéressants est donc toujours supérieure ou égale à

$$2+3+4+5+6+7=27$$

ce qui est bien la valeur minimale voulue.

2) Dans la configuration suivante, les immeubles sont représentés par des points et les numéros correspondent au nombre d'étages des immeubles. On vérifie qu'il y a exactement 6 immeubles intéressants (en rouge) et que la somme de leurs nombres d'étages vaut 27 :



Commentaire des correcteurs : L'exercice est bien réussi. Les erreurs proviennent souvent de fautes d'inattention. Les preuves manquaient parfois de rigueur, mais la plupart avaient les bonnes idées. On rappelle que tenter de construire un exemple avec la somme la plus basse possible et arriver à une somme de 27 ne suffit pas à montrer que la somme minimale est 27.

Exercice 11
Dans une salle il y a dix élèves. Aline écrit dix entiers relatifs consécutifs au tableau. Chaque élève choisit un des dix entiers écrits au tableau, de sorte que deux élèves choisissent toujours deux entiers différents. Chaque élève calcule ensuite la somme des neuf entiers choisis par les neuf autres élèves. Chaque élève dont le résultat est un carré parfait reçoit alors un cadeau.

Quel est le nombre maximum d'élèves qui vont recevoir un cadeau ?

Un carré parfait est un entier de la forme n^2, où n est un entier naturel.

Solution de l'exercice 11
L'exercice demande de déterminer la valeur maximale d'une certaine quantité. Le raisonnement contient donc deux étapes, appelées analyse et synthèse.

Étape 1, l'analyse : On montre que le nombre d'élèves recevant un cadeau est forcément inférieur ou égal à quatre, et ce quelques soients les nombres choisis par Aline.

Soient $n, n+1, \ldots, n+9$ les dix nombres écrits au tableau et soit S leur somme. Si l'on efface un des entiers du tableau, la somme des neuf nombres restants est l'un des entiers :

$$S-n\,,\ S-n-1\,,\ \ldots\,, S-n-9$$

qui sont dix entiers consécutifs.

On cherche alors le maximum d'entiers qui peuvent être des carrés parfaits parmi dix entiers consécutifs.

Tout d'abord, puisque les carrés parfaits sont des entiers positifs, un ensemble de dix entiers consécutifs dont l'un est négaitf contient moins de carrés parfaits que l'ensemble $\{0, \ldots, 9\}$. Ensuite, notons que parmi les entiers de 0 à 9, on compte quatre carrés parfaits, qui sont les entiers $0, 1, 4$ et 9. Supposons qu'il existe dix entiers consécutifs positifs tels qu'au moins cinq d'entre eux soient des carrés parfaits. On dispose alors d'un entier a positif tel que les nombres a^2, $(a+1)^2$, $(a+2)^2$, $(a+3)^2$ et $(a+4)^2$ figurent parmi les dix entiers consécutifs. On a alors $9 \geqslant (a+4)^2 - a^2 = 8a + 16 > 9$, ce qui est absurde.

Ainsi, le maximum d'entiers qui peuvent être des carrés parfaits parmi les dix entiers $S-n, \ldots, S-n-9$ est 4, ce qui signifie qu'il y a au maximum quatre élèves qui recevront un cadeau.

Étape 2, la synthèse : On montre que la borne obtenue dans l'analyse est atteignable, c'est-à-dire qu'il existe dix entiers consécutifs pour lesquels les élèves peuvent s'arranger pour recevoir quatre cadeaux.

Pour cela, on observe que la somme de neuf des dix entiers $n, n+1, \ldots, n+9$ est toujours comprise entre

$$n + (n+1) + \ldots + (n+8) = 9n + 36 \quad \text{et} \quad (n+1) + (n+2) + \ldots + (n+9) = 9n + 45$$

Ainsi, les carrés parfaits que choisissent les élèves sont des entiers compris entre $9n + 36$ et $9n + 45$. On a vu lors de l'analyse que l'ensemble $\{0, \ldots, 9\}$ contenait 4 carrés parfaits. On cherche donc n satisfaisant $9n + 36 = 0$ et $9n + 45 = 9$, ce qui conduit à $n = -4$.

Ainsi, si Aline écrit les entiers

$$-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

les élèves peuvent choisir les entiers $5, 4, 1$ ou -4, de sorte que la somme des neuf entiers restant vaudra respectivement $0, 1, 4$ et 9.

Le plus grand nombre d'élèves possible qui recevront un cadeau est quatre.

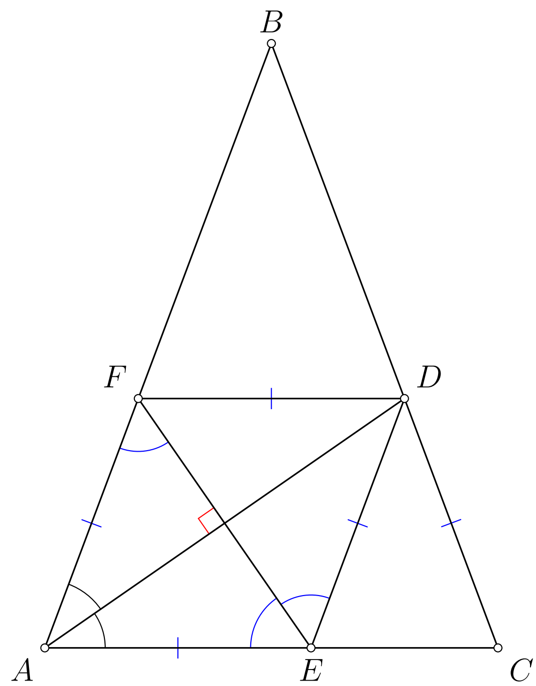
Commentaire des correcteurs : Cet exercice a été abordé par la plupart des élèves, bien compris en substance par ceux-ci, mais il n'a étonnamment pas été bien réussi. La plupart des élèves (plus des deux tiers) a réussi à trouver la configuration permettant d'obtenir 4 élèves gagnants - d'ailleurs de nombreux élèves ont oublié de comptabiliser 0 comme un carré parfait.

Cependant, très peu d'élèves ont réussi à justifier rigoureusement que l'intervalle de 0 à 9 était l'intervalle de 10 entiers consécutifs contenant le plus de carrés parfaits. Si la notation tenait plus compte des idées que de la façon avec laquelle elles étaient rédigées, nous nous attendions toutefois à plus de soin dans les justifications des arguments. Ainsi la majorité des solutions était incomplète, même si elles ont été gratifiées de 7 points, et rares sont les élèves qui ont produit une preuve véritablement rigoureuse de leur assertion. Il est dommage de voir des phrases telles que « les carrés s'éloignent de plus en plus », « la fonction carrée est de plus en plus croissante », « les carrés sont de plus en plus dispersés » se substituer à des calculs, qui sont la seule source de rigueur ici. On note également des problèmes de vocabulaire, notamment lorsque les élèves affirment que la fonction carrée était exponentielle, pour ne citer qu'un exemple.

Exercice 12

Soit ABC un triangle isocèle en B. Soit D le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ avec le segment $[BC]$. Soit E le point du segment $[AC]$ distinct de C tel que $DE = DC$. Soit F le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{AED}$ avec le côté $[AB]$. Montrer que $\widehat{AFE} = \widehat{EFD}$.

Solution de l'exercice 12



Tout d'abord, puisque $DE = DC$, le triangle EDC est isocèle en D et $\widehat{DEC} = \widehat{DCE} = \widehat{BCA} = \widehat{BAC}$, de sorte que les angles correspondants $\widehat{DEC}$ et $\widehat{BAC}$ sont égaux. Les droites

(DE) et (AB) sont donc parallèles.

Les angles alternes-internes $\widehat{FED}$ et $\widehat{AFE}$ sont donc égaux, ce qui implique que $\widehat{FEA} = \widehat{FED} = \widehat{AFE}$. Le triangle AFE est donc isocèle au point A. La droite (AD), qui est la bissectrice de l'angle $\widehat{FAE}$, est donc aussi la médiatrice du segment $[FE]$. Puisque D est sur cette droite, on a donc $DF = DE$.

Les droites (AD) et (EF) sont donc perpendiculaires, de sorte que la droite (EF) est la hauteur issue de E dans le triangle AED mais aussi la bissectrice de l'angle $\widehat{AED}$. Le triangle AED est donc isocèle, et l'on déduit que $DC = DE = DF = AE = AF$.

Le quadrilatère $AFDE$ est donc un losange. Ses diagonales sont donc les bissectrices de ses angles, si bien que la droite (EF) est la bissectrice de l'angle $\widehat{AFD}$. On a donc bien comme annoncé $\widehat{AFE} = \widehat{EFD}$.

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été beaucoup abordé et nombreux sont les élèves qui sont parvenus à une preuve complète. L'exercice mélangeait des arguments calculatoires comme des chasses aux angles, et des arguments de nature géométrique comme l'identification de triangles et de quadrilatères particuliers à partir de leurs caractérisation. Si les élèves qui ont traité l'exercice semblent parfaitement maitriser la chasse aux angles, on note beaucoup d'erreurs et d'approximations dans les identifications de quadrilatères particuliers. De telles erreurs ont été très coûteuses pour leurs auteurs, puisque souvent cela les empêchait de voir qu'il leur restait une partie du problème à résoudre.

Ainsi, plusieurs élèves ont affirmé que le quadrilatère $AEFD$ est un losange alors qu'ils n'avaient pas encore tous les éléments pour le faire. Nous rappelons qu'un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires, même s'il a deux côtés parallèles, n'est pas forcément un losange. Bien souvent, l'élève devait encore montrer que AEF ou AED est isocèle pour conclure.

A l'inverse, plusieurs élèves ont d'emblée remarqué sur leur figure que $AEFD$ est un losange, ont signalé leur conjecture sur leur copie (sans chercher aucune arnaque) et ont expliqué pourquoi, si $AEFD$ est un losange, on pouvait conclure le problème. Même si elles ne rapportaient pas beaucoup de points, de telles initiatives sont bien sûr encouragées, car elles reflètent le comportement adéquat face à un problème de géométrie et, plus généralement, un problème d'olympiade.

Exercice 13

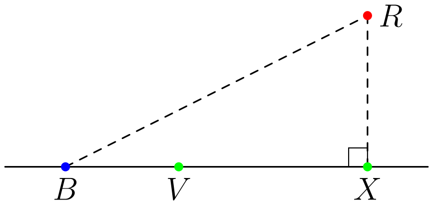
On colorie chaque point du plan avec l'une des trois couleurs bleu, vert ou rouge. Pour chaque couleur, on suppose qu'il existe au moins un point du plan colorié avec cette couleur. Montrer qu'il existe un triangle rectangle dont les trois sommets sont de couleurs différentes deux à deux.

Solution de l'exercice 13

La solution se base sur l'idée suivante : considérer une droite d particulière, regarder les perpendiculaires à d passant par des points bien choisis et tirer parti de l'infinité de points sur d et sur les perpendiculaires à d.

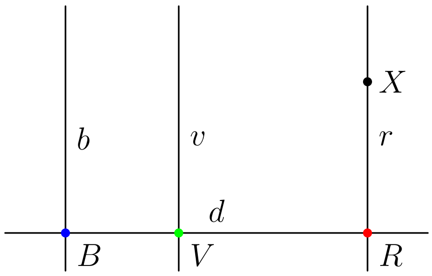
On suppose par l'absurde qu'il n'existe pas de triangles rectangle dont les trois sommets sont de trois couleurs distinctes.

Soient B, V et R trois points respectivement de couleur bleue, verte et rouge. Soit X le projeté orthogonale du point R sur la droite (BV). Si X est bleu, alors le triangle RXV est rectangle en X et a ses trois sommets de même couleur. Si X est vert, le triangle BXR est rectangle en X et a ses trois sommets de même couleur.

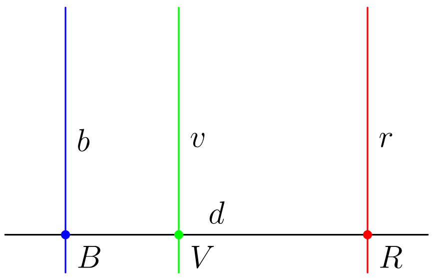


Dans la suite, on suppose donc que le point X est rouge, et on le renomme R. On dispose donc de trois points B, V et R alignés sur une même droite et de trois couleurs différentes.

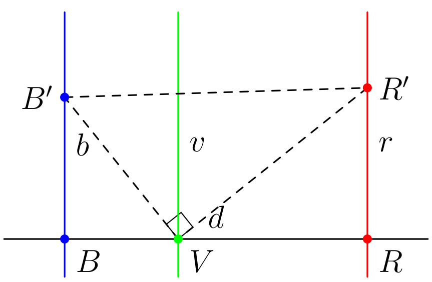
On note à présent b, v et r les perpendiculaires à la droite (BV) passant respectivement par les points B, V et R.



En réitérant l'argument précédent, on obtient que tout point de b est bleu, tout point de v est vert et tout point de r est rouge. En effet, prenons un point Y sur la droite r. Si Y n'est pas rouge, alors l'un des triangles VRX ou BRX est rectangle en R et a ses trois sommets de trois couleurs différentes. On obtient donc une contradiction.



On prend alors un point R' différent de R sur la droite r. On trace ensuite la perpendiculaire p à (VR') passant par V. Puisque (VR') n'est pas perpendiculaire à v, p n'est pas parallèle à v et donc à b, donc p coupe b en un point B'. Le triangle $B'VR$ est alors rectangle en V et possède un sommet de chaque couleur, ce qui est encore en contradiction avec notre hypothèse de départ.



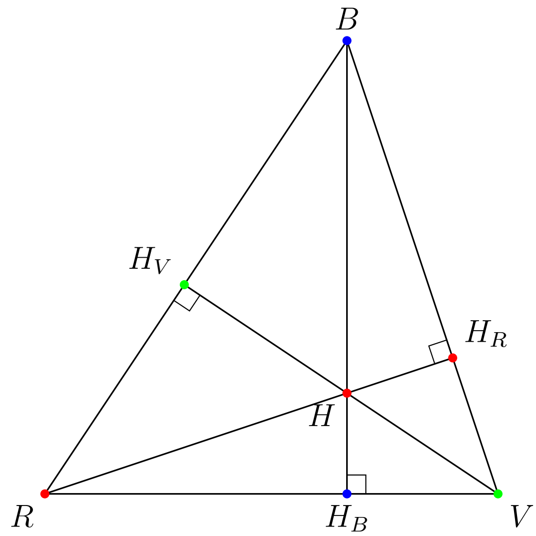
Ceci conclut le cas où il existe trois points V, B, R de chaque couleur alignés sur une même droite.

Solution alternative n°1 Commençons par montrer qu'il existe un triangle non plat dont les trois sommets sont de couleurs différentes.

Supposons que ce ne soit pas le cas et prenons B un point bleu et V un point vert. Par notre hypothèse, tous les points rouges du plan appartiennent à la droite (BV). En effet, dans le cas contraire, il existerait un point R rouge qui n'appartient pas à (BV) et alors le triangle BVR est non plat et a ses sommets de trois couleurs différentes.

Soit R un point rouge quelconque. Le point rouge est donc aligné avec B et V. En appliquant notre raisonnement précédent à la droite (RV), on obtient que tous les points bleus du plan appartiennent à la droite (RV). Mais alors, les points du plan qui ne sont pas sur la droite passant par B, R et V sont tous verts. On peut alors construire un triangle dont les trois sommets sont de trois couleurs différentes en reliant les points B et R ainsi qu'un point vert qui n'est pas sur (BV). Ceci contredit à nouveau notre hypothèse.

On dispose donc d'un triangle non plat BVR tel que B est bleu, V est vert et R est rouge. On note H_B le pied de la hauteur issue de B, H_V le pied de la hauteur issue de V et H_R le pied de la hauteur issue de R. Les droites $(H_BB), (H_VV)$ et (H_RR) sont concourantes en l'orthocentre du triangle BVR, que l'on note H.



Si le point H_B n'est pas bleu, alors l'un des triangles BH_BR ou BH_BV est un triangle rectangle avec trois sommets de couleurs différentes.

On suppose donc dans la suite que le point H_B est bleu. En appliquant le même raisonnement que précédemment aux points H_V et H_R, on se restreint au cas où H_V est vert et H_R est rouge.

Si H est bleu, alors le triangle HH_RV est rectangle et a ses trois sommets de couleurs différentes. Si H est vert, le triangle HH_BR est rectangle et a ses trois sommets de couleurs différentes. Et enfin si H est rouge, le triangle HH_VB est rectangle et a ses trois sommets de couleurs différentes.

Dans tous les cas, on a obtenu un triangle satisfaisant la propriété de l'énoncé.

Commentaire des correcteurs : Ce problème était difficile et peu l'ont entièrement réussi. La principale difficulté de ce problème était de trouver la bonne façon de penser, c'est-à-dire partir de nos trois points de couleurs différentes et en construire de nouveaux ne pouvant être d'une certaine couleur, voire même déterminer leur couleur. De nombreuses solutions différentes ont été présentées.

— La notion d'infini est globalement mal comprise : souvent les élèves invoquent l'infini pour obtenir l'existence d'un objet, alors que cette existence est loin d'être triviale. Ici le fait qu'il existe une infinité de points d'une couleur n'était d'aucune utilité. Traiter des cas particuliers allant dans ce sens n'était pas utile. Un argument d'autorité comme invoquer l'infini ne peut constituer une preuve.

— Certains élèves ont tenté d'appliquer Pythagore, ou de calculer des coordonnées : cela n'était malheureusement pas utile ici.

— Beaucoup d'élèves donnaient un processus pour construire une famille de points ne pouvant être d'une couleur fixée et se contentaient ensuite de dire que cela recouvrait le plan. Tout l'enjeu du problème était de vérifier que les différentes droites ou cercles créés recouvraient le plan. Et les élèves ayant introduit ce processus n'ont jamais réussi à conclure, ni même à bien avancer dans l'exercice.

— Certains élèves considèrent trois points de couleurs différentes, puis construisent des triangles à partir de ceux-là (en considérant les projetés orthogonaux) en oubliant que le triangle initial peut être plat, ou admettent directement l'existence d'un triangle non plat tricolore, ce qui demande pourtant une preuve.

Exercice 14
Soient $a_1 < \ldots < a_n$ des entiers strictement positifs. On suppose que pour toute paire d'entiers (i, j) vérifiant $1 \leqslant i < j \leqslant n$, le nombre $\dfrac{a_i}{a_j - a_i}$ est un entier.

1) Montrer que pour tout entier m vérifiant $1 \leqslant m \leqslant n-1$, $ma_{m+1} \leqslant (m+1)a_m$.

2) Montrer que si i et j sont des entiers vérifiant $1 \leqslant i < j \leqslant n$, alors $ia_j \leqslant ja_i$.

Solution de l'exercice 14

1)
Soit m vérifiant $1 \leqslant m \leqslant n-1$.
Notons $k_i = \dfrac{a_i}{a_{m+1} - a_i}$ pour tout $i \leqslant m$. L'énoncé nous dit que les termes de la suite (k_i) sont des entiers strictement positifs. Remarquons également que si $i < j$, on a $a_i < a_j$ et donc

$$k_i = \frac{a_i}{a_{m+1} - a_i} = \frac{1}{\frac{a_{m+1}}{a_i} - 1} < \frac{1}{\frac{a_{m+1}}{a_j} - 1} = \frac{a_j}{a_{m+1} - a_j} = k_j$$

La suite $(k_i)_{i \leqslant m}$ est donc une suite strictement croissante d'entiers strictement positifs. Puisque $k_1 \geqslant 1$, $k_2 > k_1 \geqslant 1$ donc $k_2 \geqslant 2$. Si on suppose que $k_j \geqslant j$ pour un certain $j \geqslant 2$, on a $k_{j+1} > k_j \geqslant j$ donc $k_{j+1} \geqslant j+1$. De proche en proche, $k_i \geqslant i$ pour tout $i \leqslant m$.

En particulier, $\dfrac{a_m}{a_{m+1} - a_m} = k_m \geqslant m$. Cette inégalité se réécrit $(m+1)a_m \geqslant ma_{m+1}$, qui est l'inégalité voulue.

2) Soit $i < j$. Pour tout $i \leqslant k \leqslant j-1$, d'après la question précédente, $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leqslant \frac{k+1}{k}$. En multipliant ces inégalités pour k allant de i à $j-1$, on trouve via un télescopage :

$$\frac{a_j}{a_i} = \frac{a_j}{a_{j-1}} \cdot \frac{a_{j-1}}{a_{j-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{i+2}}{a_{i+1}} \cdot \frac{a_{i+1}}{a_i} \leqslant \frac{j}{j-1} \cdot \frac{j-1}{j-2} \cdot \ldots \cdot \frac{i+2}{i+1} \cdot \frac{i+1}{i} = \frac{j}{i}$$

ce qui se réécrit $ia_j \leqslant ja_i$, comme voulu.

Commentaire des correcteurs : L'exercice était difficile et très clivant, et très peu d'élèves ont obtenu une note entre 2 et 6. On a noté un nombre important de solutions fausses dues à une erreur de calcul dans une suite d'inégalités, souvent par un oubli de renversement du sens d'une inégalité en multipliant par -1. On a également remarqué que beaucoup de ces solutions n'utilisent pas, ou que très partiellement, l'hypothèse (pourtant très forte) de l'énoncé qui affirme que $\frac{a_i}{a_j-a_i}$ est entier pour tous $i<j$, ce qui les rend inévitablement fausses.

Exercice 15

Soit n un entier strictement positif, $x_1, \ldots, x_{n+1}$ des réels strictement positifs et $p<q$ deux entiers strictement positifs. On suppose que $x_{n+1}^p > x_1^p + \ldots + x_n^p$.

1) Montrer que $x_{n+1}^q > x_1^q + \ldots + x_n^q$.

2) Montrer que $\left(x_{n+1}^p - (x_1^p + \ldots + x_n^p)\right)^q < \left(x_{n+1}^q - (x_1^q + \ldots + x_n^q)\right)^p$.

Solution de l'exercice 15

L'idée principale dans ce problème est d'utiliser que pour tout $0 \leqslant i \leqslant n$, $x_i^p < \sum_{i=1}^n x_i^p = x_{n+1}^p$ donc que $x_i < x_{n+1}$.

1) Posons $y_i = \dfrac{x_i}{x_{n+1}}$ pour tout $0 \leqslant i \leqslant n$. L'hypothèse de l'énoncé se réécrit alors $y_1^p + \ldots + y_n^p < 1$ et le résultat à montrer est que $y_1^q + \ldots + y_n^q < 1$.

Puisque $y_i < 1$ pour tout i, $y_i^k < 1$ pour tout entier k strictement positif. En particulier, $y_i^{q-p} < 1$ pour tout i. Ainsi :

$$y_1^q + \ldots + y_n^q = y_1^p y_1^{q-p} + \ldots + y_n^p y_n^{q-p} < y_1^p + \ldots + y_n^q < 1$$

ce qui donne l'inégalité voulue.

Remarque : Il n'est pas nécessaire de passer par les y_i qui ont pour unique but de simplifier les calculs. On peut travailler directement avec les x_i et écrire :

$$x_1^q + \ldots + x_n^q = x_1^p x_1^{q-p} + \ldots + x_n^p x_n^{q-p} < x_1^p x_{n+1}^{q-p} + \ldots + x_n^p x_{n+1}^{q-p} = x_{n+1}^{q-p}(x_1^p + \ldots + x_n^p) < x_{n+1}^{q-p} x_{n+1}^p = x_{n+1}^q$$

ce qui est l'inégalité voulue.

2) On conserve la notation de la question précédente.

On remarque que notre raisonnement de la question précédente nous a permis de montrer que $y_1^q + \ldots + y_n^q < y_1^p + \ldots + y_n^p$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\left(x_{n+1}^p - (x_1^p + \ldots + x_n^p)\right)^q &= \left(x_{n+1}^p - (x_{n+1}^p y_1^p + \ldots x_{n+1}^p y_n^p)\right)^q \\
&= x_{n+1}^{pq}\left(1 - (y_1^p + \ldots + y_n^p)\right)^q \\
&< x_{n+1}^{pq}\left(1 - (y_1^q + \ldots + y_n^q)\right)^q \\
&< x_{n+1}^{pq}\left(1 - (y_1^q + \ldots + y_n^q)\right)^p
\end{aligned}$$

Pour la dernière inégalité, on a utilisé que si $0 < x < 1$, $x^q < x^p$ puisque $p > q$. Pour conclure, il suffit de remarquer que

$$x_{n+1}^{pq}\Big(1-(y_1^q+\ldots+y_n^q)\Big)^p = \Big(x_{n+1}^q-(y_1^qx_{n+1}^q+\ldots y_n^qx_{n+1}^q)\Big)^p = \Big(x_{n+1}^q-(x_1^q+\ldots+x_n^q)\Big)^p$$

<u>Solution alternative $n°1$</u> Dans la suite, on pose $z_i = x_i^p$ et $r = \dfrac{q}{p} > 1$. On pose aussi $f(t) = t^r$ pour tout $t > 0$.

1) L'inégalité à démontrer devient $f(z_1) + \ldots + f(z_n) < f(z_{n+1})$. Pour cela, on observe que la fonction f est croissante. En effet, elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ avec $f'(t) = rt^{r-1}$ qui est strictement positif pour tout $t > 0$.

Puisque $z_1 + \ldots + z_n < z_{n+1}$ (d'après l'hypothèse de l'énoncé), il suffit donc de montrer que $f(z_1) + \ldots + f(z_n) \leqslant f(z_1 + \ldots + z_n)$.

On commence par montrer le résultat pour $n = 2$.

La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ avec $f''(t) = r(r-1)t^{r-2}$. Cette quantité est toujours strictement positive lorsque $t > 0$, puisque $r > 1$. Cela signifie que la fonction f' est croissante.

Ainsi, si $a > 0$, alors la fonction g définie par $g(t) = f(t+a) - f(t) - f(a)$ est nulle en $t = 0$ et sa dérivée a pour expression $g'(t) = f'(t+a) - f'(t)$ qui est strictement positive par stricte croissance de f'. On déduit que $g(t) > g(0) = 0$, ce qui signifie bien que $f(t+a) > f(t) + f(a)$.

Ainsi, le résultat est vrai pour $n = 2$. Si on suppose qu'il est vrai pour un certain entier $k \geqslant 2$, alors on a

$$f(z_1) + \ldots + f(z_k) + f(z_{k+1}) > f(z_1 + \ldots + z_k) + f(z_{k+1}) > f(z_1 + \ldots + z_k + z_{k+1})$$

où l'on utilisé l'inégalité pour $n = 2$ et $z_1' = z_1 + \ldots z_k$ et $z_2' = z_{k+1}$. Donc le résultat est vrai pour $k+1$ et. De proche en proche, on obtient que l'inégalité est vraie pour n, ce qui résoud la première question.

2) L'inégalité à démontrer se réécrit cette fois-ci

$$f(z_{n+1}) - f(z_1) - \ldots - f(z_n) > f(z_{n+1} - z_1 - \ldots - z_n)$$

ou encore

$$f(z_{n+1}) > f(z_{n+1} - z_1 - \ldots - z_n) + f(z_1) + \ldots + f(z_n)$$

qui est vraie d'après la question précédente appliquée à $n+1$ et $z_1, \ldots, z_n$, $z_{n+1}' = z_{n+1} - z_1 - \ldots - z_n$ et $z_{n+2}' = z_{n+1}$ qui sont tous strictement positifs.

<u>**Commentaire des correcteurs :**</u> L'exercice, très difficile, n'a été entièrement résolu que par une poignée d'élèves. En revanche, un nombre significatif d'élève, relativement à la difficulté de l'exercice, est parvenu à résoudre la question 1). De plus, nombreux sont les élèves qui avaient bonne idée et qui ont pressenti qu'il fallait utiliser une inégalité de la forme $(a+b)^r > a^r + b^r$ lorsque $r > 1$ n'est pas forcément entier. En revanche, très rares sont les élèves qui sont parvenus à démontrer cette propriété dite de « suradditivité ». Sans preuve de ce résultat, les élèves qui l'invoquaient ne pouvaient pas obtenir beaucoup de points.

Signalons également deux erreurs que l'on a beaucoup croisées dans les copies :

— Beaucoup d'élèves ont affirmé que la croissance de la fonction exponentielle suffisait à justifier que pour la question $1)$, on puisse remplacer le p de l'hypothèse par le q du résultat voulu. Mais si f est une fonction croissante et que $x \geqslant y + z$, on est loin de toujours avoir $f(x) \geqslant f(y) + f(z)$. La croissance de f nous garantit seulement que $f(x) \geqslant f(y + z)$.

— Beaucoup d'élèves ont affirmé que $x^p < x^q$ pour tout $x < 0$. Cette inégalité n'est en fait vraie que pour tout $x > 1$. Lorsque $0 < x < 1$, on a l'inégalité inverse.

— Beaucoup d'élèves se sont contentés d'un raisonnement qualitatif, c'est-à-dire une prose donnant des raisons pour lesquelles l'inégalité devrait suivre à partir des hypothèses. Une telle argumentation n'est évidemment ni rigoureuse ni convaincante et n'a rapporté aucun point à leurs auteurs. On attendant une preuve rigoureuse centrée autour de calculs et de manipulation d'inégalités.

III. Groupe A

Contenu de cette partie

1 Première partie : Arithmétique & Algèbre

1 Découverte des maths (Aladin)

Manipulations algébriques

La factorisation est le fait d'écrire une expression sous la forme d'un produit. Nous parlons souvent de deux méthodes de bases : L'une fait intervenir la mise en évidence d'un facteur commun et l'autre fait intervenir les identités remarquables.

Exemple 1.
Montrer que si $n \geqslant 2$, $4n^2 - 1$ n'est pas un nombre premier.
(On dit que p est un nombre premier si $p \neq 1$ est tel qu'on ne puisse pas l'écrire sous la forme $p = ab$ avec $1 < a, b < p$).

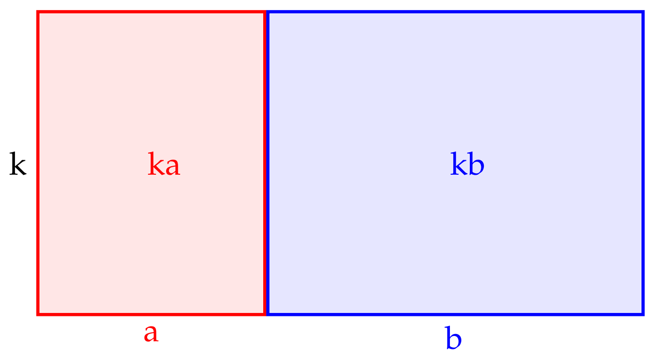
On veut donc montrer qu'on peut trouver a et b tels que $4n^2 - 1 = ab$ et $1 < a, b < 4n^2 - 1$, on dit qu'on cherche à *factoriser* $4n^2 - 1$.

Proposition 2 (Distributivité/ La mise en évidence d'un facteur commun)**.**
On a l'égalité suivante, appelée distributivité, valable pour tous a, b, k :
$k(a + b) = ka + kb$.
On dit que :

— $k(a + b)$ est la forme factorisée puisque c'est un produit.

— $ka + kb$ est la forme développée.

Démonstration.
Une preuve géométrique marche très bien, et les identités remarquables que nous verrons juste après en ont une aussi, elles ont (normalement) été vues en classe.



□

Il est souvent plus intéressant d'avoir la forme factorisée, par exemple le fait que l'un des facteurs est nul si le produit est nul, ou encore des relations de divisibilité (que vous verrez plus tard dans la semaine).

Parfois on devra utiliser cette identité plusieurs fois pour obtenir un résultat totalement factorisé et utile.

Exemple 3.
$ab + a + b + 1 = a(b + 1) + b + 1 = (b + 1)(a + 1)$

Certaines identités sont à connaître et à savoir reconnaître n'importe où, elles sauvent des vies ! (on dit que ce sont des identités remarquables)

Proposition 4 (Identités remarquables)**.**

— $(a + b)^2 = a(a + b) + b(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$
— $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (c'est la précédente en remplaçant b par $-b$)
— $(a + b)(a - b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2$

Revenons à notre exemple précédent avec $4n^2 - 1$: On a $4n^2 - 1 = (2n)^2 - 1^2 = (2n - 1)(2n + 1)$, et on a bien réussi à factoriser cette expression ! (Quand je dis qu'elles peuvent sauver des vies...)

Exercice 1
Factoriser le plus possible $a^4 - b^4$.

Solution de l'exercice 1
On a $a^4 - b^4 = (a^2)^2 - (b^2)^2 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$.

Exercice 2
Factoriser $a^4 + 4b^4$ (c'est l'identité de Sophie Germain)
Indice : on a $a^4 + 4b^4 = a^4 + 4b^4 + 4a^2b^2 - 4a^2b^2$.

Solution de l'exercice 2
On reconnaît coup sur coup deux identités remarquables (à croire que c'était fait exprès) :
$a^4 + 4b^4 = a^4 + 4b^4 + 4a^2b^2 - 4a^2b^2 = (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2 = (a^2 + 2ab + 2b^2)(a^2 - 2ab + 2b^2)$.

On peut ici voir qu'il faut parfois faire "apparaître" les termes manquants pour qu'on puisse factoriser comme il se doit, et c'est là que réside toute la difficulté de tels problèmes. Un autre exemple pour la route :

Exemple 5.
$a^3 - b^3 = a^3 + a^2b + b^2a - a^2b - b^2a - b^3 = a(a^2 + ab + b^2) - b(a^2 + ab + b^2) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Tiens d'ailleurs... On a $a^1 - b^1 = (a - b)(1)$, $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, il y aurait pas un paterne là ?
La réponse est oui (waw !) :

Proposition 6.
$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots + a^2b^{n-3} + b^{n-2}a + b^{n-1})$

Démonstration. Il suffit de développer le membre de droite, tout se simplifie magiquement ! □

Pour montrer qu'elle est effectivement juste, il suffit de partir du membre de droite et de développer, tout se simplifie magiquement !
Si maintenant on suppose en plus n impair, on peut remplacer b par $-b$ dans la formule précédente, pour avoir

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots + a^2b^{n-3} - b^{n-2}a + b^{n-1}).$$

Exercice 3
Calculer $x^m + x^{m+1} + x^{m+2} + \ldots + x^{n-2} + x^{n-1} + x^n$, avec $x \neq 1$ et $m < n$.

Solution de l'exercice 3
On a $x^m + \ldots + x^{n-1} + x^n = x^m(1 + \ldots + x^{n-m-1} + x^{n-m}) = x^m(1^{n-m} + 1^{n-m-1}x + \ldots + 1 \times x^{n-m-1} + x^{n-m} = x^m\left(\dfrac{x^{n-m+1}-1}{x-1}\right) = \dfrac{x^{n+1}-x^m}{x-1}$

Implication, équivalence, négation

Ce bout du cours regroupe des définitions importantes de logique qui sont surtout là pour poser les bases pour la partie d'après. Du moment que vous maîtrisez la partie suivante, ça ne sert à rien de connaître celle-là dans tous les détails.

Définition 7 (Implication)**.**
Soient A et B deux phrases, pouvant être vraies ou fausses (qu'on appelle aussi propositions). On dit que A implique B (noté $A \implies B$) si dès que A est vérifiée, B l'est également.

Exemple 8. Si A est la phrase "J'ai tué Bob" et B est la phrase "Bob est mort", on a bien A implique B : si j'ai tué Bob, Bob est forcément mort.
Un exemple un peu plus mathématique peut-être : si $x \geqslant 1$, alors $x \geqslant 0$.

En général, on repère une implication (par exemple dans un énoncé) par la présence d'un "si", souvent suivi d'un "alors"

Exemple 9.
Soient $a, b > 0$. Montrer que si $a + b = 2$, alors $ab \leqslant 1$.

Définition 10 (Équivalence)**.**
On peut voir sur tous ces exemples qu'il peut arriver que B soit vérifiée sans que A ne soit vérifiée : ce n'est pas parce que Bob est mort que je l'ai tué !
Des fois on veut que A soit vérifié exactement quand B est vérifié : on veut que $A \implies B$ et que $B \implies A$. On appelle ça une équivalence, qu'on note $A \iff B$, on dit alors que A est équivalente à B, ou encore que A et B sont équivalentes, ou encore A si et seulement si B.

Exemple 11.
Si A est la phrase $x \geqslant 0$ et B est la phrase $x^3 \geqslant 0$, on a bien $A \iff B$.

(Oui le premier exemple est un exemple mathématique, essayez de trouver deux phrases équivalentes de la vie de tous les jours qui ne soient pas simplement une reformulation basique l'une de l'autre)

Définition 12 (Négation)**.**
Si on nous donne une proposition A (donc une phrase pouvant être ou vraie ou fausse), la négation de A est le contraire de A, noté $\neg A$.
Dit dans des termes plus compliqués, $\neg A$ est telle que "A est vraie" $\iff$ "$\neg A$ est fausse".

Exemple 13.
Si A est la proposition "Bob est mort", sa négation est "Bob est vivant".
Si A est "$x < 0$", alors sa négation est "$x \geqslant 0$".
Enfin la négation de "Pour tout $x > 0, x^2+2x-3 > 0$" est "Il existe $x > 0$ tel que $x^2+2x-3 \leqslant 0$".

Ces définitions n'ont pas grand intérêt en elles-mêmes, mais elles permettent de résoudre beaucoup de problèmes si elles sont utilisées dans des raisonnements complexes et construits.

Définition 14 (Raisonnement par Absurde)**.**
Le raisonnement par l'absurde est un raisonnement qui permet de démontrer qu'une affirmation est vraie en montrant que son contraire est faux. Il s'appuie sur la règle logique que :
Si "non P" est faux, alors P est vraie. Autrement dit, L'idée est de supposer $\neg A$ et d'aboutir à une contradiction, à quelque chose qui est toujours faux ($0 > 1$ par exemple). Cela signifie que $\neg A$ est forcément faux, donc que A est vrai.

Exemple 15.
Montrons que $\sqrt{2}$ ne peut pas s'écrire comme un rapport de deux nombres entiers, on dit que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit rationnel, soient donc a, b des entiers tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. On a alors $\frac{a^2}{b^2} = 2$, ou encore $a^2 = 2b^2$. À ce moment là, on remarque que a^2 est pair, donc a est pair, il s'écrit sous la forme $a = 2a'$.
On remplace notre nouvelle expression de a dans l'équation de départ, on trouve $b^2 = 2a'^2$. Ainsi, b^2 est pair, et on a donc $b = 2b'$. En remplaçant, on trouve $a'^2 = 2b'^2$. Cette solution ressemble beaucoup à la solution initiale, puisque on a également $\sqrt{2} = \frac{a'}{b'}$. En plus, la solution est strictement plus petite qu'avant. Si on continue ainsi, on trouvera une solution de plus en plus petite tout en restant dans les entiers, ce qui n'est pas possible puisque $a \geqslant 1$ et $b \geqslant 1$, il y aura un moment où ce ne sera plus le cas.
On appelle un tel raisonnement une descente infinie.

Exercice 4
Montrer que $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u>
Raisonnons par l'absurde et supposons $\frac{1}{3}$ est un nombre décimal. Il existe alors un entier relatif a et un entier relatif b tels que $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^b}$ Ainsi, $3 \times a = 10^b$ ce qui signifie que 10^b est un

multiple de 3 : la somme de ses chiffres doit donc être divisible par 3, ce qui est absurde. En effet, la somme des chiffres de 10^b est toujours égale à 1 et n'est donc pas divisible par 3. L'hypothèse « $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal. » est donc fausse et ainsi $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.

Exercice 5
Montrer que $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ est irrationnel.

Solution de l'exercice 5
Si $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ est rationnel, alors $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = 5+2\sqrt{6}$ également, et $\sqrt{6}$ est aussi rationnel. On raisonne alors de la même manière que précédemment, pour aboutir à une contradiction.

Exercice 6
Montrer que si a, b sont des réels positifs, alors $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ (on appelle ça l'inégalité arithmético-géométrique).

Solution de l'exercice 6
On a la succession d'équivalences suivantes :

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \iff a+b \geqslant 2\sqrt{ab} \iff a+b-2\sqrt{ab} \geqslant 0 \iff (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0.$$

Or un carré est toujours positif, et comme on a raisonné par équivalence, on a bien $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.

2 Divisibilité et PGCD (Raphael D.)

Ce cours reprend essentiellement l'excellent cours de la POFM de Jean-Louis Tu, trouvable des pages 4 à 8 ici : https://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2017/09/arith_base.pdf.

3 Nombres premiers (Antoine)

Ce cours reprend essentiellement le somptueux cours donné l'an dernier au stage, que vous pouvez retrouver à la page 63 du poly : https://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2022/02/Poly-2021-Valbonne.pdf.

4 Inégalités 1 (Auguste)

Théorème 1 (Inégalité de la moyenne)**.**

Soient $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ des réels strictement positifs. On a :

$$\min(a_i) \leqslant \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}} \leqslant \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \leqslant \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{n} \leqslant \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2}{n}} \leqslant \max(a_i)$$

$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}$ est la **moyenne harmonique**

$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$ est la **moyenne géométrique**

$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}$ est la **moyenne arithmétique**

$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}{n}}$ est la **moyenne quadratique**

Théorème 2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz).

Soient $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(b_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ des réels. On a :

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 \leqslant (\sum_{i=1}^{n} a_i^2)(\sum_{i=1}^{n} b_i^2)$$

Corollaire 3 (Inégalité des mauvais élèves).
Soient $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ des réels et $(y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ des réels strictement positifs. On a :

$$\frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}{\sum_{i=1}^{n} y_i} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{y_i}$$

Exercice 1
Pour x, y réels, montrer que $x^2 + xy + y^2$ est toujours positif.
Solution de l'exercice 1
On a : $x^2 + xy + y^2 = (x + \frac{y}{2})^2 + \frac{3}{4}y^2 \geqslant 0$

Exercice 2
Sachant que $abc = 8$, avec a, b, c positifs quelle est la valeur minimale de $a + b + c$?
Solution de l'exercice 2
Par l'inégalité arithmético-géométrique (IAG) : $\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$.
Donc, $a + b + c \geqslant 3 \cdot \sqrt[3]{8} = 6$. Cette borne est bien atteinte avec $a = b = c = 2$.

Exercice 3
Soient a,b,c positifs. Montrer que $(a + b)(b + c)(c + a) \geqslant 8abc$
Solution de l'exercice 3
On a par IAG : $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, $\frac{b+c}{2} \geqslant \sqrt{bc}$, $\frac{c+a}{2} \geqslant \sqrt{ac}$.
En multipliant ces inégalités, comme elles sont positives : $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8} \geqslant \sqrt{ab}\sqrt{bc}\sqrt{ac} = abc$

Exercice 4
Soient a, b, c, d des réels strictement positifs. Montrer que :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{9}{c} + \frac{25}{d} \geqslant \frac{100}{a + b + c + d}$$

Solution de l'exercice 4
Par l'inégalité des mauvais élèves : $\frac{1^2}{a}+\frac{1^2}{b}+\frac{3^2}{c}+\frac{5^2}{d}\geqslant\frac{(1+1+3+5)^2}{a+b+c+d}$

Exercice 5
Trouver la valeur minimale de $a^2+b^2+c^2+d^2$ sachant que $a+2b+3c+4d=12$.
Solution de l'exercice 5
Par Cauchy-Schwarz : $(1^2+2^2+3^2+4^2)(a^2+b^2+c^2+d^2)\geqslant(a+2b+3c+4d)^2$ Donc : $a^2+b^2+c^2+d^2\geqslant\frac{144}{30}=\frac{24}{5}$.
Cette borne est atteinte pour $a=\frac{2}{5},b=\frac{4}{5},c=\frac{6}{5},d=\frac{8}{5}$.

Exercice 6
Montrer que pour a,b,c positifs : $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ac$
Solution de l'exercice 6
Par Cauchy-Schwarz : $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+a^2)\geqslant(ab+bc+ac)^2$.
Tous les membres étant positifs : $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ac$

Exercice 7
Soient x,y,z strictement positifs. Montrer que

$$\frac{1}{x+y}+\frac{4}{y+z}+\frac{9}{x+z}\geqslant\frac{18}{x+y+z}$$

Solution de l'exercice 7
Par inégalité des mauvais élèves : $\frac{1}{x+y}+\frac{2^2}{y+z}+\frac{3^2}{x+z}\geqslant\frac{(1+2+3)^2}{(x+y)+(y+z)+(z+x)}=\frac{18}{x+y+z}$

Exercice 8
Pour x,y,z strictement positifs, montrer que

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}\geqslant 6$$

Solution de l'exercice 8
Par IAG : $\frac{\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}}{6}\geqslant\sqrt[6]{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{x}\cdot\frac{x}{z}\cdot\frac{z}{y}\cdot\frac{y}{x}}=1$.
Il suit : $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}\geqslant 6$

Exercice 9
Pour tous réels positifs a,b,c montrer que $(a^2b+b^2c+c^2a)(ab^2+bc^2+ca^2)\geqslant 9a^2b^2c^2$
Solution de l'exercice 9
Par IAG : $\frac{a^2b+b^2c+c^2a}{3}\geqslant abc$ et $\frac{ab^2+bc^2+ca^2}{3}\geqslant abc$.
Donc en multipliant les deux, comme tout est positif : $(a^2b+b^2c+c^2a)(ab^2+bc^2+ca^2)\geqslant 9a^2b^2c^2$

Exercice 10
Soient a,b,c trois réels strictement positifs. Montrer que :

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}$$

Solution de l'exercice 10
On a : $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}\iff\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{a+c}+\frac{a+b+c}{a+b}\geqslant\frac{9}{2}$
$\iff 2(a+b+c)(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b})\geqslant 9$
$\iff((b+c)+(a+c)+(a+b))(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b})\geqslant(1+1+1)^2$
Ce qui est vrai par Cauchy-Schwarz.

5 Modulo et factorisation (Rémi)

Ce cours reprend essentiellement l'excellent cours donné l'an dernier au stage, que vous pouvez retrouver à la page 70 du poly : https://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2022/02/Poly-2021-Valbonne.pdf

6 Inégalités 2 (Théo)

L'objectif de cette séance était de revoir les différentes notions vues durant les deux cours précédent : factorisation, inégalité arithmético-géométrique, inégalité de Cauchy Schwarz et inégalité des mauvais élèves.

Les exercices 11 à 26 sont inclus dans le polycopié https://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2019/11/Inegalites-Theo.pdf

Factorisation

Exercice 1
Soit n est un entier vérifiant $n \geqslant 2$, montrer que $4n^2 - 1$ n'est pas premier.

Exercice 2
Factoriser $a^4 + 4b^4$

Exercice 3
Déterminer tous les couples (a, b) d'entiers strictement positifs tels que $ab - a - b = 12$.

Exercice 4
Factoriser $a^4 - b^4$.

Exercice 5
Soit n un entier tel que $n \geqslant 2$. Montrer que $n^4 + n^2 + 1$ n'est pas premier.

Exercice 6
Soit x un réel strictement positif tel que $x + \frac{1}{x} = \sqrt{2020}$. Que vaut $x^2 + \frac{1}{x^2}$?

Exercice 7
Quels sont les entiers k tels que pour tout réels a, b, c,

$$(a + b + c)(ab + bc + ca) + kabc = (a + b)(b + c)(c + a)$$

Exercice 8
Soit a et b deux réels tels que $a + b = 7$ et $ab = 3$. Que vaut $a^3 + b^3$? On ne cherchera pas à exprimer a et b.

Exercice 9
Soit a et b des réels positifs tels que $\frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+a} = 1$, montrer que $a^3 + b^3 = a + b$.

Exercice 10
Déterminer les triplets de réels (a, b, c) tels que $a(b^2 + c) = c(c + ab)$, $b(c^2 + a) = a(a + bc)$ et $c(a^2 + b) = b(b + ac)$

Un carré est positif

Exercice 11
Soit $x > 0$. Montrer que $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$. Trouver les cas d'égalité.

Exercice 12
Soient x, y des réels strictement positifs. Montrer que $x + \frac{y^2}{x} \geqslant 2y$ et trouver les cas d'égalité.

Exercice 13
Montrer que $5x^2 + y^2 + 1 \geqslant 4xy + 2x$. Trouver les cas d'égalité.

Exercice 14
Montrer que $x^2 + y^4 + z^6 \geqslant xy^2 + y^2 \times z^3 + xz^3$, et trouver les cas d'égalité.

Exercice 15
Montrer que si $ab + bc + ca = 1$ pour des réels positifs a, b, c, alors $a + b + c \geqslant \sqrt{3}$. Trouver les cas d'égalité.

Inégalité arithmético-géométrique

Exercice 16
Soit $x \geqslant 0$ un réel. Montrer que $1 + x^2 + x^6 + x^8 \geqslant 4 \times x^4$. Trouver les cas d'égalité

Exercice 17
Soit a, b, c, d positifs tels que $abcd = 1$. Montrer que $a^2+b^2+c^2+d^2+ab+cd+bc+ad+ac+bd \geqslant 10$. Trouver les cas d'égalité.

Exercice 18
Soit a, b, c des réels positifs tels que $(a+1)(b+1)(c+1) = 8$. Montrer que $a+b+c \geqslant 3$. Trouver les cas d'égalité.

Exercice 19
Soit $a_1, \ldots, a_n$ des réels positifs de produit 1. Montrer que $(1 + a_1) \ldots (1 + a_n) \geqslant 2^n$. Trouver les cas d'égalité.

Exercice 20
Soit $a_1, \ldots, a_n$ des réels positifs de somme n. Montrer que $(1 + \frac{1}{a_1}) \ldots (1 + \frac{1}{a_n}) \geqslant 2^n$. Trouver les cas d'égalité.

Exercice 21
Soit a, b, c, d des réels positifs de somme 1. Montrer que $\frac{bcd}{(1-a)^2} + \frac{acd}{(1-b)^2} + \frac{abd}{(1-c)^2} + \frac{abc}{(1-d)^2} \leqslant \frac{1}{9}$. Trouver les cas d'égalité.

Exercice 22
Soit a, b, c des réels positifs de produit $\frac{1}{8}$. Montrer que $a^2 + b^2 + c^2 + a^2b^2 + a^2c^2 + c^2b^2 \geqslant \frac{15}{16}$. Trouver les cas d'égalité.

Cauchy-Schwarz et mauvais élèves

Exercice 23
Soit $a_1 \dots a_n$ des réels strictement positifs. Montrer que $\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \geqslant \frac{n^2}{a_1+\cdots+a_n}$. Trouver les cas d'égalité.

Exercice 24
Soit $a_1 \dots a_n$ des réels. Montrer que $a_1^2 + \cdots + a_n^2 \geqslant \frac{(a_1+\cdots+a_n)^2}{n}$

Exercice 25
Montrer que si a, b, c sont des réels positifs tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 3$, $\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ac} \geqslant \frac{3}{2}$. Trouver les cas d'égalité.

Exercice 26
Soit n un entier strictement positif, $a_1, \dots, a_n$ n nombres réels strictement positifs, $b_1, \dots, b_n$ n nombres réels strictement positifs. On supposes que $a_1 + \cdots + a_n = b_1 + \cdots + b_n$ et on note $S = a_1 + \cdots + a_n$.

— Montrer que $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{b_i+a_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^2}{b_i+a_i}$

— Montrer que $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{b_i+a_i} \geqslant \frac{S}{2}$

Solution de l'exercice 1
On a $4n^2-1=(2n)^2-1^2=(2n-1)(2n+1)$. De plus, comme $n\geqslant 2$, $2n-1\geqslant 2\times 2-1=3>1$ et $2n+1\geqslant 2\times 2+1=5>1$, donc $4n^2+1$ n'est pas premier.

Solution de l'exercice 2
Notons que $a^4+4b^4=(a^2)^2+(2b^2)^2$. Pour faire apparaître une identité de la forme x^2+y^2, on va faire apparaître du $2xy$, on a donc

$$a^4+4b^4=(a^2)^2+2a^2(2b^2)+(2b^2)^2-2a^2(2b^2)=(a^2+2b^2)^2-4a^2b^2=(a^2+2b^2)^2-(2ab)^2$$

Ainsi $a^4+4b^4=(a^2+2b^2+2ab)(a^2+2b^2-2ab)$

Solution de l'exercice 3
Essayons de factoriser par a : $a(b-1)-b=12$. On pourrait factoriser par b, mais cela briserait la factorisation déjà faite, il faut donc plutôt essayer de factoriser par $b-1$. On a $a(b-1)-b=a(b-1)-(b-1)-1=(a-1)(b-1)-1=12$ donc $(a-1)(b-1)=13$. Comme a et b sont strictement positifs, $a-1$ et $b-1$ sont positifs. Comme 13 est premier, on a $(a-1,b-1)=(1,13)$ ou $(13,1)$. Ainsi $(a,b)=(2,14)$ ou $(14,2)$.

Il reste à vérifier les solutions : si $(a,b)=(2,14)$, $ab-a-b=28-2-14=26-14=12$. Si $(a,b)=(14,2)$, $ab-a-b=28-14-2=14-2=12$. Les couples solutions

Solution de l'exercice 4
On a $a^4-b^4=(a^2)^2-(b^2)^2=(a^2-b^2)(a^2+b^2)=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$

Solution de l'exercice 5
On essaie de faire apparaître une identité remarquable : $n^4+n^2+1=n^4+2n^2+1-n^2=(n^2+1)^2-n^2=(n^2+n+1)(n^2-n+1)$. Or si $n\geqslant 2$, $n^2+n+1\geqslant 4+2+1=7>1$ et $n^2-n+1=n(n-1)+1\geqslant 2+1=3>1$ donc n^2+n+1 n'est pas premier.

Solution de l'exercice 6
Pour faire apparaître $x^2+\frac{1}{x^2}$, on va élever au carré l'égalité $x+\frac{1}{x}=\sqrt{2020}$. On obtient $2020=x^2+\frac{1}{x^2}+2x\times\frac{1}{x}=x^2+\frac{1}{x^2}+2$, donc $x^2+\frac{1}{x^2}=2018$.

Solution de l'exercice 7
Supposons l'équation vérifiée pour un entier k. En prenant $a=b=c=1$, on obtient $3\times 3+k=2^3$, donc $k=8-9=-1$.

Il reste à vérifier que $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=(a+b)(b+c)(c+a)$ pour tout réel a,b,c. Or

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=a^2b+a^2c+abc+b^2c+b^2a+abc+c^2a+c^2b+abc-abc$$

donc

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b+2abc$$

et

$$(a+b)(b+c)(a+c)=(ab+b^2+ac+bc)(a+c)=a^2b+ab^2+a^2c+abc+abc+^2c+ac^2+bc^2$$

donc

$$(a+b)(b+c)(a+c)=a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b+2abc$$

.

Pour $k = -1$, on a bien pour tout réels a, b, c,

$$(a+b+c)(ab+bc+ca) + kabc = (a+b)(b+c)(c+a)$$

L'unique solution est donc $k = -1$.

Solution de l'exercice 8
Essayons de factoriser : $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$.

Il reste à exprimer $(a^2 - ab + b^2)$ via $a + b$ et ab. Pour faire apparaître le a^2 et le b^2, on peut utiliser $(a+b)^2$. On a $a^2 - ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 3ab = (a+b)^2 - 3ab$.

On a donc $a^3 + b^3 = (a+b)((a+b)^2 - 3ab) = 7(7^2 - 9) = 7 \times 40 = 280$.

Solution de l'exercice 9
En multipliant par $(1+a)$ et $(1+b)$, on obtient $a(1+a) + b(1+b) = (1+a)(1+b)$ donc $a + a^2 + b + b^2 = 1 + a + b + ab$ donc $a^2 + b^2 = 1 + ab$. On a donc $a^2 - ab + b^2 = 1$. Pour faire apparaître $a^3 + b^3$, il suffit de multiplier l'égalité précédente par $a + b$: on a $a + b = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$ ce qui donne le résultat voulu.

Solution de l'exercice 10
Les égalités se réécrivent $ab(b-c) = c(c-a)$, $bc(c-a) = a(a-b)$ et $ca(a-b) = b(b-c)$. En multipliant ces trois égalités, on obtient $(abc)^2(c-a)(b-c)(a-b) = abc(c-a)(b-c)(a-b)$. En particulier trois cas se présentent :

— Soit $abc = 0$. Les égalités étant cycliques, supposons $a = 0$. Par la première égalité $c^2 = 0$ donc $c = 0$. Par la troisième égalité $b^2 = 0$ donc $b = 0$ donc $a = b = c$

— Soit deux des éléments parmi a, b, c sont égaux, on suppose $a = b$. Dans ce cas $bc(c-a) = 0$. Si $b = 0$ ou $c = 0$ on retombe dans le cas précédent, sinon $a = b = c$.

— Soit $abc = 1$, dans ce cas a, b, c. sont non nuls Les égalités se réécrivent : $b - c = c^2(c-a)$, $c - a = a^2(a-b)$ et $a - b = b^2(b-c)$. En particulier $a-b$, $b-c$ et $c-a$ sont de même signe, mais de somme nulle et on a donc nécessairement $a - b = b - c = c - a = 0$ i.e ; $a = b = c$.

Réciproquement, si $a = b = c$, les différentes équations sont bien vérifiées.

Solution de l'exercice 11
Posons $c = x$, $d = \frac{1}{x}$ et appliquons la proposition 4. On obtient $c + d = x + \frac{1}{x} \geqslant 2\sqrt{cd} = 2\sqrt{\frac{x}{x}} = 2$. On a égalité si et seulement si $c = d$ c'est-à-dire $x = \frac{1}{x}$ si et seulement si $x^2 = 1$. Le cas d'égalité est donc atteint pour $x = 1$.

Solution de l'exercice 12
La proposition 4 donne

$$x + \frac{y^2}{x} \geqslant 2\sqrt{x \cdot \frac{y^2}{x}} = 2y$$

Supposons qu'on a égalité, alors $x = \frac{y^2}{x}$ donc $x^2 = y^2$ donc $x = y$. Réciproquement si $x = y$, $x + \frac{y^2}{x} = y + \frac{y^2}{y} = 2y$ on a bien égalité.

Solution de l'exercice 13
Regardons le terme de droite. En voyant un facteur $2x$, on pense à utiliser que $2x \leqslant x^2 + 1$.

Il suffit ensuite de prouver que $4xy \leqslant 4x^2 + y^2$. Or, on remarque que $4x^2 + y^2 = (2x)^2 + y^2 \geqslant 2 \times (2x) \times y = 4xy$.

Supposons qu'on a égalité. Dans ce cas on a égalité dans les deux inégalités précédentes. Comme on a égalité dans $2x \leqslant x^2 + 1$, $x = 1$. Comme on a égalité dans $2 \times (2x)y \leqslant (2x)^2 + y^2$, on sait que $y = 2x = 2$. Réciproquement, si $(x, y) = (1, 2)$, alors $5x^2 + y^2 + 1 = 10 = 4xy + 2x$.

Solution de l'exercice 14
Posons $a = x$, $b = y^2$, $c = z^3$. L'inégalité précédente est équivalente à $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ac$, qui est vraie d'après le lemme du tourniquet. Le cas d'égalité est lorsque $a = b = c$, c'est-à-dire $x = y^2 = z^3$.

Solution de l'exercice 15
Vu qu'il y a une racine dans le résultat, on calcule $(a+b+c)^2$. On constate alors que $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac) = a^2 + b^2 + c^2 + 2$. Or, $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca = 1$, donc $(a + b + c)^2 \geqslant 3$, de sorte que $(a + b + c) \geqslant \sqrt{3}$.

Supposons maintenant qu'on a égalité. Alors on a égalité dans le lemme du tourniquet, donc $a = b = c$. Comme $ab + bc + ca = 1$, c'est que $3a^2 = 1$, donc $a = \frac{1}{\sqrt{3}} = b = c$. Réciproquement, si $a = \frac{1}{\sqrt{3}} = b = c$, on a bien $a + b + c = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

Solution de l'exercice 16
On utilise l'inégalité arithmético-géométrique, dans le cas $n = 4$. On obtient $1+x^2+x^6+x^8 \geqslant 4x^{\frac{2+6+8}{4}} = 4x^4$.

Supposons qu'on a égalité. D'après le cas d'égalité $x^2 = 1$, donc $x = 1$. Réciproquement si $x = 1$, on a $1 + x^2 + x^6 + x^8 = 4 = 4 \times x^4$

Solution de l'exercice 17
On a une somme de 10 termes et on veut prouver qu'elle est plus grande que 10. On va donc utiliser l'inégalité arithmético-géométrique sur les 10 termes. On obtient :

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + cd + bc + ad + ac + bd \geqslant 10 \sqrt[10]{a^5b^5c^5d^5} = 10 \sqrt[10]{(abcd)^5} = 10$$

Si on a égalité, alors $a^2 = b^2 = c^2 = d^2$, donc par positivité $a = b = c = d$. Comme $abcd = 1$, $a^4 = 1$ donc $a = b = c = d = 1$. Réciproquement si $a = b = c = d = 1$, alors $abcd = 1$ et $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + cd + bc + ad + ac + bd = 10$

Solution de l'exercice 18
On utilise l'inégalité arithmético-géométrique sur $a + 1$, $b + 1$, $c + 1$: on constate alors que $2 = \sqrt[3]{(a+1)(b+1)(c+1)} \leqslant \frac{a+1+b+1+c+1}{3} = \frac{a+b+c}{3} + 1$, donc $\frac{a+b+c}{3} \geqslant 1$, donc $a + b + c \geqslant 3$.

Supposons qu'on a égalité. Dans ce cas on a égalité dans l'inégalité arithmético-géométrique. Ainsi, $a + 1 = b + 1 = c + 1$, donc $a = b = c$. Comme $(a + 1)(b + 1)(c + 1) = (a + 1)^3 = 8$, on a $a + 1 = 2$, donc $a = b = c1$. Réciproquement, si $a = b = c = 1$, alors $(a + 1)(b + 1)(c + 1) = 8$ et $a + b + c = 3$.

Solution de l'exercice 19
Par inégalité airthmético-géométrique, pour tout i entre 1 et n, $1 + a_i \geqslant 2\sqrt{a_i}$. En particulier, $(1 + a_1) \dots (1 + a_n) \geqslant 2\sqrt{a_1} \times 2\sqrt{a_2} \dots 2\sqrt{a_n} = 2^n\sqrt{a_1 \dots a_n} = 2^n$.

Supposons qu'on a égalité, dans ce cas pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, on a égalité dans l'inégalité $1 + a_i \geqslant 2\sqrt{a_i}$, donc $a_i = 1$. Réciproquement, si $a_1 = \cdots = a_n = 1$, alors $a_1 \ldots a_n = 1$ et $(1 + a_1) \ldots (1 + a_n) = 2 \times \cdots \times 2 = 2^n$

Solution de l'exercice 20
Par inégalité airthmético-géométrique, pour tout i entre 1 et n, on a $1 + \frac{1}{a_i} \geqslant 2\frac{1}{\sqrt{a_i}}$. En particulier, $(1+\frac{1}{a_1}) \ldots (1+\frac{1}{a_n}) \geqslant 2\frac{1}{\sqrt{a_1}} \times 2\frac{1}{\sqrt{a_2}} \ldots 2\frac{1}{\sqrt{a_n}} = 2^n \frac{1}{\sqrt{a_1 \ldots a_n}}$. Or, $a_1 \ldots a_n \leqslant \left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right)^n = 1^n = 1$, donc $(1 + \frac{1}{a_1}) \ldots (1 + \frac{1}{a_n}) \geqslant 2^n \frac{1}{\sqrt{a_1 \ldots a_n}} \geqslant 2^n$.

Supposons qu'on a égalité. Alors on a égalité dans l'inégalité $1 + \frac{1}{a_i} \geqslant 2\frac{1}{\sqrt{a_i}}$ pour tout i, donc $\frac{1}{a_i} = 1$ donc $a_i = 1$ pour tout i. Réciproquement si $a_1 = \cdots = a_n = 1$, $(1+\frac{1}{a_1}) \ldots (1+\frac{1}{a_n}) = (1+1) \times (1+1) = 2^n$ on a bien égalité.

Solution de l'exercice 21
On utilise que $1 - a = b + c + d$, $1 - b = a + c + d$ et similairement pour $1 - c$ et $1 - d$.
$\frac{bcd}{(1-a)^2} + \frac{acd}{(1-b)^2} + \frac{abd}{(1-c)^2} + \frac{abc}{(1-d)^2} = \frac{bcd}{(b+c+d)^2} + \frac{acd}{(a+c+d)^2} + \frac{abd}{(a+b+d)^2} + \frac{abc}{(a+b+c)^2}$

Or, par l'inégalité arithmético-géométrique, $\frac{bcd}{(b+c+d)^2} \leqslant \frac{\left(\frac{b+c+d}{3}\right)^3}{(b+c+d)^2} = \frac{b+c+d}{27}$. On utilise la même majoration pour les 3 autres termes de la somme, on obtient :

$$\frac{bcd}{(1-a)^2}+\frac{acd}{(1-b)^2}+\frac{abd}{(1-c)^2}+\frac{abc}{(1-d)^2} \leqslant \frac{b+c+d}{27}+\frac{a+c+d}{27}+\frac{a+b+d}{27}+\frac{a+b+c}{27} = \frac{3(a+b+c+d)}{27} =$$

Supposons qu'on a égalité. En particulier, on a égalité dans les différentes inégalités arithmético-géométriques utilisées. Pour avoir égalité dans la première, on doit avoir $b = c = d$; pour la seconde, on doit avoir $a = c = d$, de sorte que $a = b = c = d$. Comme $a+b+c+d = 1$, on a nécessairement $a = b = c = d = \frac{1}{4}$. Réciproquement, si $a = b = c = d = \frac{1}{4}$, $a+b+c+d = 1$ et $\frac{bcd}{(1-a)^2} + \frac{acd}{(1-b)^2} + \frac{abd}{(1-c)^2} + \frac{abc}{(1-d)^2} = 4 \times \frac{a^3}{(1-a)^2} = 4 \times \frac{4^2}{4^3 \times 3^2} = \frac{1}{9}$.

Solution de l'exercice 22
On est tenté d'utiliser directement une inégalité arithmético-géométrique sur les 6 termes. Mais si on regarde attentivement, on peut voir qu'on a l'égalité pour $a = b = c = \frac{1}{2}$, et que dans ce cas $a^2 = \frac{1}{4}$ et $a^2b^2 = \frac{1}{16}$. On ne pourra pas avoir égalité dans l'inégalité arithmético-géométrique, et on ne peut donc utiliser directement l'inégalité arithmético-géométrique. Par contre, on a bien $a^2 = b^2 = c^2$ et $a^2b^2 = a^2c^2 = b^2c^2$. On a va donc faire séparément une inégalité arithmético-géométrique sur les deux triplets de termes. Par l'inégalité arithmético-géométrique, $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 3(\sqrt[3]{abc})^2 = 3(\sqrt[3]{\frac{1}{8}})^2 = 3\frac{1}{2^2} = \frac{3}{4}$. Par l'inégalité arithmético-géométrique, $a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 \geqslant 3\sqrt[3]{a^4b^4c^4} = 3(\sqrt[3]{abc})^4 = 3(\sqrt[3]{\frac{1}{8}})^4 = 3\frac{1}{2^4} = \frac{3}{16}$. Ainsi, $a^2 + b^2 + c^2 + a^2b^2 + a^2c^2 + c^2b^2 \geqslant \frac{3}{4} + \frac{3}{16} = \frac{15}{16}$.

Supposons maintenant qu'on a égalité. Dans ce cas, comme on a égalité dans $a^2+b^2+c^2 \geqslant 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$, on a $a^2 = b^2 = c^2$ donc $a = b = c$. Comme $a^3 = abc = \frac{1}{8}$, $a = b = c = \frac{1}{2}$. Réciproquement, si $a = b = c = \frac{1}{2}$, alors $a^2 + b^2 + c^2 + a^2b^2 + a^2c^2 + c^2b^2 = 3(a^2 + a^4) = 3(\frac{1}{4} + \frac{1}{16}) = 3\frac{5}{16} = \frac{15}{16}$.

Solution de l'exercice 23
On applique l'inégalité des mauvais élèves pour $e_i = 1$ et $f_i = a_i$. On obtient $\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \geqslant \frac{(1+\cdots+1)^2}{a_1+\cdots+a_n} = \frac{n^2}{a_1+\cdots+a_n}$.

On a égalité si et seulement s'il existe un réel λ tel que $1 = \lambda a_i$ pour tout i, c'est-à-dire $a_i = \frac{1}{\lambda}$, donc si et seulement si les a_i sont tous égaux.

Solution de l'exercice 24

On applique l'inégalité des mauvais élèves pour $e_i = a_i$ et $f_i = 1$, on obtient $a_1^2 + \cdots + a_n^2 \geqslant \frac{(a_1+\cdots+a_n)^2}{1+\ldots 1} = \frac{(a_1+\cdots+a_n)^2}{n}$.

On a égalité si et seulement s'il exsite λ réel tel que pour tout i, $a_i = \lambda$ i.e. tous les a_i sont égaux.

Solution de l'exercice 25

On utilise l'inégalité des mauvais élèves avec $n = 3$ les e_i valant tous 1 et $f_1 = 1 + ab$, $f_2 = 1 + ac$, $f_3 = 1 + bc$. On obtient $\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ac} \geqslant \frac{(1+1+1)^2}{1+ab+1+bc+1+ac} = \frac{9}{3+ab+bc+ca}$. Or, par le lemme du tourniquet, on a $ab + bc + ca \leqslant a^2 + b^2 + c^2 = 3$, donc $\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ac} \geqslant \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$.

Supposons maintenant qu'on a égalité. Alors on a égalité dans le lemme du tourniquet, donc $a = b = c$. Comme $a^2+b^2+c^2 = 3$, on obtient $3a^2 = 3$ donc $a = b = c = 1$. Réciproquement si $a = b = c = 1$, $\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ac} = 3\frac{1}{1+1} = \frac{3}{2}$.

Solution de l'exercice 26

Notons que $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{b_i+a_i} - \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{b_i^2}{b_i+a_i} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i^2-b_i^2}{b_i+a_i} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i - b_i = S - S = 0$.

On applique l'inégalité des mauvais élèves : $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{b_i+a_i} \geqslant \frac{(a_1+\cdots+a_n)^2}{a_1+b_1+\cdots+a_n+b_n} = \frac{S^2}{2S} = \frac{S}{2}$

2 Entraînement de mi-parcours

Énoncés

Exercice 1
Montrer que pour tous réels $x, y > 0$ on a :

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geqslant 2$$

Déterminer les cas d'égalité.

Exercice 2
Déterminer tous les couples (a, n) d'entiers positifs tels que

$$a^2 = 2^n + 15$$

Exercice 3
Déterminer tous les couples (a, n) d'entiers positifs tels que

$$3^n = a^2 - 16$$

Exercice 4
Soient a, b, c des réels positifs tels que $ab + bc + ac = 3$. Montrer que :

$$\frac{a^2}{1 + bc} + \frac{b^2}{1 + ca} + \frac{c^2}{1 + ab} \geqslant \frac{3}{2}$$

Solution de l'exercice 1
Par IAG on a : $\frac{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}{2} \geqslant \sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}} = 1$. D'où $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geqslant 2$.

Solution de l'exercice 2
Pour $n \geqslant 2$ on a modulo 4 : $a^2 \equiv 3[4]$. Or, les carrés sont toujours congrus à 0 ou 1 modulo 4. Donc il nous reste :

•$\underline{n=1}$: $a^2 = 17$ ce qui est impossible.
•$\underline{n=0}$: $a^2 = 16$ on obtient la seule solution : $a = 4$.

Solution de l'exercice 3
Soit (a, n) une solution de l'équation.
Alors, $3^n = (a-4)(a+4)$.
On en déduit que $a-4$ et $a+4$ sont des puissances de 3.
Il existe k et l des entiers tels que $a-4 = 3^k$ et $a+4 = 3^l$ (avec $l \geqslant k$)
Ainsi, $8 = (a+4)-(a-4) = 3^k(3^{l-k}-1)$
COmme 3 ne divise pas 8, on obtient $k=0$ et $8 = 3^l - 1$ d'où $l = 2$. Ainsi, $a-4=1$ donc $a=5$ et $n=2$. Réciproquement, le couple $(5, 2)$ est solution de l'équation demandée.

Solution de l'exercice 4
En appliquant l'inégalité des mauvais élèves : $\frac{a^2}{1+bc} + \frac{b^2}{1+ca} + \frac{c^2}{1+ab} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{1+bc+1+ac+1+ab}$.
Or : $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$
Et par réordonnement : $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ac$
D'où : $\frac{a^2}{1+bc} + \frac{b^2}{1+ca} + \frac{c^2}{1+ab} \geqslant \frac{3}{2}$

3 Deuxième partie : Géométrie & Combinatoire

1 Principe des tiroirs (Vincent)

Principe des tiroirs

Ce cours est centré sur l'utilisation du résultat suivant :

Théorème 1 (Principe des tiroirs)**.**
Si l'on dispose de k tiroirs dans lesquels on souhaite ranger $ak+1$ chemises, il y aura au moins un tiroir dans lequel on rangera au moins $a+1$ chemises.

Démonstration. Si chaque tiroir accueillait au plus a chemises, on aurait pu ranger au plus ak chemises. □

Attention !

1. Ce théorème ne fonctionne que si a et k sont entiers.
2. Il n'y a aucune raison pour que le tiroir en question soit unique. Par exemple, si je souhaite ranger $3 \times 3 + 1$ chemises dans 3 tiroirs, je peux mettre 5 chemises dans le premier tiroir, 4 chemises dans le deuxième tiroir, et 1 seule chemise dans le troisième tiroir.
3. Il n'y a aucune raison pour que le tiroir en question contienne exactement $a+1$ chemises.
4. Il n'y a aucune raison pour que les tiroirs contiennent tous au moins a chemises. Certains tiroirs peuvent d'ailleurs rester vides.

Exercices

Exercice 1
Ariane a écrit trois nombres entiers sur une feuille de papier. Démontrer que, parmi ces trois nombres, il y en a (au moins) deux qui sont de même parité.

Exercice 2
Le collège de Valbonne compte 367 élèves. Démontrer que, parmi ceux-ci, il y en a au moins deux qui ont la même date d'anniversaire.

Exercice 3
Démontrer que, sur Terre, vivent actuellement deux personnes qui sont nées lors de la même seconde.

Exercice 4
Bérénice a écrit 2023 nombres entiers sur une feuille de papier. Démontrer que, parmi ces 2023 nombres, il en existe deux dont la différence est divisible par 2022.

Exercice 5
Caroline a choisi 1012 entiers parmi les nombres $1, 2, \ldots, 2022$. Démontrer que, parmi ces 1012 entiers, il en existe deux qui sont premiers entre eux.

Exercice 6
Daphné a choisi 55 entiers parmi les nombres $1, 2, \ldots, 99$. Démontrer que, parmi ces 55 entiers, il en existe deux dont la différence vaut 9. Cela est-il toujours vrai si on recherche une différence de 10 ? de 11 ? de 12 ? de 13 ?

Exercice 7
Au goûter, lors de la pause de 10 h 30, les quinze élèves du groupe A se sont partagés cent bonbons. Démontrer qu'il y a au moins deux élèves qui ont pris le même nombre de bonbons.

Exercice 8
Depuis le début du stage, certains élèves ont déjà déjeuné ensemble, et d'autres non. Le *score* d'un élève est le nombre de camarades avec lesquels il a déjeuné. Démontrer qu'il existe deux élèves dont les scores sont égaux.

Exercice 9
Élodie a disposé 201 points dans un rectangle d'aire 200 cm^2. Démontrer que, parmi ces 201 points, il en existe trois qui sont les sommets d'un triangle d'aire au plus 1 cm^2.

Exercice 10
Félicie a placé sept points dans un rectangle de dimensions 3×4. Démontrer que, parmi ces sept points, il en existe deux qui sont à distance au plus $\sqrt{5}$ l'un de l'autre.

Exercice 11
Gabrielle a effacé un des sept points qu'avait placés Félicie. Démontrer que, parmi les six points restants, il en existe deux qui sont à distance au plus $\sqrt{5}$ l'un de l'autre.

Solutions des exercices

Solution de l'exercice 1
Puisque seules deux parités (pair et impair) sont possibles, le principe des tiroirs indique que deux des trois nombres qu'a écrits Ariane sont de même parité.

Solution de l'exercice 2
Même en tenant compte des années bissextiles, il y a au plus 366 dates d'anniversaire possibles. Puisque le collège compte 367 élèves, le principe des tiroirs indique donc qu'au moins une date d'anniversaire doit être partagée par au moins deux élèves.

Solution de l'exercice 3
Sur Terre vivent actuellement au moins six milliards d'individus, et aucun d'entre eux n'a plus de cent-cinquante ans. Tous ces individus sont donc nés parmi les

$$150 \times 366 \times 24 \times 60^2 \leqslant 150 \times 400 \times 25 \times 3600 = 5\,400\,000\,000$$

dernières secondes. Le principe des tiroirs indique donc qu'au moins deux personnes sont nées lors de la même seconde.

Solution de l'exercice 4
Les 2023 nombres qu'a écrits Bérénice, quand on les divise par 2022, ne peuvent avoir que 2022 restes distincts tout au plus. Le principe des tiroirs indique donc qu'au moins deux de

ces nombres, que l'on notera a et b, ont le même reste, que l'on notera r. Mais alors 2022 divise à la fois $a-r$ et $b-r$, donc il divise aussi $(a-r)-(b-r)=a-b$.

Solution de l'exercice 5
Regroupons les 2022 entiers $1, 2, \ldots, 2022$ en 1011 paquets de la forme $\{2n+1, 2n+2\}$. Puisque Caroline a choisi 1012 entiers, le principe des tiroirs indique que deux de ses nombres appartiennent à un même paquet. Or, leur PGCD divise leur différence, qui est égale à 1. Ces deux nombres sont donc premiers entre eux.

Solution de l'exercice 6
Regroupons les entiers $1, 2, \ldots, 108$ en $6 \times 9 = 54$ parties de deux éléments chacune, de la forme $\{n, n+9\}$. Il s'agit des ensembles $\{18a+b, 18a+b+9\}$ pour lesquels $0 \leqslant a \leqslant 5$ et $1 \leqslant b \leqslant 9$. Les 55 nombres qu'a choisis Daphné sont tous compris entre 1 et 108, donc deux de ces nombres appartiennent à la même partie, et leur différence vaut alors 9.

On procède de manière tout à fait analogue pour le cas des différences 10 et 13, et globalement analogue pour le cas de la différence 12 :

1. On regroupe les entiers $1, 2, \ldots, 100$ en $5 \times 10 = 50$ parties de la forme $\{n, n+10\}$. Il s'agit des ensembles $\{20a+b, 20a+b+10\}$ pour lesquels $0 \leqslant a \leqslant 4$ et $1 \leqslant b \leqslant 10$. Les 55 nombres qu'a choisis Daphné sont tous compris entre 1 et 100, donc deux de ces nombres appartiennent à la même partie, et leur différence vaut alors 10.
2. On regroupe les entiers $1, 2, \ldots, 99$ et $109, 110, 111$ en $4 \times 12 + 3 = 51$ parties de la forme $\{n, n+12\}$. Il s'agit des ensembles $\{24a+b, 24a+b+12\}$ pour lesquels $0 \leqslant a \leqslant 3$ et $1 \leqslant b \leqslant 12$, ou bien $a = 4$ et $1 \leqslant b \leqslant 3$. Les 55 nombres qu'a choisis Daphné appartiennent tous à l'un de ces ensembles, donc deux de ces nombres appartiennent à la même partie, et leur différence vaut alors 12.
3. On regroupe les entiers $1, 2, \ldots, 104$ en $4 \times 13 = 52$ parties de la forme $\{n, n+13\}$. Il s'agit des ensembles $\{26a+b, 26a+b+13\}$ pour lesquels $0 \leqslant a \leqslant 3$ et $1 \leqslant b \leqslant 13$. Les 55 nombres qu'a choisis Daphné sont tous compris entre 1 et 104, donc deux de ces nombres appartiennent à la même partie, et leur différence vaut alors 13.

Enfin, on a grand peine à procéder de la même manière lorsque la différence recherchée est égale à 11. Et pour cause ! En effet, en suivant le canevas ci-dessus, on constate que Daphné aurait pu choisir les entiers $22a+b$ pour lesquels $0 \leqslant a \leqslant 4$ et $1 \leqslant b \leqslant 11$. Il existe 55 tels entiers, tous compris entre 1 et 99, et leur différence n'est jamais égale à 11.

Attention !

1. On aurait aussi pu tronquer nos tiroirs qui dépassaient de l'ensemble des entiers compris entre 1 et 99.

Solution de l'exercice 7
Supposons que deux élèves ont toujours pris des nombres de bonbons différents. Le $k^{\text{ème}}$ élève qui a pris le moins de bonbons a donc pris au moins $k-1$ bonbons. En tout, nos élèves ont donc pris au moins $0+1+2+\ldots+14=105$ bonbons, ce qui est impossible.

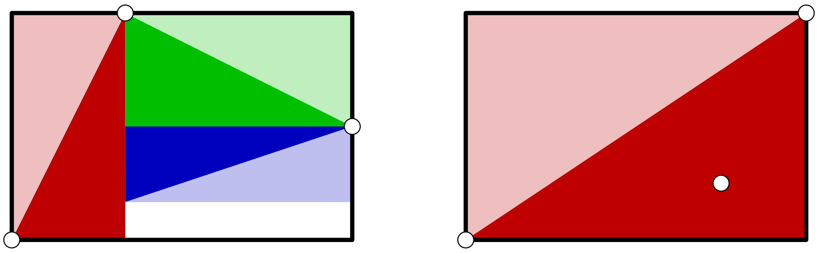
Solution de l'exercice 8
Soit n le nombre d'élèves du stage. Chaque élève a un score compris entre 0 et $n-1$. Si les élèves ont tous des scores distincts, chaque nombre entre 0 et $n-1$ est donc le score d'un élève. Mais alors il y a un élève (disons Honorine) de score 0, qui n'a mangé avec aucun autre élève, et aussi un élève (disons Isabelle) de score $n-1$, qui a mangé avec tous les autres élèves,

et en particulier avec Honorine, ce qui est impossible. Notre supposition est donc absurde, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 9

Subdivisons notre rectangle en cent rectangles d'aire 2 cm^2, par exemple découpés dans le sens de la longueur. Le principe des tiroirs indique que trois des points d'Élodie se situent dans le même petit rectangle.

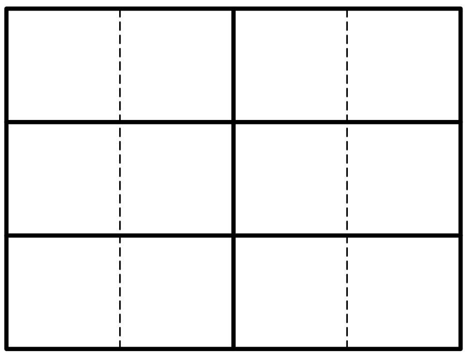
Or, quand trois points se trouvent dans un rectangle d'aire a, ils forment un triangle d'aire au plus $a/2$, comme l'illustre la figure ci-dessous : quitte à resserrer les côtés du rectangle, chaque côté contient un sommet du triangle, et le principe des tiroirs indique même qu'un des sommets appartient à deux côtés du rectangle, formant donc un coin du rectangle. À symétrie près, deux cas de figure sont donc possibles, et dans chaque cas le triangle est inclus dans la zone foncée, elle-même d'aire inférieure ou égale à la zone claire.



Nos trois points forment dont un triangle d'aire au plus 1 cm^2.

Solution de l'exercice 10

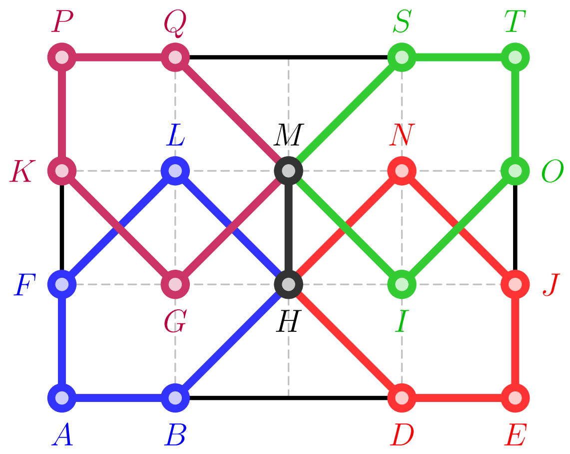
Découpons le rectangle de Félicie en six rectangles de dimensions 2×1, comme illustré ci-dessous. Le principe des tiroirs indique que deux points de Félicie appartiennent à un même rectangle, et ces deux points sont alors à distance au plus $\sqrt{5}$ l'un de l'autre.



Solution de l'exercice 11

Afin de réutiliser le principe des tiroirs comme à l'exercice précédent, on tente de découper le rectangle 4×3 en cinq zones de diamètre au plus $\sqrt{5}$. Au lieu de parachuter violemment un tel découpage, construisons-le pas à pas.

En outre, puisque remplacer une zone par son enveloppe convexe ne change pas son diamètre, on pourra toujours supposer nos zones convexes. De même, si une zone contient l'intérieur d'un segment $[X, Y]$, on constate que ses points sont tous à distance $d \leqslant \sqrt{5}$ de X et de Y, et on supposera donc toujours que X et Y appartiennent également à notre zone.



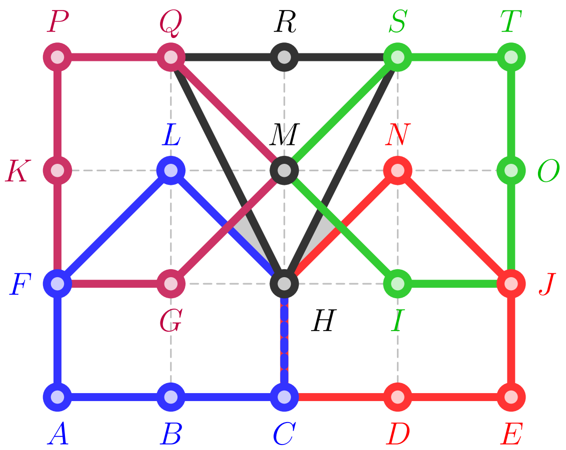
Les cinq points A, E, P, T, et tout point intérieur segment $[MH]$ représentés ci-dessus sont à distance $d > \sqrt{5}$ l'un de l'autre, donc ils appartiennent à cinq zones différentes. On dessine alors ces zones avec des couleurs différentes, quitte à considérer comme multicolores les points situés à la lisière de plusieurs zones. En particulier, puisque le polygone noir contient l'intérieur du segment $[MH]$, il contient le segment $[MH]$ tout entier.

Ensuite, tout point intérieur au segment $[AB]$ est à distance $d > \sqrt{5}$ des points E, M, P et T, donc appartient à la zone bleue. Ainsi, le segment $[AB]$ est dans la zone bleue. Mais alors tout point intérieur au segment $[KP]$ est à distance $d > \sqrt{5}$ des points B, E, H et Y, donc appartient à la zone violette. Ainsi, le segment $[PK]$ est dans la zone violette. On détermine de même les couleurs des points I, J, K, L, N et P.

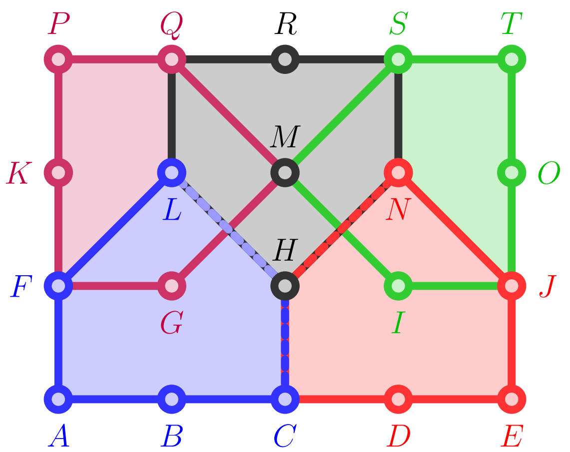
Enfin, tout point à distance $d \leqslant \sqrt{5}$ de A et de B est aussi à distance $d' \leqslant \sqrt{5}$ de H. On suppose donc H bleu. De même, on suppose L bleu, puis H et N rouges, I et M verts, et G et M violets.

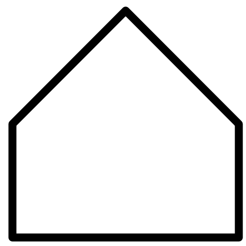
Par ailleurs, les côtés opposés du rectangle sont à distance au moins 3 l'un de l'autre, donc la zone noire ne peut jamais contenir des points de deux côtés opposés. Sans perte de généralité, on suppose donc qu'elle ne contient aucun point des côtés $[AE]$ et $[AP]$. Dès lors, tout point intérieur au segment $[BC]$ est à distance $d > \sqrt{5}$ des points J, P et T, donc appartient à la zone bleue. Ainsi, le segment $[BC]$ est dans la zone bleue et, de même, le segment $[CD]$ est dans la zone rouge.

Mais alors tout point intérieur au segment $[FK]$ est à distance $d > \sqrt{5}$ des points C et T, donc appartient à la zone violette. Ainsi, le segment $[FK]$ est dans la zone violette. On démontre de même que $[QR]$ est dans la zone noire, que $[JO]$ est dans la zone verte, et enfin que $[RS]$ est dans la zone noire. Ce faisant, on obtient le découpage ci-dessous.



On a presque fini, mais les deux petits triangles grisés n'ont encore été inclus dans aucune zone. On pourrait inclure certains points du triangle de gauche dans les zones bleue ou violette, mais d'autres sont trop loin des points A et P, et doivent nécessairement appartenir à la zone noire. Or, on a beaucoup de marge pour augmenter celle-ci, et on y inclut donc nos deux triangles grisés. On peut même pousser le perfectionnisme jusqu'à inclure les points L et N dans la zone noire, de sorte que notre rectangle 3×4 sera recouvert de cinq zones monochromes en forme de maison, comme ci-dessous.





Maison

En particulier, sur les six points ayant survécu à l'intervention de Gabrielle, deux points appartiennent à la même zone, et ils sont donc à distance au plus $\sqrt{5}$ l'un de l'autre.

Attention !

1. Comme l'illustre clairement cet exercice, il est parfois (et, en réalité, souvent) plus difficile de trouver les bons tiroirs que d'appliquer ensuite le principe des tiroirs.
2. Rien n'exclut qu'un point appartienne à plusieurs maisons ou, plus généralement, qu'une chemise soit rangée dans plusieurs tiroirs : si tel est le cas, ça augmente de toute façon nos chances de trouver un tiroir vraiment très rempli !
   De toute façon, dans un tel cas de figure, on peut toujours choisir le tiroir auquel chaque élément appartiendra en priorité, et exclure cet élément des autres tiroirs auxquels il aurait pu appartenir a priori. Ici, cela revient par exemple à remplacer nos zones en forme de maison par les zones colorées dans le dessin de gauche, où l'on a tronqué les maisons verte et violette.

2 Chasse aux angles (Mathieu Ba.)

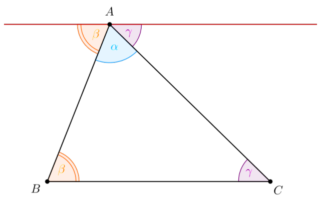
La chasse aux angles est un outil qui s'avère extrêmement utile dans la résolution de problèmes de géométrie. De nombreux problèmes apparemment complexes peuvent se reformuler de façon angulaire et ainsi être résolus grâce à cette technique. Elle consiste à donner un nom (en général avec des lettres grecques) aux angles qui apparaissent souvent dans la figure étudiée et à calculer tous les angles de cette figure à partir des angles de départ en utilisant les données de l'énoncé.

Avant de la mettre en application, il est nécessaire de connaître un certain nombre de résultats de géométrie du triangle et des cercles.

Théorème 1.
Soit $n \geqslant 3$. La somme des angles dans un n-gone est $180(n-2)$ degrés.

Démonstration. Nous allons prouver ce résultat par récurrence.

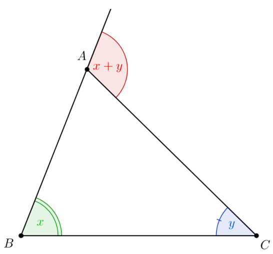
- **Initialisation :** Le cas $n = 3$ est celui du triangle. Prenons donc un triangle quelconque ABC. On utilise la notation usuelle $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{CBA} = \beta$ et $\widehat{ACB} = \gamma$ (ces notations seront implicites par la suite). Menons donc la parallèle à (BC) passant par A. L'utilisation des angles alternes-internes donne alors que $\alpha + \beta + \gamma$ correspond à un angle plat, qui vaut par définition 180 degrés.



- **Hérédité :** Supposons notre propriété établie pour $n \geqslant 3$ et montrons qu'elle est également vraie pour $n+1$. Pour cela, on considère notre $(n+1)$-gone comme un n-gone auquel on a rajouté un triangle. La somme des angles du n-gone vaut alors $180(n-2)$ par hypothèse de récurrence, qu'on additionne aux 180 degrés du triangle rajouté, ce qui fait bien $180(n-1)$ degrés au total et achève la démonstration.

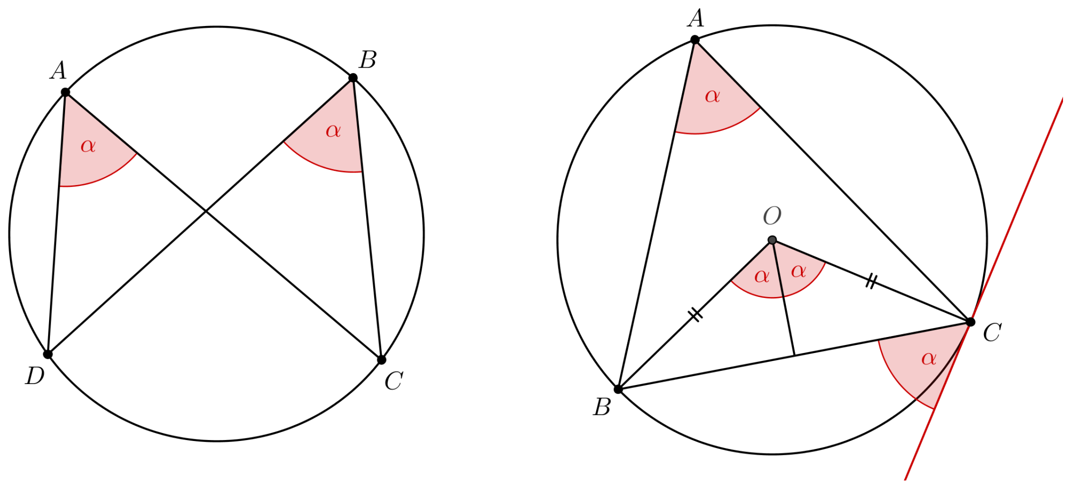
$\square$

Corollaire 2.
Dans un triangle, il suffit de connaître deux angles pour connaître le troisième. En particulier, on retiendra la configuration ci-dessous :



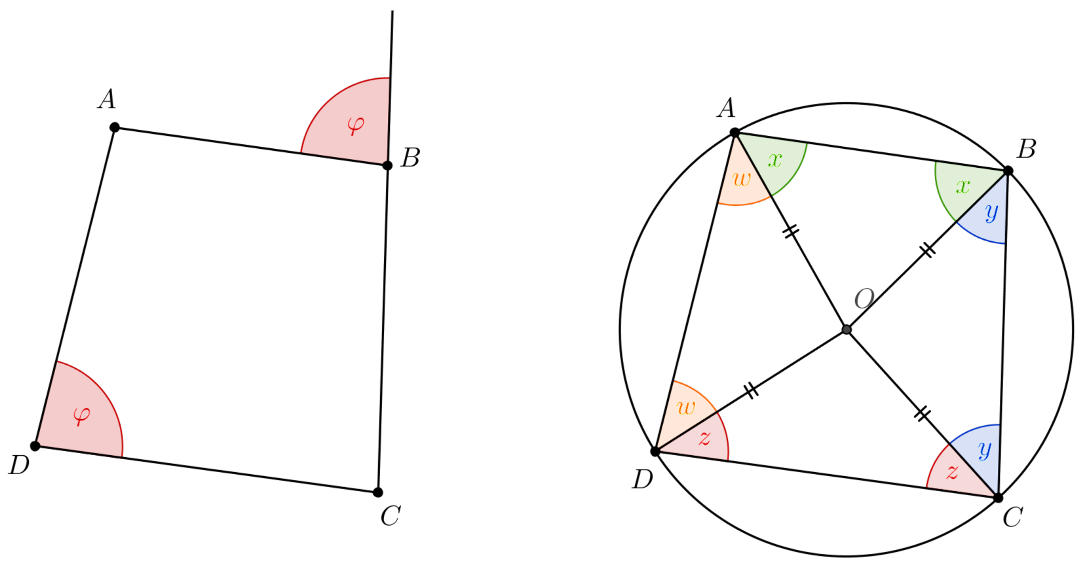
Le théorème suivant est sans doute l'un des plus importants à retenir.

Théorème 3 (angle au centre, angle inscrit)**.**
Sur la figure à gauche, les points A, B, C et D sont *cocycliques* (c'est-à-dire sur un même cercle) si et seulement si $\widehat{DAC} = \widehat{DBC}$. Autrement dit, deux angles intersectant le même arc ont même mesure. À droite est représenté le cas limite de ce théorème, lorsque deux points sont confondus et qu'une droite est alors tangente au cercle circonscrit à ABC.



Enfin, mentionnons un théorème tout aussi fondamental, qui fournit une condition angulaire nécessaire et suffisante à la cocyclicité de quatre points.

Théorème 4.
Un quadrilatère est cyclique si et seulement si la somme de deux angles opposés est égale à 180 degrés.



Démonstration (Démonstration du sens direct). Le seul élément dont nous disposons pour démontrer notre théorème est que les quatre points sont sur un même cercle. Aussi, introduisons O, le centre de ce cercle. Il s'agit alors de repérer que l'on a énormément de triangles isocèles, à savoir les triangles OAB, OBC, OCD et ODA, tous isocèles en O. Notre philosophie est donc de donner un nom à chacun des angles intervenant dans ces triangles : posons $\widehat{OAB} = x$, $\widehat{OBC} = y$, $\widehat{OCD} = z$ et $\widehat{ODA} = w$. On peut alors calculer tous les angles comme sur la figure ci-contre. En considérant le quadrilatère $ABCD$, nous savons alors d'après notre premier théorème que

$$2x + 2y + 2z + 2w = 360$$

d'où on conclut que

$$\widehat{ABC} + \widehat{CDA} = x + y + z + w = 180$$

$\square$

Pour éviter des problèmes d'orientation et de position des points (par exemple, un point pourra être situé à droite ou à gauche d'une certaine droite, ce qui amène à distinguer des cas de façon fastidieuse et peu instructive), on préférera employer des angles orientés entre les droites pour formaliser les chasses aux angles qu'on peut faire "sur le dessin".

Plus précisément, si d et d' sont deux droites du plan, on désigne par (d, d') l'angle dont il faut tourner d vers la gauche (dans le sens trigonométrique, c'est-à-dire le sens inverse des aiguilles d'une montre) pour que d et d' se superposent.

On remarque que si l'on fait tourner une droite de 180 degrés sur elle-même, elle revient dans sa position de départ. Aussi, ajouter ou soustraire 180 degrés lorsqu'on calcule avec des angles orientés ne modifie pas le résultat. On dira que les angles orientés entre les droites sont définis *modulo* 180 degrés. En revanche, on convient que tourner vers la gauche est positif et vers la droite négatif, en particulier $(d, d') = -(d', d)$.

Enfin, l'intérêt de cette notion est qu'on peut toujours décomposer un angle orienté en plusieurs autres angles : lorsqu'on tourne une droite d pour arriver sur une droite d', on peut passer par une droite d'' puis aller de d'' à d' en conservant les propriétés angulaires de notre déplacement. Ainsi, on obtient le théorème suivant :

Théorème 5.
On a la décomposition suivante, appelée relation de Chasles :

$$(d, d') = (d, d'') + (d'', d')$$

On peut alors condenser nos résultats précédents en écrivant :

Théorème 6.
Quatre points A, B, C et D sont cocycliques si et seulement si

$$(CB, CA) = (DB, DA)$$

Remarquons que ceci est tout à fait cohérent avec les angles des figures illustrant les propriétés déjà énoncées. De façon plus générale, tout raisonnement de chasse aux angles classique peut s'écrire avec des angles orientés, et réciproquement. Si les angles orientés éliminent les problèmes de configuration, il est souvent difficile de résoudre un exercice en utilisant directement cette notion. Une bonne méthode nous semble donc être de mener à bien la chasse aux angles habituelle sur la figure pour trouver les étapes du raisonnement puis de les rédiger soigneusement avec les angles orientés.

Exercices

Exercice 1
Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles s'intersectant en A et B. Une droite d passant par A coupe Γ_1 en P et Γ_2 en Q. De même, une droite d' passant par B recoupe Γ_1 en P' et Γ_2 en Q'. Montrer que les droites (PP') et (QQ') sont parallèles.

Exercice 2
Soient A, B, C et D quatre points cocycliques. On note E l'intersection des droites (AB) et (CD). La tangente en D au cercle circonscrit de ADE recoupe (BC) en F. Montrer que DCF est isocèle en F.

Exercice 3
Soient A, B, C et D quatre points cocycliques. On note respectivement A' et C' les projetés orthogonaux de A et C sur (BD), et B' et D' les projetés orthogonaux de B et D sur (AC). Montrer alors que A', B', C' et D' sont également cocycliques.

Exercice 4
Soit ABC un triangle et O le centre de son cercle circonscrit. Soient H_B et H_C les pieds des hauteurs issues de B et C. Prouver que $(H_BH_C) \perp (AO)$.

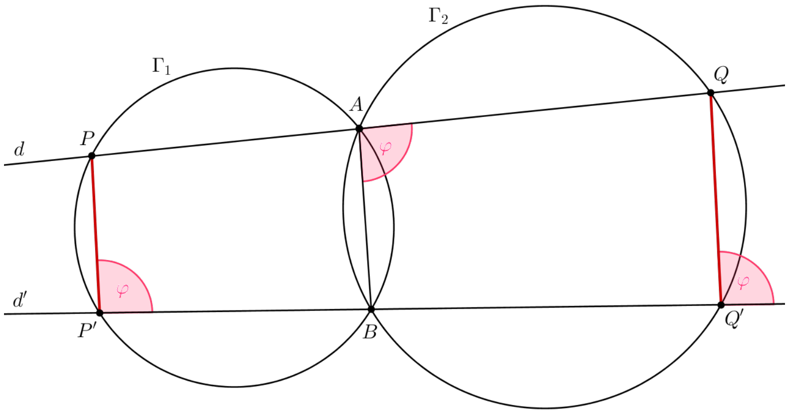
Exercice 5
Soit $ABCD$ un quadrilatère inscriptible et tangentiel (c'est-à-dire dont tous les côtés sont tangents à un même cercle inscrit dans le quadrilatère). On note respectivement E, F, G et H les points de tangence de son cercle inscrit avec les côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ et $[AD]$. Prouver que $(EG) \perp (HF)$.

Exercice 6
Soient A, B, C et D quatre points dans cet ordre sur un cercle et soit S le milieu de l'arc $\widehat{AB}$ ne contenant pas C et D. Les droites (SD) et (SC) intersectent (AB) en E et F respectivement. Montrer que C, D, E et F sont cocycliques.

Exercice 7
Soit $ABCD$ un trapèze circonscriptible, avec $(AB) // (CD)$ et $AB > CD$. Le cercle inscrit au triangle ABC est tangent aux côtés $[AB]$ et $[AC]$ en M et N respectivement. Montrer que le centre du cercle inscrit à $ABCD$ appartient à la droite (MN).

Solutions des exercices

Comme nous l'avons dit, la chasse aux angles classique et l'utilisation des angles orientés sont deux rédactions différentes d'un même raisonnement. Ainsi, les solutions des exercices qui suivent sont pour la plupart rédigées avec des angles orientés pour éviter les problèmes de configuration évoqués précédemment, mais les chasses aux angles qu'on pourrait effectuer "à la main" apparaissent sur les figures pour une meilleure compréhension des preuves.
Solution de l'exercice 1
La chasse aux angles classiques figure sur le dessin ci-dessous.



En rédigeant avec les angles orientés, on écrit

$$\begin{aligned}(P'B, P'P) &= (AB, AP) \text{ car } A, B, P' \text{ et } P \text{ sont cocycliques}\\ &= (AB, AQ) \text{ car } P, A \text{ et } Q \text{ sont alignés}\\ &= (Q'B, Q'Q) \text{ car } A, B, Q' \text{ et } Q \text{ sont cocycliques}\\ &= (P'B, Q'Q) \text{ car } P', B \text{ et } Q' \text{ sont alignés}\end{aligned}$$

ce qui signifie bien que (PP') et (QQ') sont parallèles puisqu'on peut écrire

$$(P'P, Q'Q) = (P'P, P'B) + (P'B, Q'Q) = -(P'B, Q'Q) + (P'B, Q'Q) = 0$$

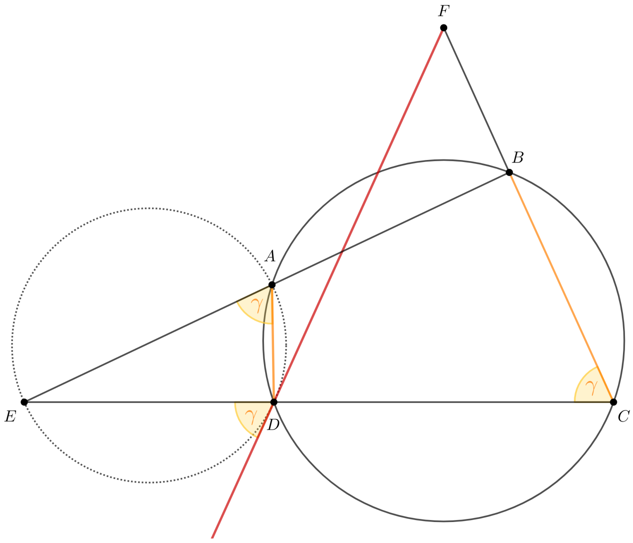
Solution de l'exercice 2
La droite (DF) étant tangente en D au cercle circonscrit à ADE, le théorème de l'angle inscrit (cas limite) permet d'affirmer que $(AE, AD) = (DE, FD)$. Par ailleurs, puisque les points A, B, C et D étant cocycliques, le théorème de Fifi fournit : $(CB, CD) = (AE, AD)$. Ainsi, $(DE, FD) = (CB, CD)$. Comme $(DE, FD) = (DC, DF)$, on en conclut que FCD est isocèle en F.

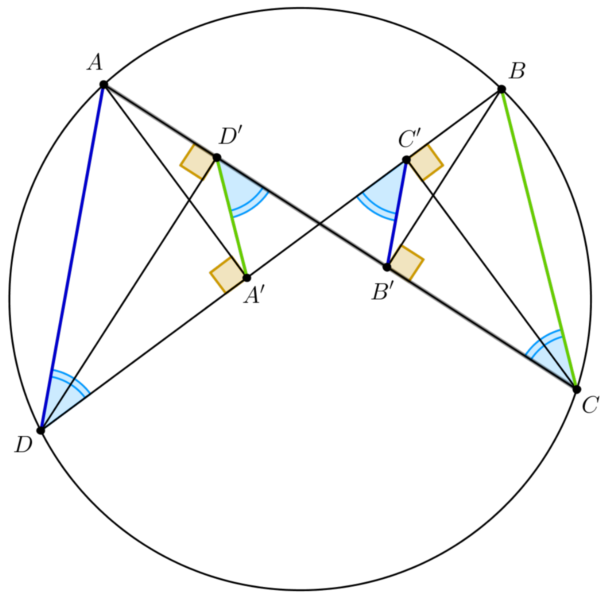
Solution de l'exercice 3
Puisque $\widehat{AD'D} = \widehat{AA'D} = 90$, le théorème de l'angle inscrit permet d'affirmer que A, D, A' et D' sont cocycliques. On obtient de la même façon que B, C, B' et C' sont cocycliques.

On en déduit alors que $(DA', DA) = (D'A', D'A)$ car A, D, A' et D' sont cocycliques et que $(CB, CB') = (C'B, C'B')$ car B, C, B' et C' sont cocycliques. Or, A, B, C et D étant cocycliques, nous savons que $(DB, DA) = (CB, CA)$ et l'alignement des points D, A' et B d'une part et de C, B' et A d'autre part fait que cette dernière égalité se réécrit $(DA', DA) = (CB, CB')$. Finalement, on en conclut que $(D'A', D'A) = (C'B, C'B')$ soit $(D'A', D'B') = (C'A', C'B')$, ce qui démontre que A', B', C' et D' sont cocycliques.

Solution de l'exercice 4
Les triangles BH_BC et BH_CC étant respectivement rectangles en H_B et H_C, le théorème de l'angle inscrit nous dit que B, C, H_B et H_C sont cocycliques, d'où on tire que $(BC, BH_C) = (H_BC, H_BH_C)$ soit

$$(BC, BA) = (H_BA, H_BH_C)$$





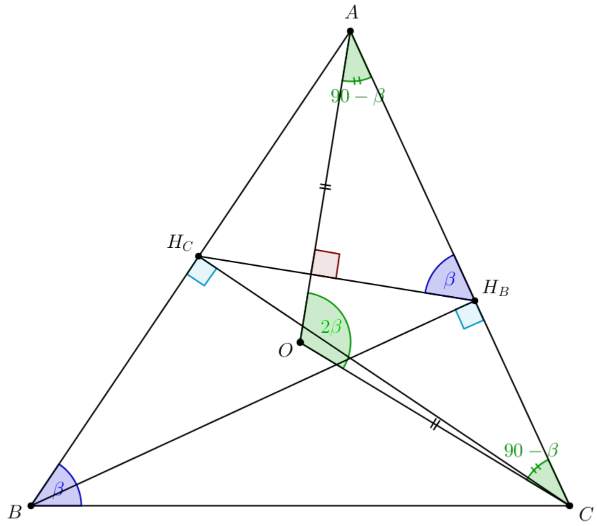
D'autre part, le théorème de l'angle au centre indique que $(OC, OA) = 2(BC, BA)$. Le triangle AOC étant isocèle en O, on en déduit que

$$(AO, AH_B) = (AO, AC) = 90 - (BC, BA)$$

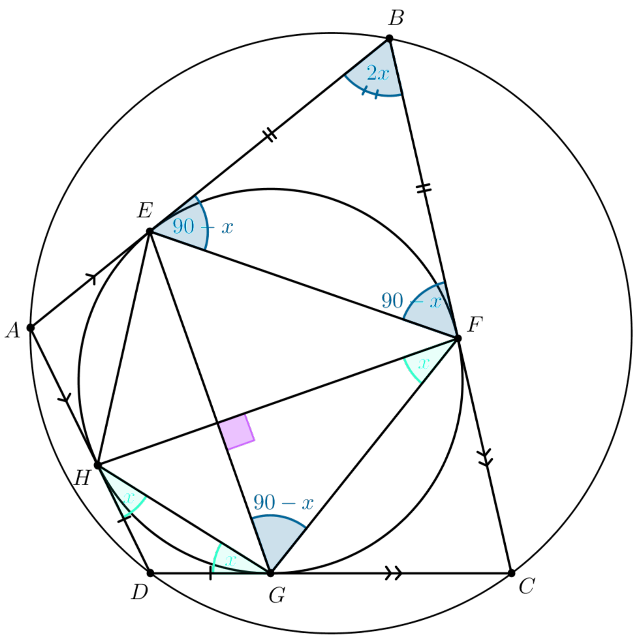
La relation de Chasles donne finalement

$$(AO, H_BH_C) = (AO, H_BA) + (H_BA, H_BH_C) = 90 - (BC, BA) + (BC, BA) = 90$$

<u>*Solution de l'exercice 5*</u>



$$\begin{aligned}(GE, HF) &= (GE, GF) + (FG, FH) \text{ d'après la relation de Chasles}\\ &= (FE, FB) + (GD, GH) \text{ (cas limite du théorème de l'angle inscrit)}\\ &= \frac{(BE, BF)}{2} + \frac{(DA, DC)}{2} \text{ car } BE = BF \text{ et } DG = DH\\ &= 90 \text{ car } A, B, C \text{ et } D \text{ sont cocycliques, soit } (BA, BC) + (DA, DC) = 180\end{aligned}$$

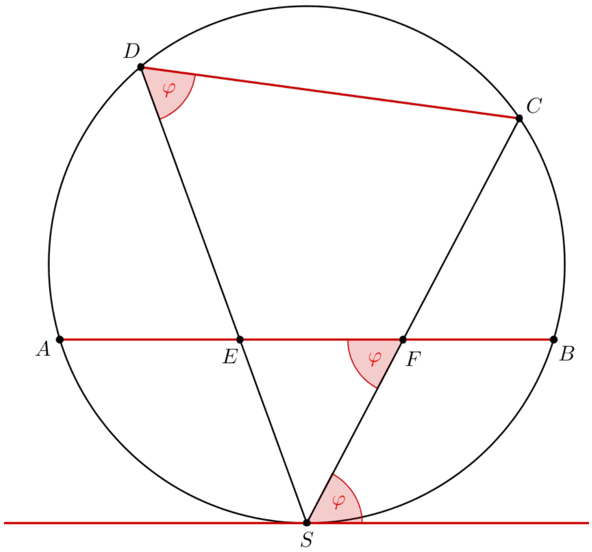


Solution de l'exercice 6

L'idée est de considérer la tangente au cercle en S, qu'on appelle t. Cette idée est motivée par le fait que, S étant le milieu de l'arc $\widehat{AB}$, $t \,//\, (AB)$. On a alors

$$\begin{aligned}(DE, DC) &= (DS, DC) \text{ car } D, E \text{ et } S \text{ sont alignés}\\ &= (t, SC) \text{ d'après le cas limite du théorème de l'angle inscrit}\\ &= (AB, SC) \text{ puisque } t \,//\, (AB)\\ &= (FE, FS) \text{ (alignement des points)}\end{aligned}$$

ce qui prouve la cocyclicité des points C, D, E et F.



Remarque : Il est également possible de s'en sortir entièrement par chasse aux angles, sans passer par l'introduction de la tangente en S.

Solution de l'exercice 7
Le triangle AMN étant isocèle en A, $(NA, NM) = 90 - \frac{(AB,AC)}{2}$. Pour prouver que N, O et M sont alignés, il suffit donc de montrer que $(NA, NO) = 90 - \frac{(AB,AC)}{2}$.

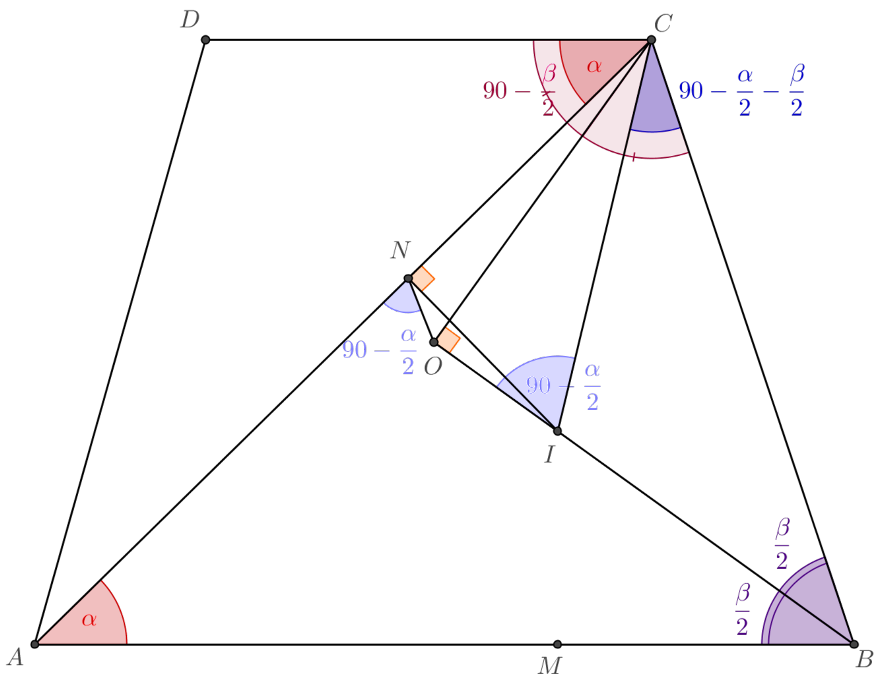
$ABCD$ étant un trapèze, $(CD, CB) = 180 - (BC, BA)$. Puisque O est le centre du cercle inscrit à $ABCD$, on a $(CO, CB) = \frac{(CD,CB)}{2} = 90 - \frac{(BC,BA)}{2}$. De plus, I étant le centre du cercle inscrit à ABC, $(BC, BI) = \frac{(BC,BA)}{2}$. On en déduit alors que

$$\begin{aligned}(OB, OC) &= (OB, BC) + (BC, OC) \text{ par la relation de Chasles}\\ &= -(BC, OB) - (OC, BC)\\ &= -(BC, BI) - (CO, CB) \text{ car } B, I \text{ et } O \text{ sont alignés}\\ &= -90 \text{ d'après les calculs faits précedemment}\\ &= 90 \text{ par définition modulo 180 des angles orientés}\end{aligned}$$

Par ailleurs, par définition du point N, $(IN) \perp (AC)$. Ainsi, $(OB, OC) = (NI, NC)$, si bien que N, O, I et C sont cocycliques d'après le théorème de l'angle inscrit. On sait alors que

$(NA, NO) = (IC, IO)$. Pour conclure, on calcule enfin

$$\begin{aligned}
(IC, IO) &= (IC, BC) + (BC, BI) \quad \text{d'après la relation de Chasles} \\
&= \frac{(CA, CB)}{2} + \frac{(BC, BA)}{2} \quad \text{par définition du point I} \\
&= \frac{(CA, BA)}{2} \quad \text{encore par Chasles} \\
&= 90 - \frac{(AB, AC)}{2}
\end{aligned}$$



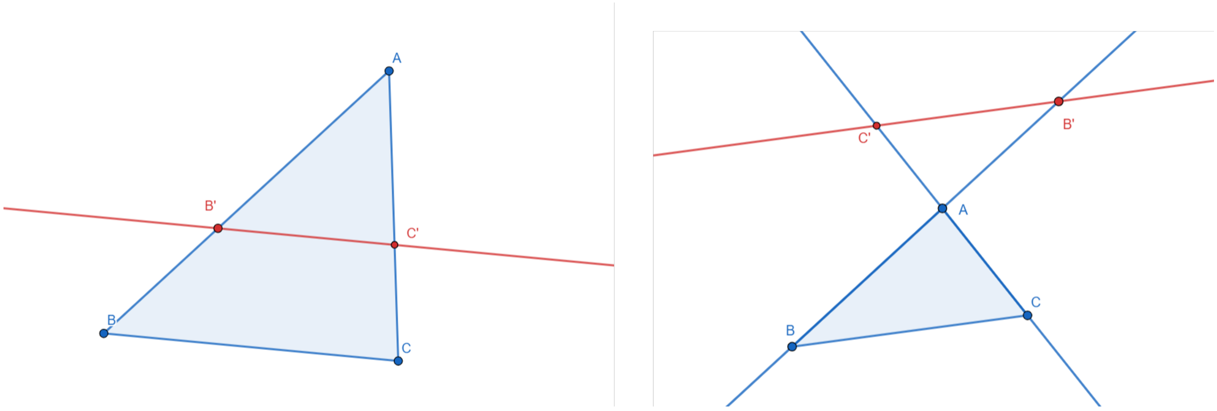
3 Triangles semblables (Domitille et Isaline)

Dans le langage courant, on dit que deux figures sont semblables lorsqu'elles possèdent la même " forme" : deux figures semblables sont identiques, à leur position sur la feuille et à leur taille près. Une définition formelle peut s'énoncer comme suit

Définition 1.
On dit de deux triangles ABC et $A'B'C'$ qu'ils sont semblables s'ils vérifient l'égalité $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$: alors, les longueurs des côtés des deux triangles sont proportionnelles. On note alors $ABC \sim A'B'C'$ (l'ordre dans lequel on écrit les sommets à son importance).

On a de manière équivalentes $ABC \sim A'B'C'$ si et seulement si $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$, $\widehat{BCA} = \widehat{B'C'A'}$ et $\widehat{CAB} = \widehat{C'A'B'}$ (la somme des angles d'un triangle valant toujours 180, deux des égalités suffisent).
De même, on a $ABC \sim A'B'C'$ si et seulement si $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$ et $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$. L'égalité de longueur concerne les côtés adjacents à l'angle considéré

Exemple 2.
Le théorème de Thalès peut s'énoncer en affirmant qu'une droite parallèle à un des côtés du triangle coupe ce triangle en formant un triangle semblable. Dans les deux configurations ci-dessous, $ABC \sim AB'C'$.

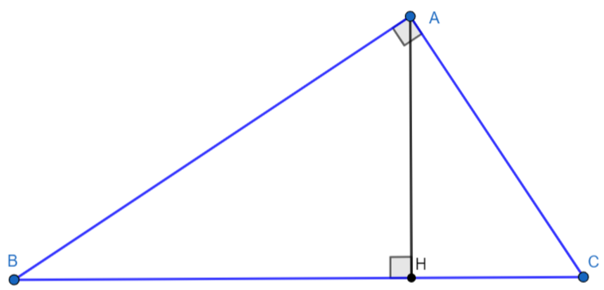


Exercice 1 (Théorème de Pythagore)
Soit ABC un triangle rectangle en A. Montrer l'égalité

$$BC^2 = AC^2 + AB^2$$

Indication : On introduit le pied d'une des hauteurs

Solution de l'exercice 1
On introduit H le pied de la hauteur issue de A. On a donc la figure suivante

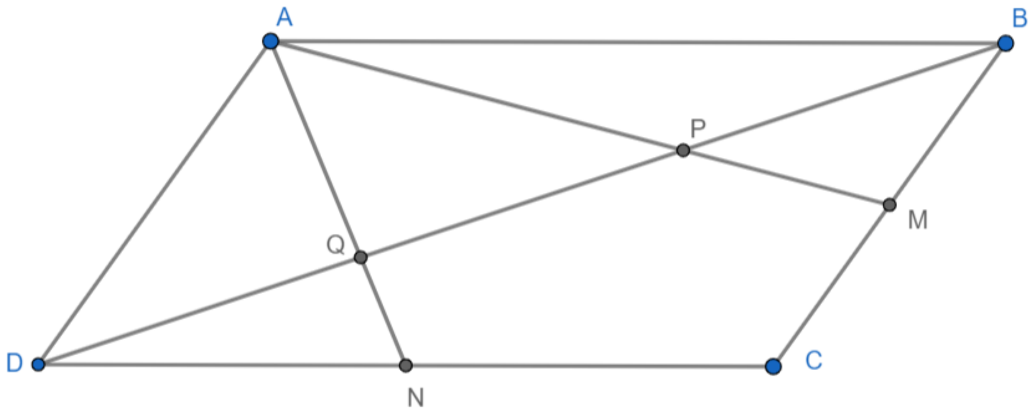


On commence par effectuer une chasse aux angles. Sachant que $\widehat{BAH} + \widehat{HAC} = 90$ et que la somme des angles d'un triangle vaut 180, on obtient $\widehat{HAC} = \widehat{ABH} = \widehat{ABC}$ et $\widehat{BAH} = \widehat{ACH} = \widehat{ACB}$. On a donc $ABC \sim HBA \sim HAC$.

D'une part, on a $\frac{AB}{HB} = \frac{BC}{BA}$, soit $AB^2 = BC \times BH$. D'autre part, on a $\frac{AC}{HC} = \frac{BC}{AC}$, soit $AC^2 = BC \times HC$.
En sommant, on obtient $AC^2 + AB^2 = BC(BH + HC) = BC^2$

Exercice 2
Soit $ABCD$ un parallélogramme. On note M le milieu du côté $[BC]$ et N le milieu du côté $[CD]$. La droite (BD) intersecte (AN) en Q et (AM) en P. Montrer que $BP = PQ = QD$.

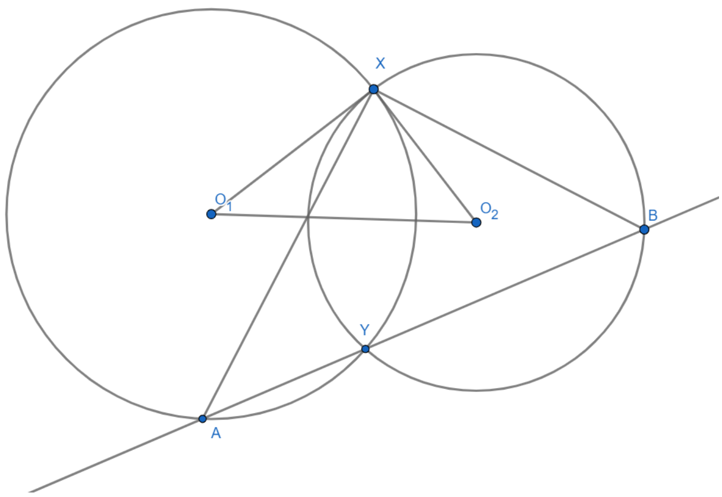
Solution de l'exercice 2
On a la figure suivante



Les triangles DQN et BQA sont semblables (configuration "papillon" de Thalès). On a donc $\frac{QD}{QB} = \frac{DN}{AB} = \frac{1}{2}$, soit $QB = 2DQ$. Cela donne alors $DQ = \frac{1}{3}BD$.
En faisant la même chose avec les triangles BPM et DPA, on montre que $BP = \frac{1}{3}BD$.
On en conclue que $BP = PQ = QD = \frac{1}{3}BD$.

Exercice 3
Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercle dont les centres respectifs sont O_1 et O_2. On note X et Y leurs deux points d'intersection. On considère une droite passant par Y. On note A sa deuxième intersection avec Γ_1 et B sa deuxième intersection avec Γ_2. Montrer que $XO_1O_2 \sim XAB$.

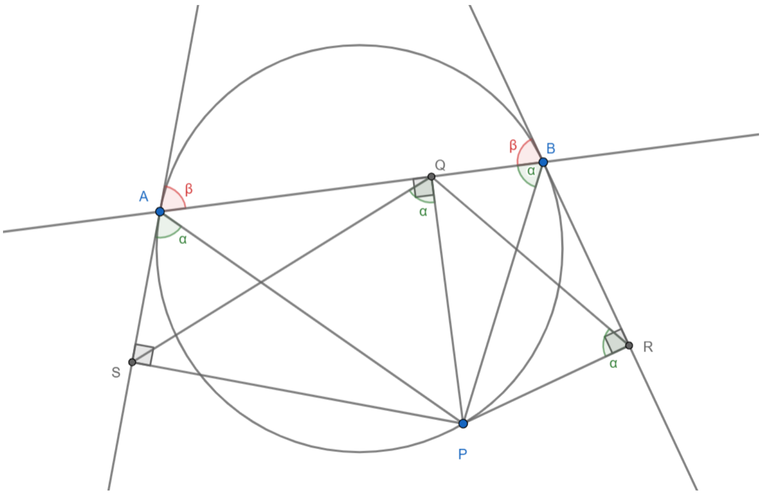
Solution de l'exercice 3
On remarque que X et Y sont symétriques par rapport à (O_1O_2) dans la figure suivante.



Ainsi, $\widehat{XO_1O_2} = \widehat{O_1O_2Y} = \frac{1}{2}\widehat{XO_1Y}$. Cela donne donc par théorème de l'angle au centre $\widehat{XO_1O_2} = \widehat{XAY}$. De même, on a $\widehat{XO_2O_1} = \widehat{XBY}$.
Cela montre donc que $XO_1O_2 \sim XAB$.

Exercice 4
On place trois points A, B et P sur un cercle Γ. On note Q le projeté orthogonal de P sur (AB), S le projeté de P sur la tangente au cercle passant par A et R le projeté de P sur la tangente au cercle passant par B. Montrer que $PQ^2 = PR \times PS$.

Solution de l'exercice 4
Les angles $\widehat{PSA}$, $\widehat{PQA}$ et $\widehat{PRB}$ étant droits, les quadrilatères $SAQP$ et $PQBR$ sont cocycliques. Ainsi, on a $\widehat{SQP} = \widehat{SAP} = \widehat{ABP} = \widehat{QBP} = \widehat{QRP}$ et $\widehat{PQR} = \widehat{PBR} = \widehat{PAB} = \widehat{PAQ} = \widehat{PSQ}$.



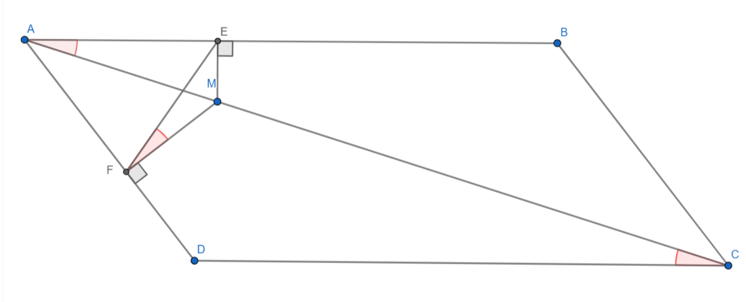
On a donc $SQP \sim QRP$, ce qui donne l'égalité $\frac{PS}{PQ} = \frac{PQ}{PR}$ et on obtient l'égalité recherchée.

On peut aussi conclure en utilisant le fait que $PSA \sim PQB$ et $PAQ \sim PBR$.

Remarque 3.
PQ est le moyenne géométrique de PR et de PS

Exercice 5
Soit $ABCD$ un parallélogramme. On considère un point M sur sa diagonale AC. On note E le projeté orthogonal de M sur $[AB]$ et F le projeté orthogonal de M sur $[AD]$. Montrer que $ME \times CD = BC \times MF$.

Indication : $BC = AD$
Solution de l'exercice 5
Pour montrer l'égalité, il suffit de montrer que $MFE \sim DCA$.



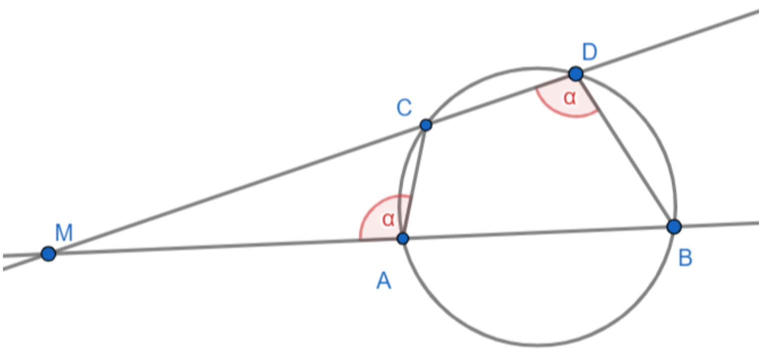
Par construction, on a $\widehat{AEM} = \widehat{AFM} = 90$, ce qui donne $AEMF$ cocyclique. Ainsi, on obtient l'égalité $\widehat{EFM} = \widehat{EAM}$. Or, on se trouve dans un parallélogramme. On a donc $\widehat{BAC} = \widehat{ACD}$, d'où $\widehat{EFM} = \widehat{ACD}$.
De même, $\widehat{FEM} = \widehat{DAC}$, ce qui montre que $MFE \sim DCA$.

Définition 4.
Soit M un point et Γ un cercle de centre O et de rayon R. On définit la puissance du point M par rapport au cercle Γ comme étant la quantité $\mathcal{P}(M) = OM^2 - R^2$

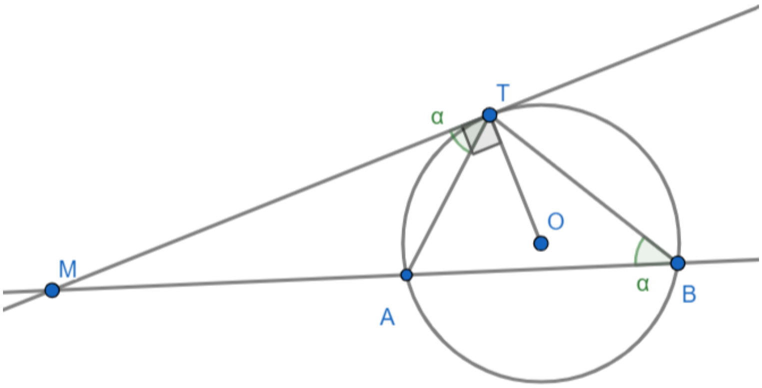
Exercice 6
On considère deux droites passant par M qui intersectent Γ respectivement en A et B et en C et D. Montrer que $MA \times MB = MC \times MD = \mathcal{P}(M)$.

Indication : montrer deux égalité "simples".

Solution de l'exercice 6
Commençons par montrer l'égalité $MA \times MB = MC \times MD$. Dans le cas général, on a la figure suivante.



Le quadrilatère $ABDC$ étant cocyclique, on a l'égalité $\widehat{MAC} = 180 - \widehat{CAB} = \widehat{CDB} = \widehat{MDB}$. Les triangles MAC et MDB sont donc semblables. Anisi, $\frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MB}$, d'où $MA \times MB = MC \times MD = cst$.
Cette égalité subsiste dans le cas où l'une des deux droites (par exemple (CD)) est tangente au cercle : on a alors C et D confondus en un point que l'on peut nommer T.



En utilisant Pythagore dans le traingle MTO, on obtient

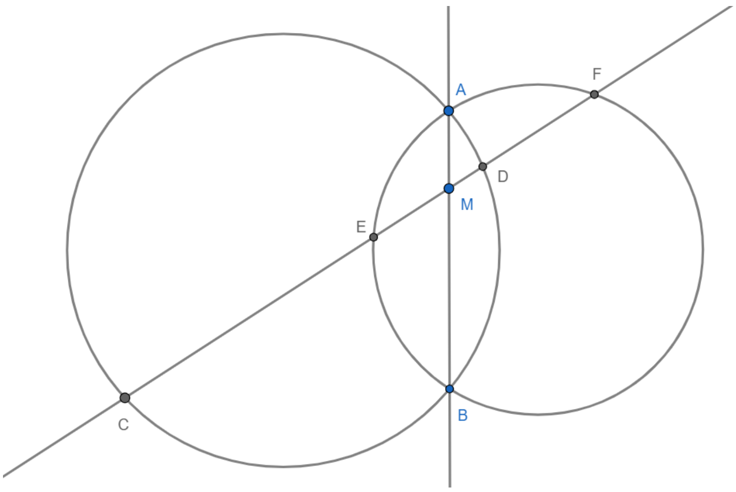
$$MA \times MB = MT \times MT = MO^2 - OT^2 = \mathcal{P}(M)$$

ce qui conclut la démonstration.
On peut aussi obtenir de cette manière une nouvelle démonstration du théorème de Pythagore en considérant la configuration précédent dans le cas où M, A, O et B sont alignés. On alors $MT^2 = \mathcal{P}(M) = MA \times MB = (OM - R)(OM + R) = MO^2 - OT^2$.

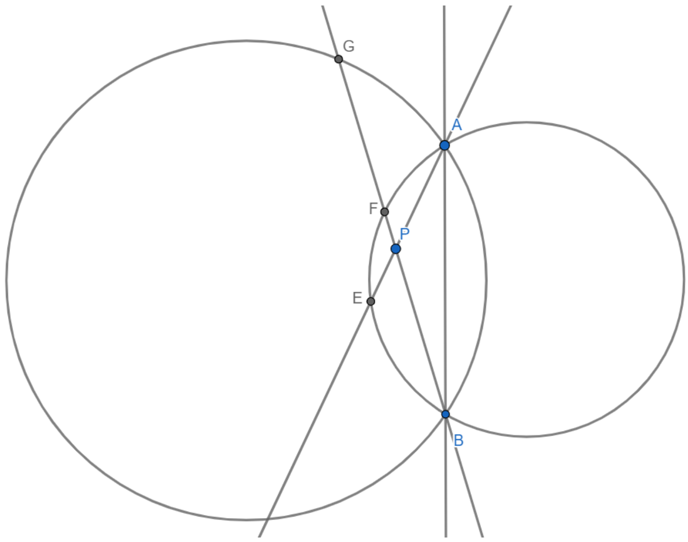
Exercice 7 (Axe radical)
Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles s'intersectant en deux points A et B. Montrer que l'ensemble des points possédant la même puissance par rapport aux deux cercles forme une droite, que l'on nomme axe radical.

Remarque 5.
Une telle définition s'étend naturellement au cas de deux cercles qui ne s'intersectent pas, ne sont ni concentriques ni réduits à des points.

Solution de l'exercice 7
Commençons par montrer que tous les points de la droite (AB) ont même puissance par rapport aux deux cercles.



Pour Γ_1, on a $\mathcal{P}(M)_1 = MA \times MB = MC \times MD$, et pour Γ_2, on a $\mathcal{P}(M)_2 = MA \times MB = ME \times MF$. les puissances de M par rapport aux deux cercles sont bien égales.
Soit P un point quelconque hors de la droite (AB). Sans perte de généralité, on suppose P à gauche de (AB).



D'une part, on a $\mathcal{P}(M)_1 = PB \times PG$ et d'autre part, on a $\mathcal{P}(M)_2 = PA \times PE$. Or, $APB \sim FPE$, ce qui donne $\mathcal{P}(M)_2 = PA \times PE = PB \times PF$. Sachant que $PG \neq PF$, $\mathcal{P}(M)_1 \neq \mathcal{P}(M)_2$.

4 Principe du maximum et optimisation (Hannah)

Principe de l'extremum

Les deux principes de l'extremum sont les suivants :

Théorème 1.
Dans un ensemble fini de nombres réels, il y a un plus petit et un plus grand.

Théorème 2.
Dans un ensemble de nombres naturels, il y a un plus petit.

Ces deux résultats permettent de nombreux raisonnements par l'absurde, dans des problèmes d'arithmétique ou de combinatoire principalement. Pour les utiliser, on peut considérer le plus petit/grand objet d'un ensemble et aboutir au fait qu'il n'est pas le plus petit/grand, ce qui est une contradicicition.

Exemple 3.
Lors d'un bal, aucun garçon n'a dansé avec toutes les filles mais chaque fille a dansé avec au moins un garçon. Montrer que l'on peut trouver deux garçons g et g' et deux filles f et f' tels que g a dansé avec f mais pas f' et g' a dansé avec f' mais pas f.
Solution : Considérons le garçon g qui a dansé avec le plus de filles, f' une fille avec laquelle il n'a pas dansé et g' un garçon avec lequel f' a dansé. Si on ne peut trouver les quatre personnes désirées par l'énoncé, alors pour toute fille f ayant dansé avec g, f doit également avoir dansé avec g'. Mais alors, g' a dansé avec au moins une fille de plus que g, ce qui contredit la maximalité de g. Absurde.

Exercice 1
On considère tous les points du plan à coordonnées entières. A chaque point, on associe un entier strictement positif tel que chaque nombre est la moyenne arithmétique de ses quatre voisins. Montrer que tous les nombres sont égaux.

Exercice 2
On considère un ensemble de points du plan, tel que chaque point est le milieu de deux autres points de l'ensemble. Montrer qu'il y a un nombre infini de points.

Exercice 3
2n + 1 nombres sont tels que la somme de n + 1 d'entre eux est toujours plus grande que la 64 somme des n autres, quels que soient les n + 1 nombres choisis. Monter que tous les nombres sont positifs.

Exercice 4
Les nombres réels $x_1, ..., x_{2011}$ satisfont

$$x_1 + x_2 = 2x'_1,\ x_2 + x_3 = 2x'_2,\ ...,\ x_2 011 + x_1 = 2x'_{2011}$$

où $x'_1, ..., x'_{2011}$ est une permutation de $x_1, ..., x_{2011}$. Montrer que $x_1 = x_2 = ... = x_{2011}$.

Solution de l'exercice 1
Les valeurs étant des entiers positifs ou nuls, on peut considérer m, la plus petite de ces valeurs. On se place en un point ayant cette valeur. Notons a, b, c, d les valeurs de ses quatre voisins. Par hypothèse, on a $m = (a + b + c + d)/4$ et m est inférieur ou égal à chacune des quatre valeurs a, b, c, d puisqu'il est minimal. Si m est strictement inférieur à l'une des quatre valeurs (spdg a), on a

$$m = \frac{a+b+c+d}{4} > \frac{m+b+c+d}{4} \geqslant \frac{m+m+m+m}{4} = m$$

et donc $m > m$ ce qui est absurde. On a donc nécessairement $m = a = b = c = d$, et on peut appliquer le raisonnement qu'on vient de faire à chacun des quatre voisins. On peut procéder ainsi de proche en proche, par récurrence sur la distance de Rome au point de départ, et aboutir à la conclusion.

Solution de l'exercice 2
Supposons par l'absurde qu'il n'y en ait qu'un nombre fini. On peut se placer dans un repère orthonormé tel que deux points soient toujours d'abscisses différentes (puisque n points déterminent $n(n-1)/2$ directions et qu'il suffit de ne pas prendre une de celles-ci). Mais alors, le point d'abscisse maximale ne peut être le milieu de deux autres. C'est une contradiction. On aurait également pu utiliser deux points A et B tels que la distance AB soit la plus grande possible.

Solution de l'exercice 3
Notons ces nombres a_1, ...,a_{2n+1} avec $a_1 \leqslant a_2 ... \leqslant a_{2n+1}$. On a alors

$$a_1 + ... + a_{n+1} \geqslant a_{n+2} + ... + a_{2n+1}$$

$$a_1 \geqslant a_{n+2} + ... + a_{2n+1} - a_2 - ... - a_{n+1}$$

$$a_1 \geqslant (a_{n+2} - a_2) + ... + (a_{2n+1} - a_{n+1})$$

Ce qui conclut puisque chaque parenthèse est positive.

Solution de l'exercice 4
Remarquons que si l'on choisit $n < 2011$ équations, le nombre de x_i impliqués au membre de gauche dans ces équations est $> n$. Soit M le maximum des x_i et n le nombre de x_i égaux à M. Supposons $n < 2011$. Si l'on choisit les n équations du type $x_k + x_{k+1} = M$, on peut déduire $x_k = x_{k+1} = 2M$ dans chaque équation, donc on déduit que le nombre de x_i égaux à M est strictement supérieur à n, contradiction. Donc $n = 2011$: tous les nombres sont égaux au maximum.

Optimisation

Dans cette partie nous traiterons des problèmes d'optimisation "Trouver le plus grand/petit n tel que ...". Ils se résolvent en deux parties :

— L'analyse : On montre que $n \leqslant 3$ ou respectivement $n \geqslant 3$.

— La construction : On trouve une construction tel que $n = 3$

Ces deux étapes sont nécessaires, elles se complètent.

Exemple 4.
Un groupe de n amis prend r photos distinctes (deux photos n'ont pas exactement les mêmes personnes) qui contiennent au moins une photo. Trouver le plus grand r tel que chaque personne apparaisse au plus une fois.
Solution : Analyse : On montre que $r \leqslant n$. Par l'absurde, si $r > n$. On peut utiliser le principe des tiroirs, les photos sont les chausettes et les personnes sont les tiroirs. Une chausette-photo va dans le tiroir d'une personne qui apparait dans sa photo. Ainsi, une personne apparaitra sur au moins deux photos. Absurde !
Construction : Pour $r = n$ on prend une photo par personne. $r = n$ est donc le maximum recherché.

Exercice 5
Un groupe de n amis prend r photos distinctes (deux photos n'ont pas exactement les mêmes personnes) qui contiennent au moins une photo. Trouver le plus grand r tel que pour chaque paire de photo on trouve au moins une personne qui apparait sur les deux.

Exercice 6
Alice désire colorier les entiers entre 2 et 31 (inclus) en utilisant k couleurs. Elle souhaite que, si m et n sont des entiers entre 2 et 31 tels que m est un multiple de n et $m \neq n$, alors m et n sont de couleurs différentes. Déterminer le plus petit entier k pour lequel Alice peut colorier les entiers $2, 3, \ldots, 31$ en utilisant k couleurs.

Exercice 7 (Novembre-2020-POFM)
Une grille de dimensions 2020 est divisée en 400 cases unité de dimensions 11. Clara colorie chaque case en blanc ou en noir, puis Isabelle découpe la grille en rectangles dont les côtés sont contenus dans la grille. Chacun de ces rectangles doit contenir au plus 2 cases noires, et elle donne un chocolat à Clara à chaque fois qu'elle découpe un rectangle qui contient 0 ou 1

case noire.
Isabelle choisit son découpage de manière à donner le moins de chocolats possibles à Clara, et Clara choisit son coloriage initial de manière à obtenir le plus de chocolats possibles d'Isabelle. Combien de chocolats Isabelle donnera-t-elle à Clara ?

Solution de l'exercice 5
Analyse : On montre que $r \leqslant 2^{n-1}$. Pour chaque photo prise, on ne peut pas prendre sa complémentaire (la photo avec toutes les personnes qui ne sont pas sur la photo que l'on prend) car il n'y aura aucune personne en commun entre les deux photos. Au total, il y a 2^n photos possibles avec n personnes. Donc on peut prendre au maximum $2^n/2 = 2^{n-1}$ photos.
Construction : On peut garder une personne sur toutes les photos et choisir si les $n-1$ autres sont sur la photo. Ceci nous donne bien 2^{n-1} photos.

Solution de l'exercice 6
Analyse : On montre que $k \geqslant 4$. Pn considère les nombres 2, 4, 8 et 16. 2 divise les 3 autres donc 2 n'est de la couleur d'aucun des autres. De même, 4 divise 8 et 16 il n'a donc la couleur d'aucun des autres. Et 8 divise 16 ils ont donc chacun une couleur différente. On a bien $k \geqslant 4$.
Construction : On colorie les nombres de 2 à 3 en rouge, de 4 à 7 en bleu, de 8 à 15 en vert et de 16 à 31 en jaune. On peut vérifier que la construction marche (C'est par ce que pour m divise n et $m \neq n$, on a que $n \geqslant 2m$.)

Solution de l'exercice 7
Nous allons démontrer pour tout entier $n > 3$ que, si Clara et Isabelle jouent sur une grille de dimensions $n \times n$, Isabelle donnera n chocolats à Clara.
Analyse : Tout d'abord, pour limiter le nombre de chocolats qu'elle donnera à Clara, Isabelle peut procéder comme suit. Elle commence par découper le rectangle en n lignes, et s'apprête à subdiviser chaque ligne en rectangles. Pour ce faire, elle numérote les cases noires de la ligne de gauche à droite, puis elle donne un coup de ciseaux juste à droite de chacune des cases noires $n°2, 4, 6, \ldots$ Ce faisant, tous les rectangles obtenus, sauf éventuellement le dernier, comptent deux cases noires. Ainsi, Isabelle donne au plus n chocolats à Clara.
Construction : Réciproquement, supposons que Clara colorie sa grille $n \times n$ avec le coloriage suivant, où nous avons distingué avec deux niveaux de gris les cases que Clara colorie en noir, et où k et l sont deux entiers naturels non nuls de somme $k + l = n - 1$.

$$PHOTO$$

Si un rectangle contient exactement deux cases noires, il s'agit de cases adjacentes : une gris foncé et une gris clair. Or, il y a $(k+1)(l+1)$ cases gris foncé et kl cases gris clair. Isabelle dessine donc au plus k rectangles recouvrant exactement deux cases noires, et ces rectangles laissent de côté $k + l + 1 = n$ cases gris foncé. Cela force donc Isabelle à donner au moins $n = 20$ chocolats à Clara.

5 Invariants (Xavier)

Invariants et coloriages

Dans un problème combinatoire, il arrive souvent que certaines quantités soient préservées au cours du temps, on parle alors d'invariant. Identifier ces quantités peut alors permettre de démontrer qu'une configuration donnée ne peut pas être atteinte à partir d'une certaine configuration initiale. Pour prendre un exemple simple, le fou aux échecs est à la fin de son déplacement sur une case de la même couleur qu'au début ; par conséquent, s'il commence sur une case blanche, il ne pourra jamais se retrouver sur une case noire. Il est important de noter que les invariants permettent de montrer une impossibilité ; pour démontrer qu'une configuration donnée est accessible, il faut en général construire explicitement un chemin.

Exercice 1
On considère un échiquier de dimension 8×8, et des dominos de taille 2×1 (que l'on peut tourner si on veut, mais qui ne peuvent pas se chevaucher).

1. On enlève l'un des coins de l'échiquier. Peut-on le recouvrir entièrement par les dominos ?
2. Même question si on enlève deux coins opposés.

Solution de l'exercice 1

1. Il reste alors 63 cases à couvrir, soit un nombre impair. Lorsqu'on pose un domino, il diminue de deux le nombre de cases à couvrir, et ne change donc pas la parité de celui-ci. Par conséquent, il restera toujours un nombre impair de cases à couvrir.

   Si on parvenait à recouvrir toutes les cases de l'échiquier, il resterait 0 case à couvrir, soit un nombre pair. Ce n'est donc pas possible !
2. On colorie l'échiquier de la façon habituelle. Les deux cases enlevées sont alors de la même couleur, disons blanches. Il reste alors 30 cases blanches et 32 cases noires. Chaque domino recouvre une case de chaque couleur. Par conséquent, il y aura toujours autant de cases blanches couvertes que de cases noires couvertes, et donc on ne peut pas recouvrir tout l'échiquier.

En général, beaucoup d'invariants utilisent des arguments de parité, ou un coloriage où deux couleurs alternent.

Exercice 2
Les entiers de 1 à 2022 sont écrits au tableau. À chaque étape, on en choisit deux, qu'on efface et remplace par leur différence. Peut-on obtenir 0 à la fin ? Et si on avait écrit les entiers de 1 à 2023 ?

Solution de l'exercice 2
On considère S la somme de tous les entiers figurant au tableau. Si on efface les deux nombres a et b, avec $a \leqslant b$, S va être remplacé par $S - (a+b) + (b-a) = S - 2a$, qui est de la même parité que S. Ainsi, la parité de S ne change pas. Or, au départ, S vaut $1 + 2 + \ldots + 2022 = \frac{2022 \times 2023}{2} = 1011 \times 2023$ qui est impair. Donc on ne peut pas obtenir 0 à la fin.

Si on avait écrit les entiers de 1 à 2023, on aurait eu pour somme $\frac{2023 \times 2024}{2} = 2023 \times 1012$ qui est pair. Mais cela ne prouve pas qu'on peut bien obtenir 0 à la fin ! Pour le démontrer, on fait la construction suivante : on commence par effacer 2 et 3 pour écrire 1, puis on efface les deux 1 pour écrire 0. Ensuite, pour tous les k allant de 1 à 505, on efface $4k$ et $4k+1$ pour écrire 1, et on efface également $4k+2$ et $4k+3$ pour écrire 1, puis on efface les deux 1 pour écrire 0. Il n'y a plus que des 0 au tableau, et on les efface les uns après les autres, ce qui donne le résultat voulu.

Exercice 3
Six enfants sont assis autour d'une table ronde. Au départ, deux d'entre eux, séparés par un enfant, ont chacun un bonbon, et les autres n'en ont pas. Chaque jour, deux enfants assis côte à côte reçoivent un bonbon chacun. Est-il possible que, au bout d'un certain temps, tous les enfants aient le même nombre de bonbons ?

Solution de l'exercice 3
On attribue à chacun des enfants une couleur, en alternant (on peut car il y en a un nombre pair). Mettons que, au départ, les deux enfants ayant des bonbons soient rouges. À chaque étape, on donne un bonbon à un enfant rouge et un à un enfant bleu. Par conséquent, on donne autant de bonbons aux enfants rouges qu'aux bleus, et donc la quantité (nombre de bonbons des enfants rouges) moins (nombre de bonbons des enfants bleus) est constante, et est donc toujours égale à 2. Mais alors il n'est pas possible que tous les enfants aient le même nombre de bonbons, puisque la différence serait nulle.

Exercice 4
34 caméléons vivent sur une île. Au début, il y en a 7 jaunes, 10 rouges et 17 verts. Quand deux caméléons de couleurs différentes se rencontrent, ils adoptent simultanément la troisième couleur. Un jour, Darwin arrive sur l'île et observe que tous les caméléons sont de la même couleur. Quelle est cette couleur ?

Solution de l'exercice 4
On commence par trouver quelle couleur fonctionne. Si un caméléon rouge et un vert se rencontrent, il y a 9 rouges, 9 jaunes et 16 verts. Puis on fait se rencontrer les 9 rouges avec les 9 jaunes, et il n'y a plus que des verts (34, pour être précis).

Montrons maintenant qu'il n'y en a pas d'autre. En manipulant un peu, on voit que $R - J$ (R et J étant respectivement le nombre de caméléons rouges et jaunes) peut soit rester constant, soit augmenter ou diminuer de 3. Dans tous les cas, la classe modulo 3 ne change pas. Au départ, $R - J = 3$ est nul modulo 3. S'il n'y avait que des caméléons rouges, on aurait $R - J = 34$, non nul modulo 3, ce qui est impossible. De même, s'il n'y avait que des caméléons jaunes, on aurait $R - J = -34$ qui n'est pas non plus nul modulo 3, et c'est donc impossible aussi.

Dans le cas d'un jeu, les invariants sont à la base des stratégies de "maintien d'invariant".

Exercice 5
2022 bâtons sont posés au sol. Chacun à leur tour, en commençant par Alice, elle et Bob enlèvent entre 1 et 3 bâtons. Le gagnant est celui qui prend le dernier bâton. Qui dispose d'une stratégie gagnante ?

Solution de l'exercice 5
Alice va adopter la stratégie "avoir un nombre de bâtons restants multiples de 4 après avoir joué". Elle peut le faire au départ, et, après chaque coup de Bob, elle peut se ramener à cette situation en enlevant $4-b$, où b est le nombre de bâtons enlevés par Bob ($4-b$ est bien compris entre 1 et 3). Si Alice maintient cet invariant, Bob ne peut jamais avoir un nombre de bâtons restants multiples de 4 après avoir joué, et en particulier ne peut pas en avoir 0. Ainsi, Alice va gagner.

Exercice 6

1. Peut-on paver un échiquier 8×8 avec des triominos 3×1 ?
2. Et si on enlève l'un des coins ?

Solution de l'exercice 6

1. La zone pavée par les triominos a un nombre de cases multiple de 3, or l'échiquier n'a pas un nombre de cases multiple de 3. Ce n'est donc pas possible.
2. On colorie l'échiquier en 3 couleurs de sorte que chaque triomino recouvre une case de chaque couleur et qu'il n'y ait pas le même nombre de cases de chaque couleur (on peut le faire). On en déduit que ce n'est toujours pas possible.

Exercice 7
Sur un tableau 15×15, on trace une ligne fermée ne s'intersectant pas elle-même en reliant les centres de cases adjacentes (par un côté). On suppose que la ligne est symétrique par rapport à l'une des deux grandes diagonales. Montrer qu'elle est de longueur inférieure ou égale à 200.

Solution de l'exercice 7
Considérons un point d'intersection A de la ligne avec l'axe de symétrie (qui existe forcément, car si la ligne passe par une case d'un côté, elle doit aussi passer par la case symétrique, et elle doit donc relier ces deux cases, ce qui implique qu'elle croise la diagonale). On suit la ligne dans un sens jusqu'à atteindre à nouveau la diagonale. Par le même argument que précédemment, on va l'atteindre en un point B distinct de A. De plus, en suivant la ligne dans l'autre sens en partant de A, on aurait fait le chemin symétrique et on serait donc aussi arrivé en B. Par conséquent, A et B sont les deux seuls points d'intersection de la ligne avec la diagonale. En particulier, la ligne ne passe pas par 13 des cases de la diagonale.

On colorie maintenant le tableau en damier. Quand on parcourt la ligne, on alterne les cases blanches et les cases noires. La ligne passe donc par autant de cases blanches que de cases noires. Or toutes les cases de la diagonale sont de la même couleur, disons noires. Il y a 113 cases noires et 112 cases blanches. Donc la ligne passe par au plus 100 cases noires, puis par au plus 100 cases blanches, soit par au plus 200 cases en tout.

Exercice 8
On écrit au tableau les nombres $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}$. À chaque étape, on choisit deux nombres a et b écrits au tableau, on les efface et on écrit à la place $a+b+ab$. Quel peut être le dernier nombre qui figure au tableau ?

Solution de l'exercice 8
On observe que $1 + a + b + ab = (1 + a)(1 + b)$. Donc le produit des $1 + a$ où a parcourt tous les nombres écrits au tableau est invariant. Au départ, il vaut $\prod_{k=1}^{n}(1 + \frac{1}{k}) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} = n+1$ par télescopage. À la fin, si C est le nombre restant, il vaut $1 + C$. Donc $C = n$.

Exercice 9
Six oiseaux sont en cercle, chacun sur son arbre. Chaque minute, deux oiseaux changent d'arbre et vont sur l'un des deux arbres voisins. Est-il possible que tous les oiseaux se retrouvent à un moment sur le même arbre ?

Solution de l'exercice 9
On colorie chaque arbre en blanc ou noir, en alternant. On remarque qu'après déplacement,

soit il y a toujours le même nobre total d'oiseaux sur les arbres blancs, soit ce nombre a augementé ou diminué de deux. Dans tous les cas, sa parité demeure inchangée. Par conséquent, il y aura toujours un nombre impair d'oiseaux sur les arbres blancs, et donc ni 0, ni 6.

Exercice 10

On considère un tableau 4×4 rempli de 0 et de 1. À chaque étape, on choisit une ligne, une colonne ou une diagonale et on y remplace tous les 0 par des 1, et inversement. Est-il possible, dans chacun des cas suivants, de n'obtenir que des 0 à un moment donné ?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution de l'exercice 10

Pour le premier cas, on observe que la parité du nombre de 1 doit demeurer constante, mais il y a au départ un nombre impair de 1 et il ne peut donc pas y en avoir 0 à la fin.

Pour le deuxième, on observe qu'en fait, si on colorie en noir et blanc comme un damier les tableaux, la parité du nombre de 1 sur des cases blanches doit demeurer constante, mais cette parité est initialement impaire et il y aura donc toujours des 1.

Pour le troisième, si on effectue l'opération sur la colonne de droite, la deuxième ligne et la diagonale qui va d'en bas à gauche vers en haut à droite, on arrive bien à n'obtenir que des 0.

Exercice 11

On considère $2n$ pièces en cercle dont l'un côté est blanc et l'autre noir. Dans l'état initial, elles sont toutes côté blanc sauf une qui est côté noir. Une opération est l'une des deux manipulations suivantes :

— Choisir deux pièces adjacentes de même couleur et les retourner toutes les deux.

— Choisir deux pièces espacées d'une pièce, et de couleur différente, et les retourner toutes les deux.

Est-il possible d'arriver, après un certain nombre de ces opérations, à la configuration où les pièces sont toutes du côté opposé à leur côté initial ?

Solution de l'exercice 11

On considère l'invariant suivant : $S = c_1 - c_2 + c_3 - \ldots - c_{2n}$, où c_i vaut 1 si la i-ième pièce est blanche et -1 si elle est noire. Quitte à déplacer l'origine, on peut supposer que la pièce noire est la pièce $2n$.

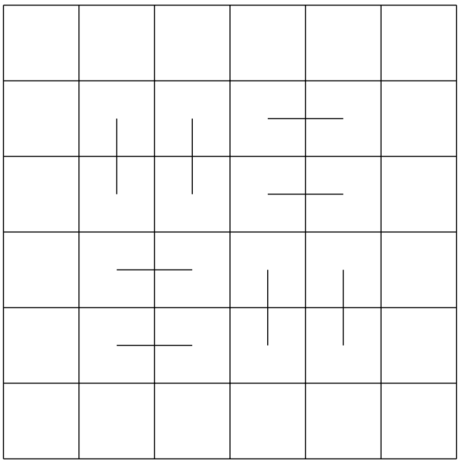
C'est bien un invariant, comme on le vérifie aisément. Au départ, on a $S = 2$. Si toutes les pièces se retrouvaient du côté opposé au côté initial, on aurait $S = -2$. Par conséquent, on ne peut pas se retrouver dans cette position.

Exercice 12

On considère une grille infinie. Alice et Bob placent un pion chacun à leur tour, blanc pour Alice, noir pour Bob. Alice gagne si elle parvient à aligner cinq pions blancs, et Bob gagne si Alice ne parvient jamais à les aligner. Qui possède une stratégie gagnante ?

Solution de l'exercice 12

Il s'agit de trouver une façon d'associer les cases deux à deux, de sorte que si Alice joue sur l'une, Bob joue sur l'autre. Ainsi, Bob gagne.



6 TD de Géométrie (Baptiste et Martin)

L'objectif du TD est de revoir les techniques vues dans le premiers cours, à savoir la chasse aux angles et plus particulièrement le théorème de l'angle tangent. On en a profité pour donner quelques stratégies pour approcher certains énoncés, notamment pour montrer la concourance de trois objets.

Exercices

Exercice 1
(Théorème de Miquel) Soit ABC un triangle. Soient P, Q et R des points appartenant respectivement aux segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Montrer que les cercles circonscrits aux triangles AQR, PRB et CQP sont concourants en un point.

Exercice 2
On note ABC un triangle. Montrer que les hauteurs du triangle s'intersectent en un point que l'on appelle *l'orthocentre*.

Exercice 3
Soit k un cercle de centre O et soit A, B et C trois points sur le cercle k tels que $\widehat{ABC} > 90$. La bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$ recoupe le cercle circonscrit au triangle BOC en un point D. Montrer que D appartient à la droite (AC).

Exercice 4
Deux cercles ω_1 et ω_2 se coupent en deux points distincts A et C. Soit B le second point d'intersection de ω_1 avec la tangente à ω_2 en le point A. Soit D le deuxieme point d'intersection du cercle ω_2 avec la tangente au cercle ω_1 en le point C. Montrer que les droites (AD) et (BC) sont parallèles.

Exercice 5
Soit ABC un triangle avec $AB < AC$, Γ son cercle circonscrit. La tangente au cercle γ en le point A coupe la droite (BC) en le point P. La bissectrice de l'angle $\widehat{APB}$ coupe la droite

(AB) en le point R et la droite (AC) en le point S. Montrer que le triangle ARS est isocèle en A.

Exercice 6
Soit ω_1 et ω_2 deux cercles tels que le cercle ω_1 est tangent intérieurement au cercle ω_2 en le point A. Soit P un point du cercle ω_2. Les tangentes au cercle ω_1 issues du point P sont tangentes au cercle ω_1 en deux points X et Y et coupent le cercle ω_2 en deux points Q et R. Montrer que $\widehat{QAR} = 2\widehat{XAY}$.

Exercice 7
Soient Γ et Γ' deux cercles tangents en A, Γ' étant à l'intérieur de Γ. Soit D un point du cercle Γ' autre que A, on note M et N les points d'intersection de la tangente au cercle Γ' en D avec le cercle Γ. Montrer que : $\widehat{NAD} = \widehat{MAD}$.

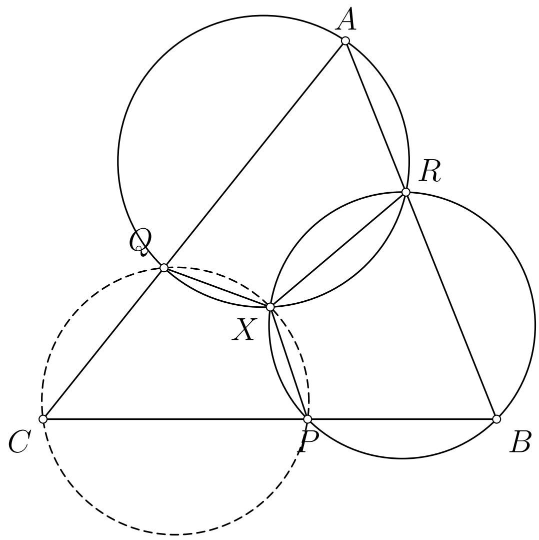
Exercice 8
Soit ABC un triangle et P un point sur le cercle circonscrit au triangle ABC. Soient X, Y et Z les projetés orthogonaux du point P respectivement sur les droites $(AB), (BC)$ et (CA). Montrer que les points X, Y et Z sont alignés.

Exercice 9
(Envoi géométrie 2020/2021 exo 4) Soit ABC un triangle et soit Ω son cercle circonscrit. Soit P un point sur la tangente en A au cercle Ω. On note E et D les projections orthogonales de P sur les côtés AC et AB. Montrer que la droite (ED) est perpendiculaire à la droite (BC).

Solutions

Exercice 1
(Théorème de Miquel) Soit ABC un triangle. Soient P, Q et R des points appartenant respectivement aux segments $[BC], [CA]$ et $[AB]$. Montrer que les cercles circonscrits aux triangles AQR, PRB et CQP sont concourants en un point.

Solution de l'exercice 1



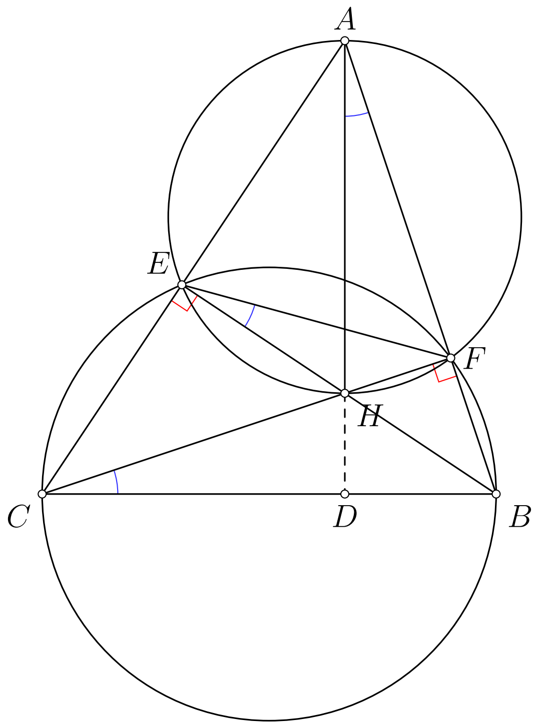
On appelle X le second point d'intersection des cercles circonscirts aux triangles AQR et BRP. Il s'agit de montrer que le point X appartient au cercle circonscrit du triangle CPQ. Or :

$$\widehat{QXP} = 360° - \widehat{PXR} - \widehat{RXQ} = (180° - \widehat{PXR}) + (180° - \widehat{QXR}) = \widehat{PBR} + \widehat{QAR} = 180° - \widehat{PCQ}$$

ce qui montre bien que les points Q, X, P et C sont cocycliques.

Exercice 2
On note ABC un triangle. Montrer que les hauteurs du triangle s'intersectent en un point que l'on appelle *l'orthocentre*.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u>



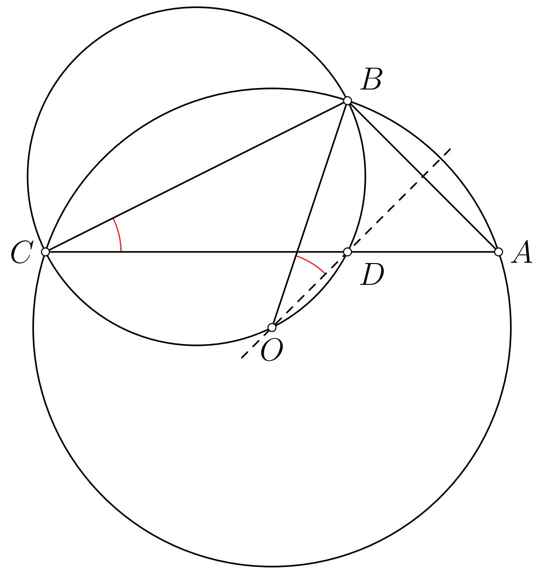
Soit E et F les pieds des hauteurs issues de B et C, on note H l'intersection des droites (BE) et (CF). On va montrer que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires

Pour cela on va noter D l'intersection des droites (AH) et (BC). On sait que $\widehat{BAD}+\widehat{ABD}+\widehat{BDA} = 180°$, il suffit donc de montrer que $\widehat{BAD} + \widehat{ABD}$. Cependant, $\widehat{BAD} = \widehat{FAH} = \widehat{FEH}$ comme $AEFH$ est cyclique. De plus, $\widehat{FEB} = \widehat{FCB} = 180° - \widehat{FBC} - \widehat{BFC} = 90° - \widehat{FBC}$, ce qui conclut.

Exercice 3

Soit k un cercle de centre O et soit A, B et C trois points sur le cercle k tels que $\widehat{ABC} > 90°$. La bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$ recoupe le cercle circonscrit au triangle BOC en un point D. Montrer que D appartient à la droite (AC).

Solution de l'exercice 3



Il suffit de montrer que $\widehat{DCB} = \widehat{ACB}$.
Or

$$\widehat{DCB} = \widehat{DOB} = \frac{1}{2}\widehat{BOA} = \widehat{ACB}$$

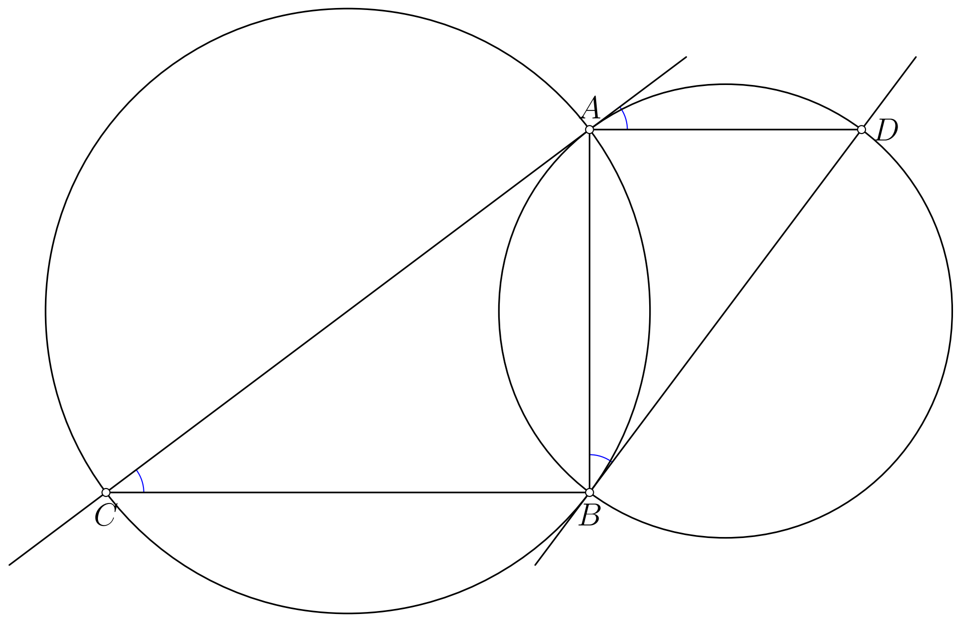
par théorème de l'angle au centre.

Exercice 4

Deux cercles ω_1 et ω_2 se coupent en deux points distincts A et C. Soit B le second point d'intersection de ω_1 avec la tangente à ω_2 en le point A. Soit D le deuxieme point d'intersection du cercle ω_2 avec la tangente au cercle ω_1 en le point C. Montrer que les droites (AD) et (BC) sont parallèles.

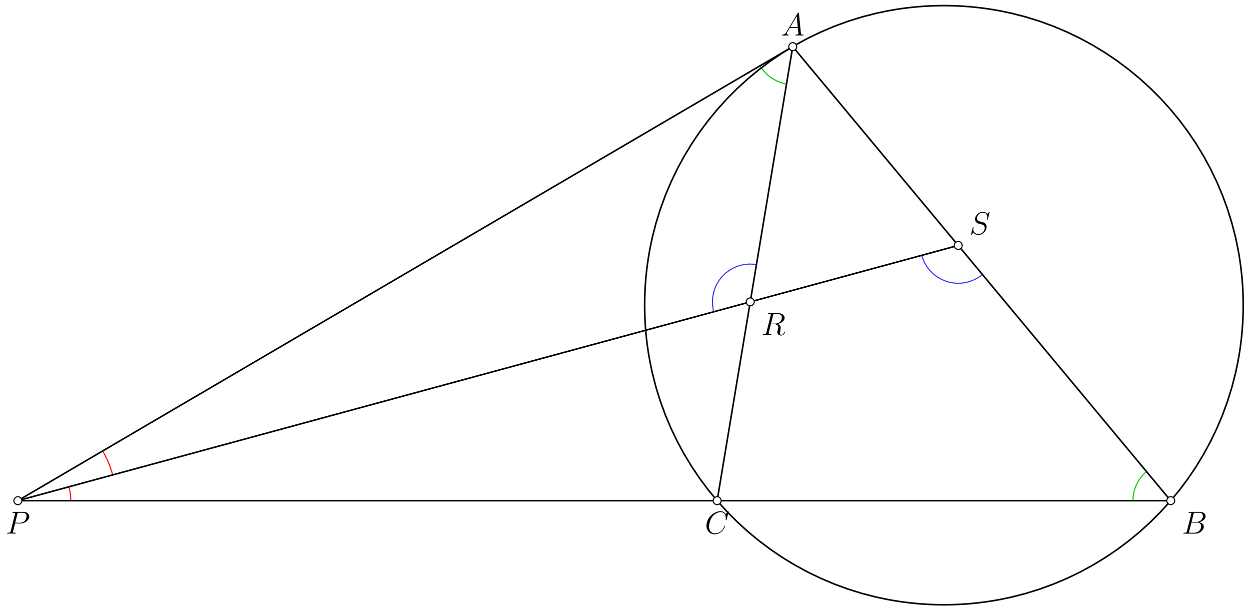
<u>*Solution de l'exercice 4*</u>

En utilisant l'angle tangentiel : $\widehat{CBA} = \widehat{ACD}$ car (CD) est tangente à ω_1. Une deuxième fois avec le fait que (AB) est tangente à ω_2, $\widehat{ACD} = 180° - \widehat{DAB}$. En combinant les deux résultats, $\widehat{CBA} = 180° - \widehat{DAB}$ ce qui donne que les droites (AD) et (BC) sont parallèles.



Exercice 5
Soit ABC un triangle avec $AB < AC$, Γ sont cercle circonscrit. La tangente au cercle γ en le point A coupe la droite (BC) en le point P. La bissectrice de l'angle $\widehat{APB}$ coupe la droite (AB) en le point R et la droite (AC) en le point S. Montrer que le triangle ARS est isocèle en A.

Solution de l'exercice 5



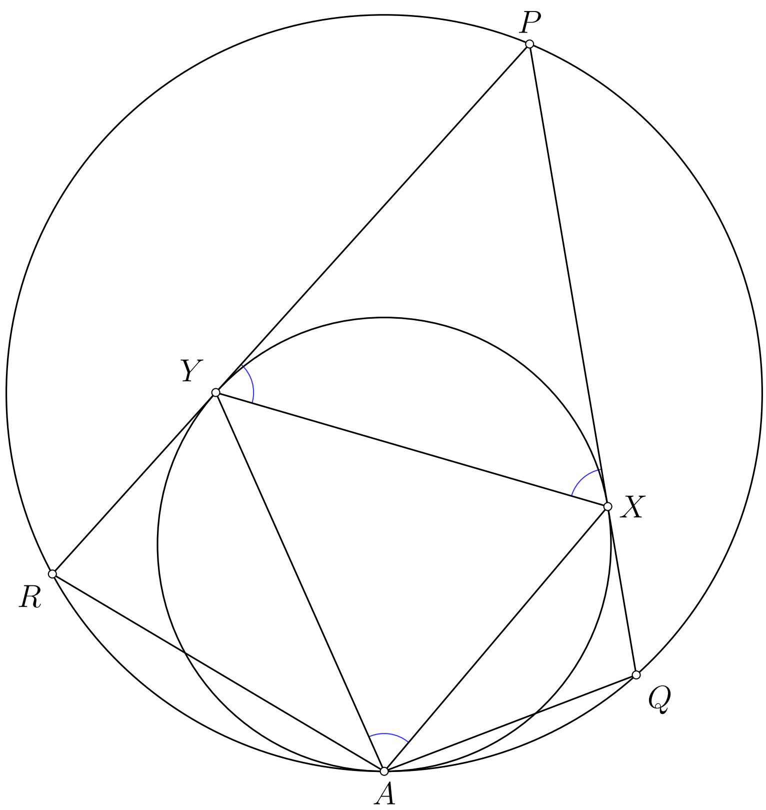
On montre que $\widehat{ARS} = \widehat{ASR}$, ce qui est équivalent à montrer que $180° - \widehat{ARS} = 180° - \widehat{ASR}$ donc que $\widehat{PRA} = \widehat{PSC}$. Or $\widehat{RPA} = \widehat{SPC}$ car la droite (RS) est bissectrice de l'angle $\widehat{APC}$. Aussi, par le théorème de l'angle tangentiel, $\widehat{PAR} = \widehat{BCA} = \widehat{PCS}$. On déduit

$$\widehat{PRA} = 180° - \widehat{PAR} - \widehat{RPA} = 180° - \widehat{SBP} - \widehat{BPS} = \widehat{PSC}$$

donc le triangle ARS est bien isocèle en A.

Exercice 6
Soit ω_1 et ω_2 deux cercles tels que le cercle ω_1 est tangent intérieurement au cercle ω_2 en le point A. Soit P un point du cercle ω_2. Les tangentes au cercle ω_1 issues du point P sont tangentes au cercle ω_1 en deux points X et Y et coupent le cercle ω_2 en deux points Q et R. Montrer que $\widehat{QAR} = 2\widehat{XAY}$.

Solution de l'exercice 6



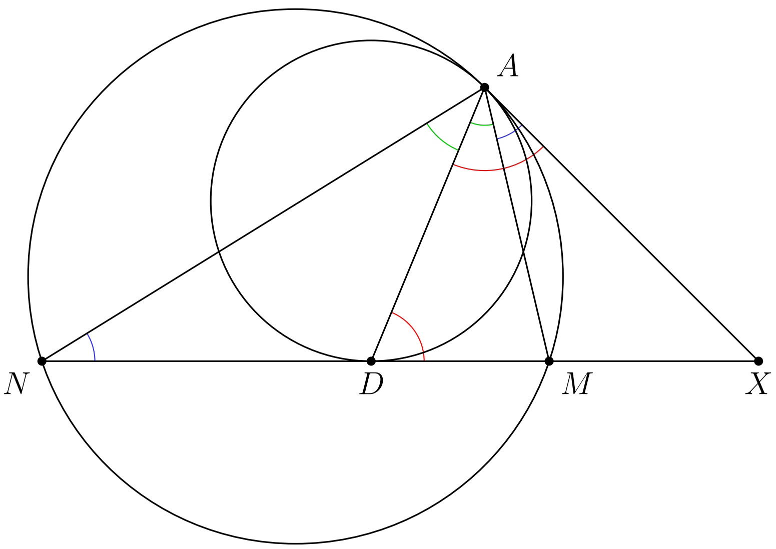
Puisque la droite (PX) est tangente au cercle ω_2 en X, $\widehat{XAY} = \widehat{YXP}$. de même on obtient $\widehat{XAY} = \widehat{XYP}$. La somme des angles du triangle XPY vaut $180°$, donc

$$\widehat{QPR} = \widehat{XPY} = 180° - \widehat{PXY} - \widehat{PYX} = 180° - 2\widehat{XAY}$$

D'autre part, les points P, R, A et Q sont cocycliques donc $\widehat{QPR} = 180° - \widehat{QAR}$. On déduit $\widehat{QAR} = 2\widehat{XAY}$.

Exercice 7
Soient Γ et Γ' deux cercles tangents en A, Γ' étant à l'intérieur de Γ. Soit D un point du cercle Γ' autre que A, on note M et N les points d'intersection de la tangente au cercle Γ' en D avec le cercle Γ. Montrer que : $\widehat{NAD} = \widehat{MAD}$.

Solution de l'exercice 7

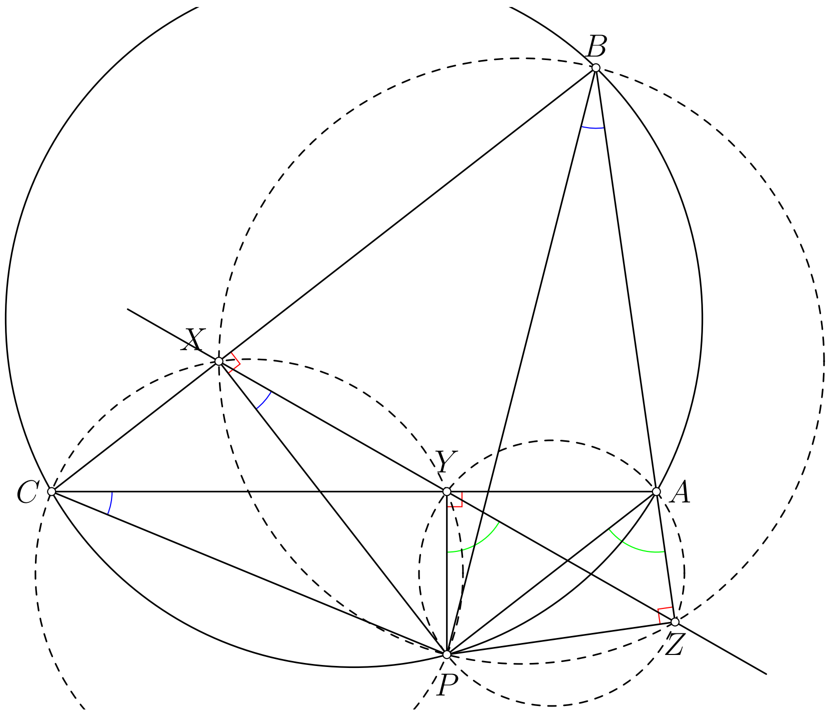


Si la droite (MN) est parallèle à la tangente commune aux cercles Γ et Γ', alors A et D sont alignés avec les centres de Γ et Γ' et M et N sont symétriques par rapport à a droite (AD) donc on a bien l'égalité d'angle voulue.

Sinon, on note X le point d'intersection de la tangente commune aux deux cercles avec la droite (MN) et on suppose quitte à échanger M et N que $XM < XN$. Puisque les tangentes à Γ' en D et A se coupent en X, le triangle AXD est isocèle en X, donc $\widehat{XDA} = \widehat{XAD}$. Puisque la somme des angles du triangle ADN vaut $180°$, on a $\widehat{XDA} = 180° - \widehat{ADN} = \widehat{DAN} + \widehat{DNA}$. Par le théorème de l'angle tangentiel, $\widehat{DNA} = \widehat{MNA} = \widehat{XAM}$, on déduit que $\widehat{DAN} = \widehat{XDA} - \widehat{XAM}$. D'autre part, $\widehat{XAD} = \widehat{XAM} + \widehat{MAD}$ donc $\widehat{MAD} = \widehat{XAD} - \widehat{XAM}$. On retrouve bien, comme $\widehat{XAD} = \widehat{XDA}$, que $\widehat{MAD} = \widehat{NAD}$.

Exercice 8
Soit ABC un triangle et P un point sur le cercle circonscrit au triangle ABC. Soient X, Y et Z les projetés orthogonaux du point P respectivement sur les droites $(AB), (BC)$ et (CA). Montrer que les points X, Y et Z sont alignés.

Solution de l'exercice 8
On va supposer que le point P est sur l'arc BC ne contenant pas A. De telle sorte que la configuration soit comme sur la figure **??**.



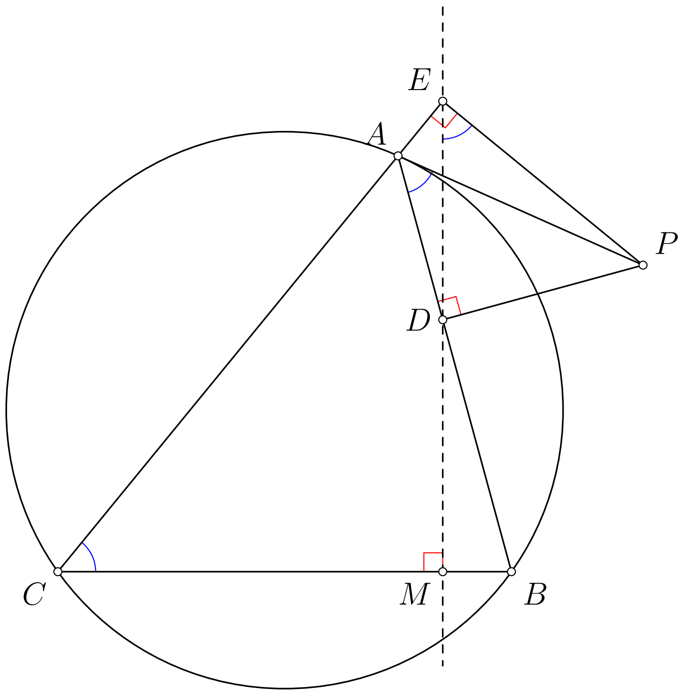
On opère alors la chasse aux angles suivantes, en remarquant que $BZXP$ est cyclique comme $\widehat{BZP} = 90° = \widehat{BXP}$ et que $PZYA$ est cyclique comme $\widehat{AZP} + \widehat{AYP} = 90° + 90° = 180°$.

$$\begin{aligned} \widehat{XZP} &= \widehat{XBP} && \text{(le quadrilatère } BZXP \text{ est cyclique)} \\ &= \widehat{CAP} && \text{(le quadrilatère } ABCP \text{ est cyclique)} \\ &= \widehat{YZP} && \text{(le quadrilatère } PZYA \text{ est cyclique)} \end{aligned}$$

Cela conclut la preuve.

Exercice 9
(Envoi géométrie 2020/2021 exo 4) Soit ABC un triangle et soit Ω son cercle circonscrit. Soit P un point sur la tangente en A au cercle Ω. On note E et D les projections orthogonales de P sur les côtés AC et AB. Montrer que la droite (ED) est perpendiculaire à la droite (BC).

Solution de l'exercice 9



Supposons sans perte de généralité que $AB < AC$.

Tout d'abord, puisque les points D et E sont les projetés orthogonaux du point P sur les droites (AB) et (AC), on a $\widehat{AEP} + \widehat{ADP} = 90° + 90° = 180°$ donc les points E, A, D et P sont cocycliques.

On en déduit que $\widehat{DEP} = \widehat{DAP}$.

Puisque la droite (AP) est tangente au cercle circonscrit au triangle ABC, $\widehat{DAP} = \widehat{BAP} = \widehat{BCA}$.

Si on note M le point d'intersection des droites (BC) et (DE), on trouve

$$\begin{aligned}
\widehat{MEC} &= \widehat{DEA} \\
&= 90° - \widehat{DEP} \\
&= 90° - \widehat{DAP} \\
&= 90° - \widehat{BCA} \\
&= 90° - \widehat{MCE}
\end{aligned}$$

donc $\widehat{CME} = 90°$ est les droites (DE) et (BC) sont perpendiculaires.

4 Entraînement de fin de parcours

Énoncés

Exercice 1
Soit ABC un triangle. La bissectrice de $\widehat{BAC}$ recoupe $[BC]$ en D. La tangente en B au cercle circonscrit à ABD recoupe (AD) en S. Montrer que S appartient au cercle circonscrit à ABC.

Exercice 2
Soit n un entier tel que $1 \leqslant n \leqslant 30$. Ariane et Bérénice jouent au jeu suivant. Tout d'abord, Ariane choisit n nombres, deux à deux distincts, parmi les entiers $1, 2, \ldots, 30$. Ensuite, et au vu des choix d'Ariane, Bérénice choisit un entier $d \geqslant 2$. Bérénice gagne si d divise au moins deux des nombres qu'a choisis Ariane. Sinon, c'est Ariane qui gagne.

Pour quelles valeurs de n Ariane peut-elle s'assurer de gagner ?

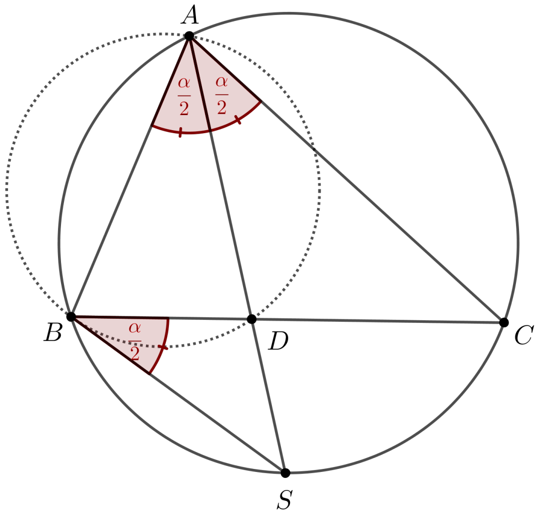
Exercice 3
Soient A, B, C et D quatre points cocycliques (dans cet ordre) sur un cercle de centre O. On suppose que $(AC) \perp (BD)$. Soit I le pied de la hauteur issue de O dans le triangle AOD. Montrer que $OI = \frac{BC}{2}$.

Exercice 4
Soit n et k deux entiers strictement positifs. On considère une grille de taille $n \times n$. On souhaite la recouvrir entièrement de dominos de taille $k \times 1$ (qu'on peut tourner si on le souhaite) sans qu'ils se chevauchent. Montrer que cela est possible si et seulement si k divise n.

Solutions

Solution de l'exercice 1
Exploitons angulairement toutes les informations de la figure. D'après le théorème de l'angle tangent, on a $\widehat{BAD} = \widehat{SBD}$. Par ailleurs, (AS) étant la bissectrice de $\widehat{BAC}$, il vient $\widehat{BAD} = \widehat{SAC}$.

Ainsi, on a $\widehat{SBC} = \widehat{SAC}$. D'après la réciproque du théorème de l'angle inscrit, on en conclut que A, B, C et S sont cocycliques. Autrement dit, S appartient bien au cercle circonscrit à ABC.



Solution de l'exercice 2
Tout d'abord, si $n \leqslant 11$, Ariane s'assure la victoire en choisissant n entiers parmi $1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$. En effet, il s'agit là de l'entier 1 et des 10 nombres premiers inférieurs ou égaux à 30. Par conséquent, les n nombres qu'a choisis Ariane sont deux à deux premiers entre eux, et nul entier $d \geqslant 2$ que choisira Bérénice ne divisera deux des nombres qu'a choisis Ariane.

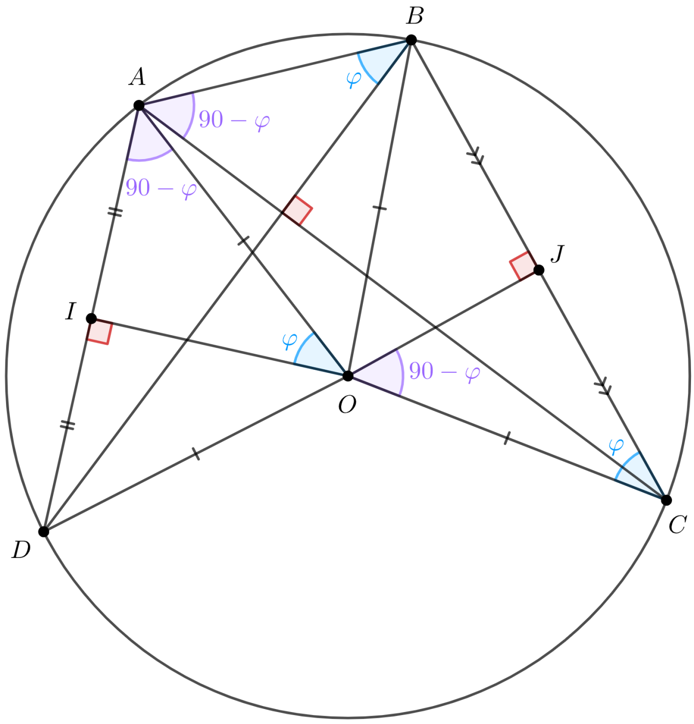
Au contraire, si $n \geqslant 12$, Bérénice peut se débrouiller pour gagner. Pour ce faire, elle regroupe les entiers $1, 2, \ldots, 30$ en 11 tiroirs. Chaque tiroir est associé à un nombre premier $p \leqslant 30$, et contient l'ensemble des entiers $k \leqslant 30$ dont p est le plus petit facteur premier, ou bien à l'entier 1, qui contient uniquement l'entier 1 lui-même. Puisque Bérénice dispose de 11 tiroirs, deux des n nombres qu'a choisis Ariane, disons a et b, appartiennent à un même tiroir. Ce tiroir contient au moins deux entiers, donc il ne peut pas être associé à l'entier 1. Il est donc associé à un nombre premier p, qui est alors nécessairement le plus petit facteur premier de a et de b. Par conséquent, Bérénice n'a plus qu'à choisir $d = p$ pour s'assurer la victoire.

Remarque : En général, quels que soient les valeurs de n et les choix qu'a effectués Ariane, Bérénice peut même se restreindre à choisir $d = 2$, 3 ou 5. En effet, si un nombre composé k appartient au tiroir associé à un nombre premier p, l'entier k/p est plus grand que 1, et n'a lui-même aucun facteur premier inférieur à p, donc il vaut au moins p. Cela signifie que $p^2 \leqslant p \times (k/p) = k \leqslant 30 < 6^2$, c'est-à-dire que $p \leqslant 5$. Par conséquent, seuls les tiroirs associés aux nombres premiers $p = 2$, 3 ou 5 contiennent au moins deux entiers, et Bérénice choisira donc d égal à l'un de ces trois nombres premiers.

Solution de l'exercice 3
Introduisons J, le pied de la hauteur issue de O dans le triangle BOC. Le point J joue le même rôle que I dans AOD, mais dans BOC. O étant le centre du cercle contenant A, B, C et D, les triangles AOD et BOC sont isocèles en O, puisque $OA = OB = OC = OD$. On en déduit que les droites (OI) et (OJ) sont respectivement les bissectrices des angles $\widehat{AOD}$ et $\widehat{BOC}$, et que $CJ = BJ = \frac{BC}{2}$.

Par ailleurs, le théorème de l'angle au centre donne $\widehat{AOD} = 2 \times \widehat{ABD}$, d'où l'on tire que $\widehat{AOI} = \frac{\widehat{AOD}}{2} = \widehat{ABD}$ étant donné que (OI) est la bissectrice de $\widehat{AOD}$. De même, on trouve

$\widehat{COJ} = \widehat{CAB}$. Or, les droites (AC) et (BD) étant perpendiculaires, les angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{CAB}$ sont complémentaires. Dès lors, les triangles OCJ et AOI sont semblables. En particulier, on a $\frac{OC}{CJ} = \frac{AO}{OI}$. Or $OC = AO$, donc $OI = CJ = \frac{BC}{2}$.



Solution de l'exercice 4

Tout d'abord, on remarque que c'est vrai si k divise n. En effet, dans ce cas, on peut paver la grille avec des dominos tous horizontaux, en remplissant séparément chaque ligne.

Montrons maintenant que cette condition est nécessaire. On colorie la grille diagonalement, avec k couleurs.

On remarque alors que chaque domino couvre exactement une case de chaque couleur. Par conséquent, pour pouvoir recouvrir toute la grille, il est nécessaire qu'il y ait autant de cases de chaque couleur. Il s'agit maintenant de montrer que cela n'est le cas que lorsque k divise n. Pour cela, écrivons $n = q \cdot k + r$ avec $0 \leqslant r < k - 1$ la division euclidienne de n par k. On commence par remarquer qu'on peut paver le complémentaire du carré $r \times r$ en bas à gauche. Pour cela, on pave le rectangle $qk \times n$ situé au-dessus, en ne mettant que des dominos verticaux. Ensuite, on remplit le rectangle $r \times qk$ situé en bas à droite, cette fois-ci avec des dominos horizontaux. Mais, puisque chaque domino recouvre autant de cases de chaque couleur, il y a autant de cases de chaque couleur dans le carré $n \times n$ si et seulement si il y en a autant dans le carré $r \times r$! Et, dans celui-ci, si $r > 0$, il y a une couleur qui apparaît r fois (celle qui est sur la diagonale) et une qui apparaît $r - 1$ fois (celle qui est sur la surdiagonale, qui ne réapparaît pas ailleurs car $r < k$). On a donc bien le résultat désiré.

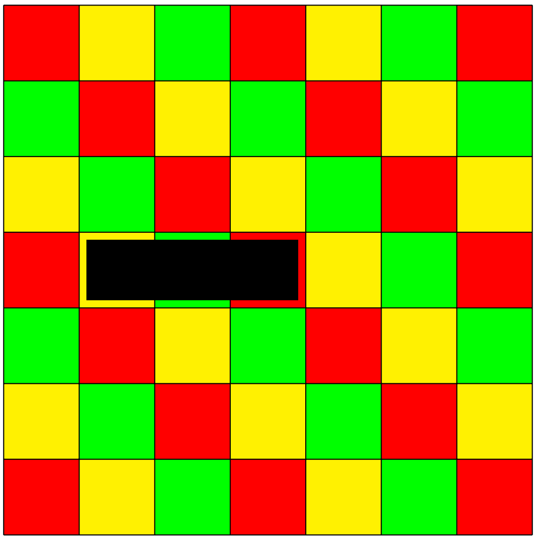


FIGURE 1 – Le coloriage avec $k = 3, n = 7$

5 Derniers cours

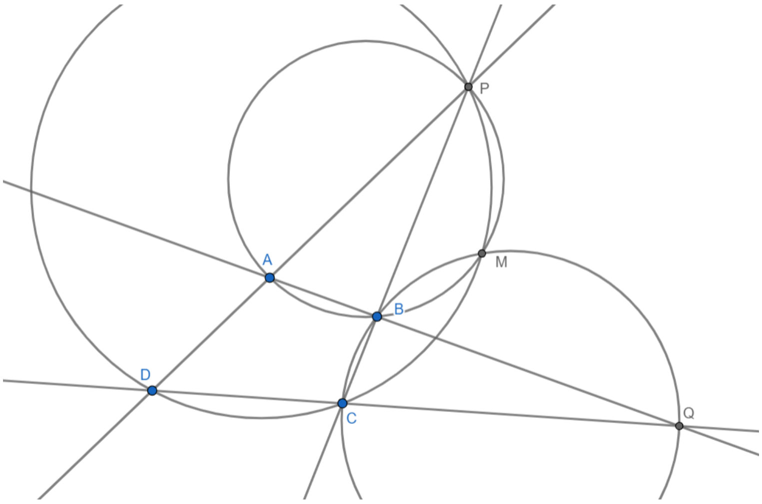
1 Révisions (Isaline)

Géométrie

Exercice 1 (Point de Miquel)
Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe. On note P l'intersection de (AD) avec (BC) et Q l'intersection de (AB) avec (CD). Montrer que les cercles circonscrits aux triangles CBQ, APB, DCP et ADQ sont concourants. Leur point de concourrence (que l'on notera M) est nommé le point Miquel, et vérifie d'autres propriétés.

Indication : Grâce à la "symétrie" de la construction, il suffit de montrer que les cercles circonscrits aux triangles CBQ, APB et DCP sont concourants.

Solution de l'exercice 1
On note M le point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles CBQ et APB. On a la figure

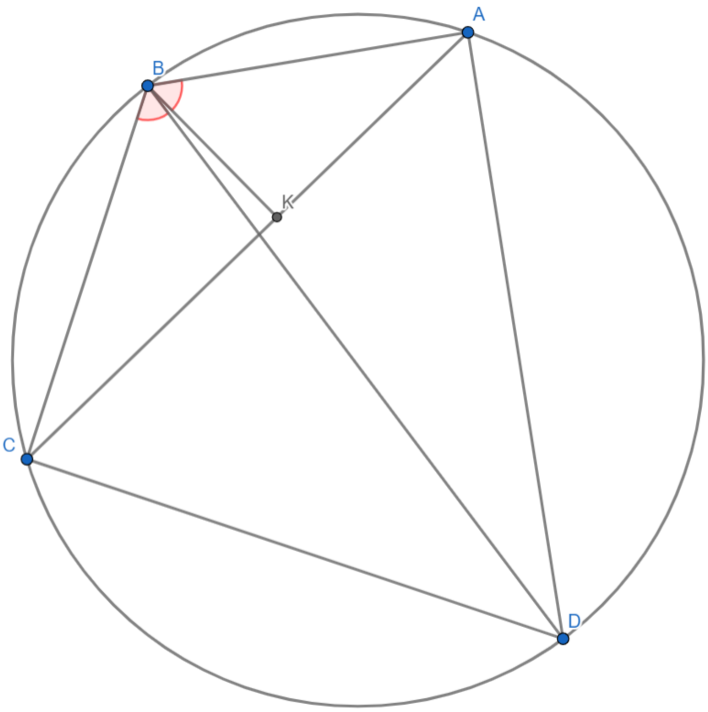


On effectue une chasse aux angles pour montrer que $\widehat{PDC}+\widehat{CMP} = 180$, ce qui conclura. On introduit les notations $\alpha = \widehat{BMP}$, $\beta = \widehat{BMQ}$ et $\mu = \widehat{CBQ}$.
$CBMQ$ est cocyclique, donc $\widehat{BMC} = \widehat{BQC} = 180-\widehat{CBQ}-\widehat{BCQ} = 180-\mu-(180-\beta) = \beta-\mu$.
Ainsi, $\widehat{CMP} = \alpha + \beta - \mu$.
$ABMP$ est cocyclique, $\widehat{DAB} = 180 - \widehat{BAP} = \widehat{PMB} = \alpha$. Aussi, $\widehat{BQC} = \widehat{BMC} = \beta - \mu$. La somme des angles d'un triangle valant 180, on a $\widehat{ADC} = \widehat{ADQ} = 180 - \widehat{DAQ} - \widehat{AQD} = 180 + \mu - \alpha - \beta$, ce qui conclue.

Exercice 2 (Théorème de Ptolémée)
Soit $ABCD$ un qudarilatère circonscriptible non croisé. Montrer que $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$.

Indication : Considérer le point $K \in [AC]$ tel que $\widehat{ABK} = \widehat{DBC}$.

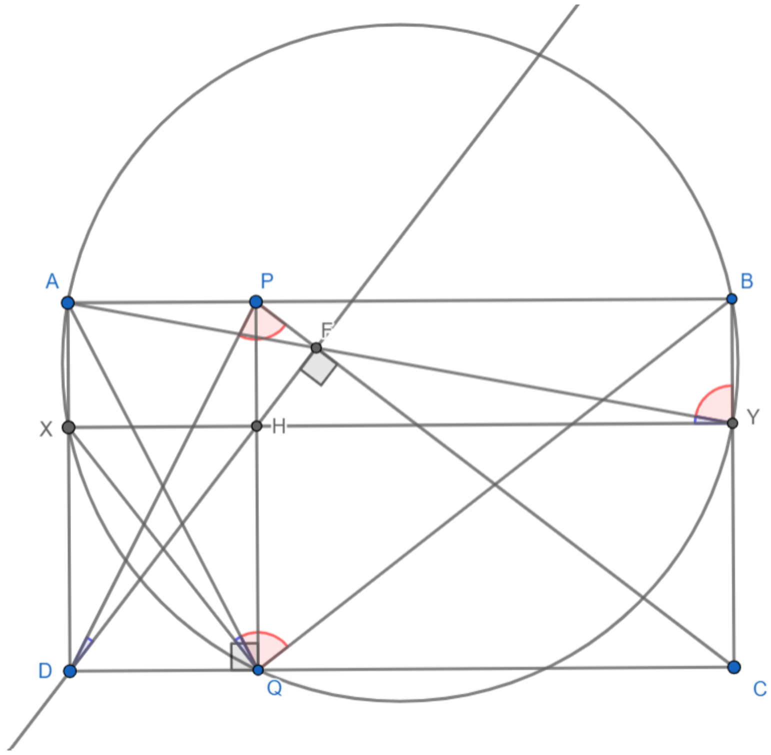
Solution de l'exercice 2



On a $\widehat{ABK} = \widehat{DBC}$ et par chance aux angles $\widehat{BDC} = \widehat{BAC}$ soit ABK et DBC semblables, ce qui donne $AB \cdot CD = AK \cdot BD$.
On a $\widehat{ABD} = \widehat{KBC}$ et par chance aux angles $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$ soit BDA et BCK semblables, ce qui donne $AD \cdot BC = CK \cdot BD$.
En sommant, on a $AB \cdot CD + BC \cdot AD = BD \cdot (AK + KC) = AC \cdot BD$

Exercice 3
Soit $ABCD$ un rectangle et P un point pris sur le segment $[AB]$. Soit Q le projeté orthogonal de P sur (DC). On note Γ le cercle circonscrit au triangle ABQ qui coupe les segments $[AD]$ et $[BC]$ respectivement en X et en Y. Montrer que (XY) rencontre l 'orthocentre de DCP.

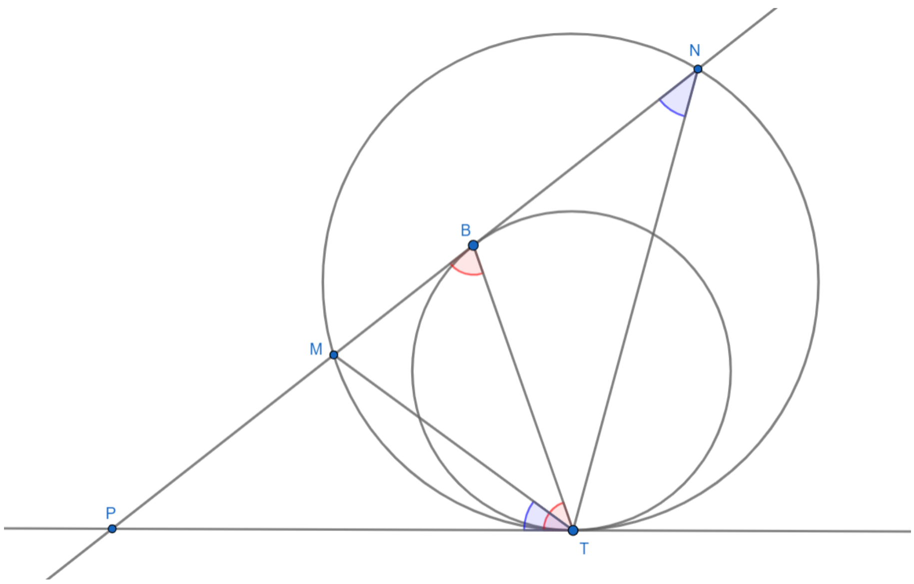
Solution de l'exercice 3
On note H l'intersection de (PQ) et de (XY). On va montrer que c'est l'orthocentre de DPC en montrant que (DH) et (PC) sont orthogonaux.



Par définition $AXPYB$ est cocyclique et $\widehat{XAB} = \widehat{ABY} = 90$. Alors, par chasse aux angles $ABXY$ est un rectangle. Par symétrie de la construction et par cocyclicité de $AXPYB$, $\widehat{DPC} = \widehat{AQB} = \widehat{AYB}$. Par les mêmes arguments, on trouve que $\widehat{PDH} = \widehat{AQX} = \widehat{AYX}$. Ainsi, $\widehat{CPD} + \widehat{PDH} = \widehat{AYB} + \widehat{AYX} = 90$, ce qui conclue.

Exercice 4
Soient Γ et Γ' deux cercles tangents en T, tel que Γ' est à l'intérieur de Γ. On place B un point sur Γ. La tangente à Γ' en B intersecte Γ en M et N. Montrer que $\widehat{MTB} = \widehat{BTN}$.

Solution de l'exercice 4



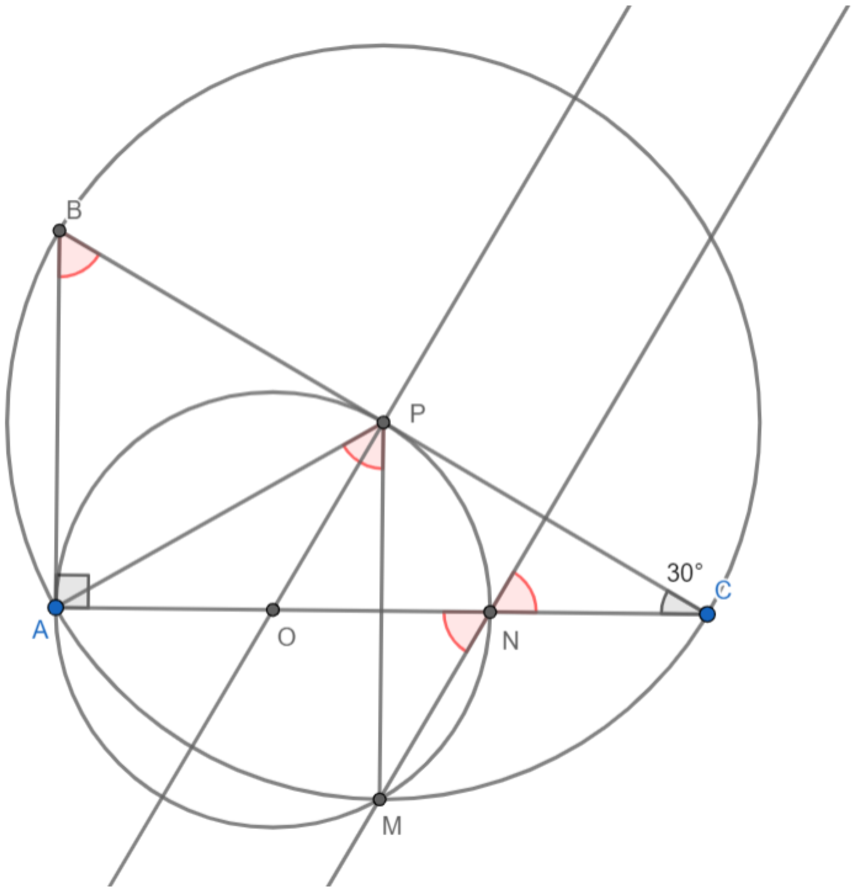
On note P l'intersection des deux droites tangentes à Γ', ce qui donne $\widehat{BPT} = \widehat{BTP}$. Par angle tangent on a aussi $\widehat{MTP} = \widehat{MNT}$.
On a

$$\widehat{BTM} = \widehat{BTP} - \widehat{MTP} = \widehat{MBT} - \widehat{MNT} = 180 - (180 - \widehat{PBT}) - \widehat{MNT} = \widehat{BTN}$$

.

Exercice 5 (Iranian Geometry Olympiad 2014)
Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $\widehat{ACB} = 30$. On note Γ le cercle passant par A et tangent au milieu du segment $[BC]$. Γ intersecte (AC) en N et intersecte le cercle circonscrit à ABC en M. Montrer que (NM) et (BC) sont perpendiculaires.

Solution de l'exercice 5
On introduit O le centre de Γ et P le milieu $[BC]$.On a la figure



On a donc $\widehat{AMP} = \widehat{APB} = 60$ car APB est équilatéral et Γ est tangent à (BC). Or A et M sont sur un même cercle de centre P, soit APM isocèle (en P). Alors $\widehat{MAP} = \widehat{AMP} = 60$, puis $\widehat{APM} = 60$. Le triangle APM est lui aussi équilatéral.
$APMN$ cocyclique d'où $60 = \widehat{APM} = \widehat{ANM}$. La somme des angles d'un triangle valant 180, on en déduit que (NM) et (BC) sont perpendiculaires.

Combinatoire

Exercice 6
Trois puces se déplacent sur un quadrillage et forment un triangle ABC. Initialement, A se trouve en $(0,0)$, B se trouve en $(1,0)$ et C se trouve en $(0,1)$. Les puces se déplacent successivement dans l'espace en suivant la règle suivante : la puce qui se déplace se déplace sur la droite parallèle au côté qui lui est opposé, passant par sa position initiale et parcours la distance qu'elle souhaite.
La première puce à se déplacer est A qui parcourt une certaine distance sur la droite parallèle à (BC) et passant par $(0,0)$. C'est ensuite à B de se déplacer suivant la règle.
Existe-t-il un enchaînement de mouvement permettant aux puces d'occuper les positions $(1,0)$, $(-1,0)$ et $(0,1)$?

Solution de l'exercice 6
La réponse est Non. Pour montrer ça, on va montrer que l'aire du triangle formé par les trois puces est un invariant.
L'aire d'un triangle est égale à "$\frac{1}{2}$ base $\times$ hauteur". Si l'on considère le cas ou la puce A se déplace, la base correspond au segement $[BC]$, qui est constant durant le déplacement. La hauteur est elle aussi constante car A se déplace sur une droite parallèle à (BC).
L'aire du triangle ABC est donc constante. Or, le triangle initiale et le triangle final souhaité ne sont pas de même aire, ce qui conclure.

Exercice 7
Le roi Arthur et Merlin sont assis à une table ronde à côté d'un coffre remplie de pièces identiques (il contient un nombre infini de pièces, merci Merlin). Pour tromper l'ennui, ils décident de jouer au jeu suivant : à tour de rôle, ils déposent une pièce sur la table. Le premier à ne plus pouvoir mettre de pièces sur la table perd(les pièces ne peuvent pas se chevaucher). Arthur commence. Montrer qu'il possède une stratégie gagnante.

Solution de l'exercice 7
Pour gagner, Arthur dépose sa première pièce au centre de la table. Ensuite, à chaque tour il pose sa pièce de manière diamétralement opposée à celle que vient de poser Merlin. Grâce à la symétrie du plateau, si Merlin a pu poser sa pièce, alors Arthur peut poser la sienne. Il est impossible pour Arthur de perdre : il gagne donc.

Exercice 8
On choisit 2022 nombres. Montrer qu'il existe une somme de ces nombres qui est divisible par 2022.

Solution de l'exercice 8
On appel $a_1, a_2, ...a_{2022}$ les nombres que l'on a choisit. Pour $n \in [\![1; 2022]\!]$, on note $s_n = a_1 + ... + a_n$. On regarde ces nombres modulo 2022 :

— soit il existe un entier i tel que $s_i \equiv 0$. s_i convient

— soit d'après le principe des tiroirs, il existe $i < j$ tel que $s_i \equiv s_j$. Alors $s_i - s_j$ convient.

Exercice 9
On place 5 points dans un triangle équilatéral de côté 1. Montrer qu'il existe deux points à distance inférieure ou égale à $0,5$.

Solution de l'exercice 9
On va montrer ça en considérant un découpage en 4 parties du triangle qui vérifie la condition "deux points sont à distance inférieure ou égale à $0,5$". Pour ça on relie les milieux des côtés on obtient 4 triangles équilatéraux qui conviennent.

Exercice 10 (Olympiades Turques Junior 2021)
Soient x, y et z trois réels vérifiant les égalités $x+y+z=2$ et $xy+yz+zx=1$. Trouver la valeur maximale que peut prendre $x-y$.

Solution de l'exercice 10
On commence par combiner les deux équations pour faire "disparaître" une des trois variables (ici z puisqu'il n'apparaît pas dans $x-y$). On a donc $1=xy+z(x+y)=xy+(2-x-y)(x+y)$ ce qui donne l'égalité

$$x^2+y^2+xy+1=2x+2y$$

On introduit les variables réduites $a=x-y$ (ce qu'on cherche) et $b=x+y$, avec les quelles ont peut réécrire plus simplement cette relation, qui devient $2b=b^2-\frac{b^2-a^2}{4}+1$. Ainsi, $a^2=-3b^2+8b-4$.
Il ne reste plus qu'à le maximum atteint par la fonction $f:x\to -3x^2+8x-4$, qui est atteint en $\frac{-8}{2\times -3}=\frac{4}{3}$. On a $f(\frac{4}{3})=\frac{4}{3}$, d'où $a^2\leq\frac{4}{3}$ et $\frac{-2}{\sqrt{3}}\leq x-y\leq\frac{2}{\sqrt{3}}$

Algèbre

Exercice 11
Calculer de manière astucieuse (i.e. sans trop de calculs) 9^5 et 11^5.

Solution de l'exercice 11
On va utiliser la formule du binôme de Newton en remarquant que $9=10-1$ et $11=10+1$.

Exercice 12
Soient a et b deux réels positifs. Montrer que $a^3+b^3+a+b\geq 4ab$.

Solution de l'exercice 12
On applique l'IAG à 4 termes et on a $\frac{a^3+b^3+a+b}{4}\geq\sqrt[4]{a^3\cdot b^3\cdot a\cdot b}=ab$, ce qui conclue.

Exercice 13
Soient a et b deux réels strictement positifs. Montrer que $(1+\frac{a}{b})^n+(1+\frac{b}{a})^n\geq 2^{n+1}$.

Indication : on utilise le résultat $x+\frac{1}{x}\geq 2$.

Solution de l'exercice 13
On applique l'IAG et on a $\frac{(1+\frac{a}{b})^n+(1+\frac{b}{a})^n}{2}\geq\sqrt{(1+\frac{a}{b})^n(1+\frac{b}{a})^n}=\sqrt{(1+\frac{a}{b})(1+\frac{b}{a})}^n$. D'après le résultat précédent, $(1+\frac{a}{b})(1+\frac{b}{a})=2+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 4$.
Ainsi, $(1+\frac{a}{b})^n+(1+\frac{b}{a})^n\geq 2\times 2^n=2^{n+1}$.

Exercice 14 (JBMO 2012)
Soient a,b,c trois réels positifs non-nuls vérifiant $a+b+c=1$. Montrer que

$$\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+6\geq 2\sqrt{2}(\sqrt{\frac{1-a}{a}}+\sqrt{\frac{1-b}{b}}+\sqrt{\frac{1-c}{c}})$$

Déterminer le cas d'égalité.

Solution de l'exercice 14

On commence par homogénéiser et factoriser le terme de gauche. On le réécrit $\frac{a+b}{c} + \frac{a+c}{b} + \frac{b+c}{a} - 6$. D'après la condition initiale, on a $a + b = 1 - c$. Le terme de gauche se réécrit donc $\frac{1-c}{c} + \frac{1-b}{b} + \frac{1-a}{a} - 6$.

On introduit la notation $A = \sqrt{\frac{2-2a}{a}}$ (bien défini, car a est un réel compris entre 0 et 1) et de manière analogue pour B et C (se faisant, on se "débarrasse" du $\sqrt{2}$). On veut donc montrer que

$$A^2 + B^2 + C^2 + 12 \geq 4(A + B + C)$$

ce qui équivaut à montrer que

$$(A^2 - 4A + 4) + (B^2 - 4B + 4) + (C^2 - 4C + 4) \geq 0$$

ce qui est vrai par positivité du carré d'un réel. Dans le cas d'égalité, $(A - 2)^2 = 0$ soit $2 = A = \sqrt{\frac{2-2a}{a}}$. Alors $4 = \frac{2-2a}{a}$ soit $6a = 2$ d'où $a = \frac{1}{3}$. En refaisant la même chose pour B et C, on montre que le cas d'égalité correspond au cas où $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Exercice 15 (NZMO 2021)

Soient x et y deux réels strictement positifs. Montrer que

$$x^2 + \frac{8}{xy} + y^2 \geq 8$$

Étudier le cas d'égalité.

Solution de l'exercice 15

On va essayer de compléter un carré en " ajoutant 0". On veut montrer que la quantité $x^2 - 2xy + y^2 + 2xy + \frac{8}{xy} - 8$ est positive. Elle se réécrit

$$(x - y)^2 + 2xy + \frac{8}{xy} - 8 = (x - y)^2 + \frac{2}{xy}((xy)^2 - 4xy + 4) = (x - y)^2 + \frac{2}{xy}(xy - 2)^2$$

On a bien $(x-y)^2 \geq 0$ et $(xy-2)^2 \geq 0$. Aussi, x et y étant des réels strictement positifs, $\frac{2}{xy} \geq 0$, ce qui conclut.

Il y a égalité dans le cas où $x = y$ et $xy - 2 = 0$, soit pour $x = y = \sqrt{2}$ (car ils sont positifs).

Arithmétique

Exercice 16

Quels sont les deux derniers chiffres de $7^{5^{6^{7^8}}}$?

Solution de l'exercice 16

On va regarder son reste modulo 100. On commence par "remarquer" que les puissances forment un cycle de longueur 4. Or, on a $5 \equiv 1[4]$, soit $5^{6^{7^8}} \equiv 1[4]$. Les deux derniers chiffres sont donc 07.

Exercice 17

Trouver tous les entiers positifs n tels que $n + 2$ divise $n^3 + 3n + 29$.

Solution de l'exercice 17
Condition Nécessaire (CN) : Soit n convenant. On a $n+2$ divise $(n+2)n^2$ ainsi que la différence $(n+2)n^2-(n^3+3n+29)$. Ainsi, $n+2|2n^2-3n-29$. De même, $n+2|2n(n+2)-(2n^2-3n-29)=7n+29$ puis $n+2|7n+29-7(n+2)=15$.
Ainsi, en prenant en compte le fait que $n \geq 2$, n+2 vaut 3, 5 ou 15. Donc n vaut 1, 3 ou 13.

Condition Suffisante (CS) :

— Pour $n=1$, $n+2=3$ et $n^3+3n+29=33$. On a bien $3|33$

— Pour $n=3$, $n+2=5$ et $n^3+3n+29=65$. On a bien $5|65$

— Pour $n=13$, $n+2=15$ et $n^3+3n+29=2265$. On a bien $3|2265$ et $5|2265$ soit $15|2265$

Les solutions du problème sont donc 1,3 et 13.

Exercice 18
Soit $a \geq 1$ et $b \geq 2$ tels que a^b-1 premier. Montrer que $a=2$ et b premier.

Solution de l'exercice 18
On sait que a^b-1 premier et que $a-1|a^b-1$. Donc $a-1=1$, d'où $a=2$.
Si on écrit $b=n\cdot m$, $2^n-1|2^b-1$, donc soit $n=b$, soit $n=1$. Ainsi, b premier.

Exercice 19 (JBMO 2010)
Trouver tous les n entiers tels que $2^{n+1}n$ est un carré parfait.

Solution de l'exercice 19
CN : On fait une disjonction de cas selon la parité de n.
Si n est pair, $n=2p$ et $2^{n+1}n=2^{2p+1}2p=2^{p+1^2}p$. Il faut donc que p soit un carré.
Si n est impair, on a $n=2p+1$ et $2^{n+1}n=2^{2p+2}(2p+1)=2^{p+1^2}(2p+1)$. Il faut donc que n soit un carré.
CS : Réciproquement, on vérifie que $\{2p^2, p \in \mathbb{N}\} \cup \{(2p+1)^2, p \in \mathbb{N}\}$ est solution.

Exercice 20 (Olympiades Coréennes Junior 2018)
Touver tous les couples d'entiers n,m tels que $7^m=5^n+24$.

Solution de l'exercice 20
CN : Soit n,m convenant. En évaluant l'égalité modulo 3, on a $1=1^m=(-1)^n$ d'où $n=2n'$.
En évaluant l'égalité modulo 4, on a $(-1)^m=1^n+0=1$ d'où $m=2m'$.
L'égalité se réécrit donc $24=7^m-5^n=7^{m'^2}-5^{n'^2}=(7^{m'}+5^{n'})(7^{m'}-5^{n'})$. Le couple $(7^{m'}+5^{n'})(7^{m'}-5^{n'})$ est un couple d'entiers supérieurs ou égaux à 2 (car strictement positifs et pairs). On a donc $(7^{m'}+5^{n'}),(7^{m'}-5^{n'})=12,2$ ou $(7^{m'}+5^{n'}),(7^{m'}-5^{n'})=6,4$. En faisait des demi-sommes, on a $7^{m'},5^{n'}=7,5$ ou $7^{m'},5^{n'}=5,1$: n' et m' étant entier, seul le premier cas convient.

CS : On vérifie que $n=m=2$ convient.

2 Graphes (Benoît)

Ce cours était tiré du sensationnel cours sur les graphes de Pierre Bornsztein. Nous avons travaillé sur les graphes planaires (parties 1 et 2).

IV. Groupe B

Contenu de cette partie

1 Première partie : Algèbre & Combinatoire

1 Récurrence (Issam)

Récurrence

Idée intuitive :
Supposons que l'on ait une propriété binaire (i.e. soit vraie soit fausse) qui dépend de $n \in \mathbb{N}$ et qu'on note $P(n)$.
Afin de montrer que $P(n)$ est vraie pour toute valeur de n, il suffit de le faire pas à pas.
Plus précisément, si on montrer que $P(0)$ est vraie et que $\forall n \in \mathbb{N}\ P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ alors :

— $P(0)$ serait vraie

— $P(0)$ impliquerait que $P(1)$ soit aussi vraie

— Plus généralement, $P(i)$ acquis, elle impliquerait à son tour $P(i+1)$

Ainsi on obtient la véracité de $P(n)$ pour tout entier n. Remarquons au passage que l'on peut changer $\mathbb{N}$ par $\mathbb{N}^*$ ou même $\{a, a+1, \dots\}$ à condition de vérifier la véracité de la propriété en le premier terme. Voir plus bas pour une généralisation.
Vocabulaire : On appellera la vérification de $P(0)$ l'initialisation et la vérification de $\forall n \in \mathbb{N}\ P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ l'hérédité.
Soulignons cependant deux erreurs communes :

1. **Oublier d'initialiser :** il est fréquent de se lancer dans la preuve de l'hérédité sans vérifier l'initialisation

   Exemple 1.
   Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*\ u_n = 10^n + (-1)^n$ et $P(n) =$ "11 divise u_n"
   $P(1)$ est fausse vu que 11 ne divise pas $10 + (-1) = 9$
   Toutefois, on peut bien démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*\ P(n) \Longrightarrow P(n+1)$
   En effet, pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

   $$u_{n+1} = 10^{n+1} + (-1)^{n+1} = 10 \cdot (10^n + (-1)^n) - 10 \cdot (-1)^n - (-1)^n = 10 \cdot u_n - 11 \cdot (-1)^n$$

   Et donc, modulo 11, on a
   $$u_{n+1} \equiv -u_n\ [11]$$

   Remarquer d'ailleurs que cette congruence donne même l'équivalence $\forall n \in \mathbb{N}^*\ P(n) \Longleftrightarrow P(n+1)$ et que donc, vu que $P(1)$ est fausse, $P(n)$ est fausse pour tout n

2. **L'hérédité ne passe pas à toute étape :** on oublie parfois de vérifier que nos arguments sont valides pour toutes les valeurs de n, notamment celles petites. Illustrons ceci par l'exemple suivant :

   Exemple 2.
   Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*\ P(n) = \{$ tout tas de n stylos contient des stylos de même couleur$\}$
   $P(1)$ est vrai vu qu'un tas d'un seul stylo est bien monochrome. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ tient et prenons un tas de $n+1$ stylos qu'on énumère arbitrairement $1, \dots, n+1$.
   Si on prend les stylos $\{1, \dots, n\}$ alors, par hypothèse de récurrence, ils sont tous de la

même couleur, disons rouge pour simplifier.
En particulier les stylos $\{2, \ldots, n\}$ sont tous rouges.
Prenons maintenant le paquet $\{2, \ldots, n+1\}$. L'hypothèse de récurrence permet alors d'affirmer que ce dernier est aussi forcement monochrome et donc le stylo $n+1$ doit avoir le même couleur que le stylo 2 i.e. rouge.

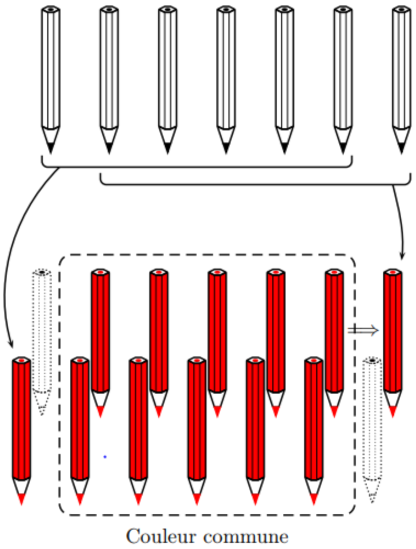


FIGURE 1 – Photo gracieusement prise du cours d'Alain Troesch

Il est aisé de se convaincre qu'il y a une faille quelque part dans ce raisonnement vu qu'il existe des stylos de couleurs différentes
Le problème est que pour $n = 1$ il n y a aucun stylo dans $\{2, \ldots, n\}$ et donc les paquets considérés sont $\{1\}$ et $\{2\}$ respectivement. Le fait que 2 ait la même couleur que 1 n'est forcement vrai ci-dessus que si $n \geqslant 2$.

Commençons par un exemple simple du cours pour illustrer ce principe de récurrence :

Exemple 3.

Posons $\forall n \in \mathbb{N}^* \ S_n = 1 + 2 + \cdots + n$, montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^* \ S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

— Initialisation : pour $n = 1$ on a bien $S_1 = 1 = \dfrac{1 \cdot 2}{2}$

— Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, on a alors :

$$S_{n+1} = 1 + \cdots + n + (n+1) = S_n + (n+1) \underset{H.R.}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n+1}{2}(n+2) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

On déduit donc le résultat par récurrence.
Remarquons que le désavantage d'une telle preuve est qu'elle nécessite la connaissance de la formule d'avance.
Ici on pouvait l'obtenir grâce à l'astuce de Gauß (mathématicien allemand célèbre. L'anecdote dit qu'un de ses professeurs de primaire voulait occuper ses écoliers en leur donnant la somme $1 + \cdots + 100$ à calculer et, qu'à sa surprise, Gauß la résolut avec l'astuce suivante)

$$\begin{array}{rcccc} S = & 1+ & \dots & +n \\ S = & n+ & \dots & +1 \\ 2S = & (n+1)+ & \dots & +(n+1) \end{array}$$

Et donc $2S = \underbrace{(n+1)+\cdots+(n+1)}_{n \text{ fois}}$ i.e. $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$

De façon tout à fait similaire, voici un exercice similaire que le lecteur est invité à faire pour s'assurer de sa compréhension :

Exercice 1
Posons $\forall n \in \mathbb{N}^* \ S_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$, montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^* \ S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

La formule pour la somme des cubes est un peu particulière.
En effet, on remarque qu'elle est exactement le carré de celle des termes linéaires.
Le but des deux exercices suivants et de comprendre les raisons derrière cette égalité a priori magique tout en s'exerçant à la récurrence

Exercice 2
Posons $S_n = 1^3 + \cdots + n^3$ et $u_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)$ la somme des n premiers impaires.

1. En évaluant en des n assez petit, prédire puis démontrer par récurrence une formule pour u_n.
2. En utilisant la formule retrouvée plus haut sur la somme des termes linéaire, retrouver encore une fois u_n.
3. Peut on retrouver d'une troisième façon une formule pour u_n ?
4. En remarquant que $1^3 = 1$, $2^3 = 3+5$, $3^3 = 7+9+11$ etc, trouver une formule pour S_n.

Exercice 3
Posons $S_n = 1^3 + \cdots + n^3$ et dressons la table de multiplication :

$\times$	1	2	3	4	$\dots$
1	1	2	3	4	$\dots$
2	2	4	6	8	$\dots$
3	3	6	9	12	$\dots$
4	4	8	12	16	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

On définit $\forall k \in \mathbb{N}^* \ I_k = \{(i,j) \in \mathbb{N}^{*2}, \ \max(i,j) = k\}$ et $\forall k \in \mathbb{N}^* \ M_k = \sum\limits_{i \in I_k} i$
Dit plus simplement, M_k est simplement la somme des éléments d'indices I_k, se référer au coloriage plus haut.
Exemple : $M_1 = 1, \ M_2 = 2+4+2, \ M_3 = 3+6+9+6+3, \ M_4 = 4+8+12+16+12+8+4$ etc

1. Trouver une formule pour M_k puis la montrer par récurrence.

2. En déduire la valeur de S_n.

Exercice 4
On dispose de 3 emplacement $1, 2$ et 3 ou peuvent se poser des disques. Initialement on a n disques sur l'emplacement 1 de rayon de plus en plus petit. Le but est de déplacer tous ces disques de l'emplacement 1 vers l'emplacement 2 en respectant 2 règles :

1. à chaque étape on bouge exactement un seul disque d'un emplacement à un autre
2. On ne peut pas poser un disque sur un autre de rayon plus petit

Montrer alors par récurrence qu'on peut déplacer tous nos disques vers l'emplacement 2 puis trouver, toujours par récurrence, une formule du nombre minimum d'étapes nécessaires.

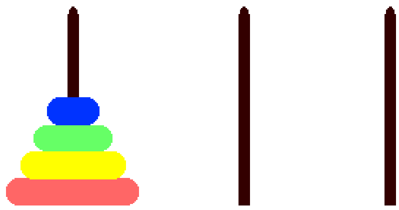


FIGURE 2 – état initial

L'exercice précédent nous a naturellement introduit une suite arithmético-géométrique. Plus formellement, c'est une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par un premier terme donné (plus haut u_1) et $u_{n+1} = a \cdot u_n + b$ où $a \neq 1$ et b sont fixés.
On a été assez chanceux de pouvoir deviner une formule ci-haut et donc l'exercice suivant permet de retrouver une méthode plus systématique trouver une formule pour u_n.

Exercice 5
Soit une suite arithmético-géométrique $u_{n+1} = au_n + b$

1. Prenons une autre suite (v_n) qui vérifier la même équation de récurrence que (u_n) (i.e. $v_{n+1} = a \cdot v_n + b$). Que peut on dire de la suite $(w_n) = (u_n - v_n)$?
2. En trouvant une suite simple (v_n) telle que ci-haut, en déduire une formule pour (u_n).

Une généralisation naturelle sont les suites récurrentes d'ordre k (avec second terme), ici on ne s'occupera que de ceux d'ordre 2 (sans second terme) et uniquement dans le cas de racines distinctes pour le polynôme caractéristique (voir plus bas et ce sera plus clair).

Exercice 6
Soit une suite récurrente linéaire d'ordre 2 i.e. $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ pour a et b fixés. Les exemples précédents, ainsi que la forme de l'équation de récurrence, laissent penser que les solution les plus élémentaires sont des puissances.

1. Vu la remarque précédente, montrer qu'une suite $(u_n) = (q^n)$ n'est solution que si et seulement si q annule un certain polynôme unitaire (i.e. de coefficient dominant égal à un) de degré 2. On le notera P et on l'appellera le polynôme caractéristique de cette suite (on conviendra aussi que $0^0 = 1$).
2. On suppose que P admet deux racines distinctes, notées r_1 et r_2, vérifier que toute suite de la forme $(u_n) = (cr_1^n + dr_2^n)$ avec c et d fixés est solution.

3. Prenons maintenant deux suites (u_n) et (v_n) toutes deux solutions. Montrer par récurrence que les suites sont égales que si et seulement si $u_0 = v_0$ et $u_1 = v_1$.
4. On revient au cadre de la question 2. En déduire une forme générale de (u_n) qui fait intervenir u_0, u_1 et r_1, r_2.

Ce qui importe de l'exercice précédent n'est pas la formule finale mais la méthode pour la retrouver.
On remarque qu'on a négligé deux cas dans l'exercice précédent : notamment le cas de non existence de racine réelles pour P (par exemple si $P = X^2 + 1$) ou le cas de la racine double.
La solution n'est pas forcément à connaître mais la voici pour les curieux :le premier cas se résout en considérant les solutions complexes (pour ceux qui les connaissent) alors que le second, si on note r cette racine unique, se résout en prenant une suite de la forme $u_n = (cn + d)r^n$ à la place de $u_n = cr_1^n + dr_2^n$.
Toujours pour les curieux, on énonce sans démonstration le résultat suivant :

Théorème 4.
Soit $u_{n+k} = a_{k-1}u_{n+k-1} + \cdots + a_0u_n$ une suite récurrente linéaire d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$. On pose $P = X^k - a_{k-1}X^{k-1} - \cdots - a_0$. Factorisons P dans $\mathbb{C}$ sous forme $P = (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \ldots (X - \lambda_s)^{\alpha_s}$ où les $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$ et les λ_i sont distincts.
Alors il existe des uniques polynômes $(P_1, \ldots, P_s)$ à coefficients dans $\mathbb{C}$ avec $\forall i \ \deg P_i < \alpha_i$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = P_1(n)\lambda_1^n + \cdots + P_s(n)\lambda_s^n$. Les coefficients de ces polynômes sont exactement ceux qui permettent l'égalité en $0, 1, \ldots, k-1$.

Remarquons aussi que dans l'exercice précédent une seule hypothèse de récurrence ne suffisait pas et qu'il fallait imposer une sur u_n et u_{n+1} en même temps : c'est ce qu'on appelle la récurrence double.
Plus généralement si on imposait une hypothèse de récurrence sur k termes, par exemple $u_n, \ldots, u_{n+k-1}$, alors ça s'appellerait une récurrence d'ordre k.
C'est ce dont on a besoin dans l'hérédité qui impose quel ordre de récurrence on utilise (exemple : dans l'exercice précédent le calcul de u_{n+2} nécessitait les deux termes u_{n+1} et u_n $\Longrightarrow$ récurrence double pour avoir des hypothèses sur les deux).
En tout cas, le point important à garder en tête est l'initialisation : si on a besoin d'une récurrence double (resp. d'ordre k), alors il faut initialiser avec les deux premiers termes (resp. les k premiers termes). Illustrons ceci par l'exercice suivant :

Exercice 7
On définit la suite de Fibonnaci par $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. En utilisant l'exercice précédent, trouver une formule de F_n puis démontrer la par récurrence double.

On ajoutera une dernière idée : la récurrence forte. Cette fois à chaque étape on suppose toutes les étapes précédentes valides. En d'autres mots, pour montrer $P(n+1)$, on suppose $P(0), \ldots, P(n)$ valides. L'initialisation se fait en général qu'en vérifiant le premier terme (comme une récurrence classique) mais attention à vérifier que l'hérédité passe à toute étape.

Exercice 8
Soit $x > 0$ tel que $x + \dfrac{1}{x} \in \mathbb{Z}$, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*\ x^n + \dfrac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$.

Finalement on ajoutera une dernière remarque : parfois les propriétés qu'on veut montrer ne se montrent pas par une récurrence dans l'ordre usuel mais plutot par un ordre spécial.

Les raisons sont tantôt juste pour la simplicité tantôt car il n'y a pas d'ordre usuel dès le début.
Un exemple serait une propriété $P(n,m)$ qui dépend de deux paramètres. Dans ce cas il faut ordonner N^2 pour appliquer une récurrence dessus. Bien entendu, parfois l'apparence est trompeuse est il suffit simplement de fixer n (resp. m) et faire une réccurence usuelle sur m (reps n) en vérifiant chaque hypothèse $P(n,0)$ (resp. $P(0,m)$). Dans le premier cas, un ordre classique serait celui sur la figure. Parfois on a besoin de toute la diagonale $x+y=n$ et donc on montre qu'avoir la $n-$ème diagonale implique la $n+1$-ème (et que la $0-$ème est valide pour l'initialisation).
Bref, tout ordre qui couvre exhaustivement $\mathbb{N}^2$ convient.

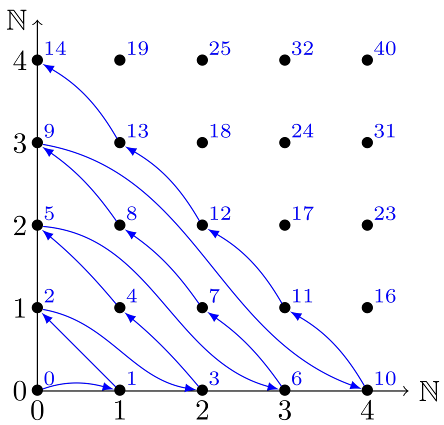


FIGURE 3 – Exemple d'énumération de $\mathbb{N}^2$

Similairement pour $\mathbb{N}$, parfois l'ordre usuel n'est pas adapté à notre propriété et il faut l'adapter ou, plus exactement, couvrir $\mathbb{N}$ mais de manière non-standard.
L'exemple classique est celui de la démonstration faite par Cauchy pour l'inégalité arithmetico-geométrique (AG). On rappelle son énnoncé :

$$\forall n \geqslant 1 \; \forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_*^+ \; \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}$$

Cauchy avait montré $P(1)$ puis que $P(n) \Longrightarrow P(2n)$ et finalement $P(n+1) \Longrightarrow P(n)$.
Pourquoi est ce que ceci lui permet de conclure ? Simplement parce que $P(1)$ va donner $P(2)$ puis $P(4)$ jusqu'à $\forall n \; P(2^n)$. Ceci permet d'avoir des nombre arbitrairement grands.
Maintenant pour avoir $P(n)$ remarquer que, par exemple, que $2^n \geqslant n$ et que donc $P(2^n)$ va impliquer $P(2^n - 1)$ puis $P(2^n - 2)$ et ce jusqu'à $P(n)$.
On finit donc bien par couvrir tous $\mathbb{N}^*$.

Corrections :

Solution de l'exercice 1

- Initialisation : pour $n = 1$ on a bien $S_1 = 1^2 = 1 = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{6}$
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, on a alors :

$$S_{n+1} = 1^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = S_n + (n+1)^2 \underset{H.R.}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= \frac{n+1}{6}(n(2n+1) + 6(n+1)) = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

D'où le résultat par récurrence.

Solution de l'exercice 2

1. Remarquons que $u_1 = 1, u_2 = 4, u_3 = 9$ et $u_4 = 16$. Il semble donc légitime de penser que $u_n = n^2$. Montrons ceci par récurrence.
   Initialisation : Pour $n = 1$ $u_1 = 1^2$
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_n = n^2$. Alors

$$u_{n+1} = u_n + (2(n+1) - 1) = u_n + 2n + 1 \underset{H.R.}{=} n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

   D'où le résultat par récurrence.
2. Remarquons que

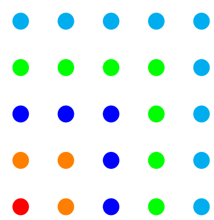
$$u_n = 1+3+\cdots+(2n-1) = (2\cdot1-1)+(2\cdot2-1)+\cdots+(2n-1) = 2\cdot(1+\cdots+n) - \underbrace{(1+\cdots+1)}_{n \text{ fois}}$$

$$= 2 \cdot (1 + \cdots + n) - n$$

   Or l'exemple de cours nous fournit une formule pour la première somme, utilisons la :

$$u_n = 2 \cdot (1 + \cdots + n) - n = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n = n(n+1) - n = n^2$$

3. Prenons le dessin suivant :



   On remarque qu'il y a 1 point rouge, 3 points oranges, 5 points bleus etc. jusqu'au $n-$ème impair. De même, il s'agit simplement d'un carré $n \times n$. On obtient donc que $u_n = n^2$.

4. La remarque nous donne que S_n est la somme des impaires associés à 1^3, puis à 2^3 jusqu'à n^3. On remarques que les impaires sont successifs et ne se répètent pas donc on finit par avoir que S_n est la somme de tous les impaires de 1 jusqu'au dernier ajouté par n^3 i.e. que $S_n = u_k$ avec k le nombre de termes impaires total.
   Calculons k :
   1^3 ajoute un seul impair, 2^3 ajoute 2 impaires, 3^3 ajoute 3 impaires etc. On a donc au final, en sommant le tous, $k = 1 + 2 + \cdots + n$ termes impaires.
   Ainsi $S_n = u_k = k^2 = (1 + \cdots + n)^2 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$

<u>*Solution de l'exercice 3*</u>

1. On peut retrouver une formule pour M_k de plusieurs manières, commençons par une basée sur la récurrence :
   $M_1 = 1, M_2 = 2 + 4 + 2 = 8, M_3 = 27, M_4 = 64$. Il semble donc logique de prédire que $M_k = k^3$, montrons ceci par récurrence.
   Initialisation : $M_1 = 1^3$ est bon.
   Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $M_k = k^3$. Remarquons que pour décaler la partie droite de I_k vers la droite d'un cran il suffit de la multiplier par $\dfrac{k+1}{k}$, de même pour la partie basses et celle qui la suit.
   le terme tout en bas à droite ne figure cependant qu'une seule fois dans M_k et donc $\dfrac{k+1}{k} M_k$ correspond finalement à tous les termes dans M_{k+1} sauf celui tout en bas à droite et l'un des deux termes à coté.
   Un exemple sera peut être plus clair : prenons $k = 3$. Le bloc droite est $3, 6$ et 9. Similairement pour le bloc bas.
   Si on multiplie par $\dfrac{k+1}{k} = \dfrac{4}{3}$ ce bloc on obtient $4, 8$ et 12 qui est le translaté à droite de ce dernier.
   Pour le bloc en bas, il faut enlever le dernier terme ($k^2 = 9$) car déjà comptabilisé dans le bloc à droite. Il reste donc 3 et 6.
   Toujours en multipliant par $\dfrac{k+1}{k} = \dfrac{4}{3}$ on obtient le translaté en dessous 4 et 8
   Ainsi, $\dfrac{k+1}{k} M_k$ couvre tous les indices sauf $(k+1, k+1)$ et l'un des deux à coté, par exemple $(k+1, k)$
   On obtient donc que :
   $$M_{k+1} = \frac{k+1}{k} \cdot M_k + (k+1)^2 + k(k+1) \underset{H.R.}{=} k^3 \cdot \frac{k+1}{k} + (k+1)^2 + k(k+1) = (k+1)(k^2+k+1+k)$$
   $$= (k+1)(k^2 + 2k + 1) = (k+1)^3$$
   On obtient donc le résultat par récurrence.
   Pour une méthode sans récurrence, remarquons que M_k est la différence entre la somme dans tout le bloc de taille k et celui de taille $k-1$ et donc
   $$M_k = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} ij - \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} ij = (\sum_{i=1}^{k} i)(\sum_{j=1}^{k} j) - (\sum_{i=1}^{k-1} i)(\sum_{j=1}^{k-1} j) = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{k(k-1)}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{k}{2}\right)^2 ((k+1)^2 - (k-1)^2) = \left(\frac{k}{2}\right)^2 (4k) = k^3$$

Ajoutons une dernière méthode : M_k est le double de la somme d'un des blocs à droite ou en bas à laquelle on soustrait le bloc tout en bas à droite car commun au deux. En d'autres mots :

$$M_k = 2k \cdot (1 + 2 + \cdots + k) - k^2 = 2 \cdot k\frac{k(k+1)}{2} - k^2 = k^3$$

2. En tout cas, $S_n = M_1 + \cdots + M_n$ et ce dernier est simplement la somme dans tout le carré de taille n. Ainsi

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij = (\sum_{i=1}^{n} i)(\sum_{j=1}^{n} j) = (1 + \cdots + n)^2$$

Solution de l'exercice 4
Résolution : Pour $n = 1$ c'est clair que c'est faisable.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que c'est faisable pour n disques. Remarquer alors que il suffit de bouger les n premiers disques vers l'emplacement 3, bouger le plus gros disque vers l'emplacement 2 puis rebouger les n disques de l'emplacement 2 vers 3. Bien entendu ceci est correct car le plus gros disque ne gène en rien nos étapes et par notre capacité à bouger n disques par hypothèses de récurrence.
Nombre minimum d'étapes : Notons $\forall n \in \mathbb{N}^*$ u_n le nombre minimum d'étapes nécessaires pour n disques. Il est alors clair que $u_1 = 1$.
Fixons maintenant $n \in \mathbb{N}^*$ et prenons $n+1$ disques. Examinons maintenant une suite d'étapes qui nous permet de bouger $n + 1$ disques :
Il nous faut forcement bouger le plus gros disque de $E1$ à $E2$ à un moment (Ei désigne l'emplacement i), positionnons nous désormais juste avant cette étape. Remarquons maintenant que, afin de bouger ce dernier, il faut et suffit d'avoir deux conditions :

— Que sur $E1$ il n y ait que ce plus gros disque et rien au dessus.

— Que $E2$ soit libre

Ceci est équivalent à dire que tous nos disques autres que le plus gros sont dans $E3$ à cette étape (et que le plus gros est dans $E1$).
Ainsi, à ce moment précis, on a bougé tous nos disques hormis le plus gros de $E1$ vers $E3$, ce qui a requis au moins u_n étapes.
Ensuite, par définition de où on s'était positionné, on déplace le plus gros disque de $E1$ à $E2$, ce qui ajoute une étape.
Finalement, pour finir par tout avoir dans $E2$, il faut bouger tous nos disques diffèrent du plus grand de $E3$ vers $E2$, ce qui ajoute au moins u_n étape.
Ainsi, $u_{n+1} \geqslant 2u_n + 1$
Toutefois, l'algorithme ci dessus nous donne une solution en exactement $2u_n + 1$ étapes et donc $u_{n+1} = 2u_n + 1$

Faisons quelques calculs pour des n assez petits :

$$u_1 = 1,\ u_2 = 3,\ u_3 = 7,\ u_4 = 15 \text{ et } u_5 = 31$$

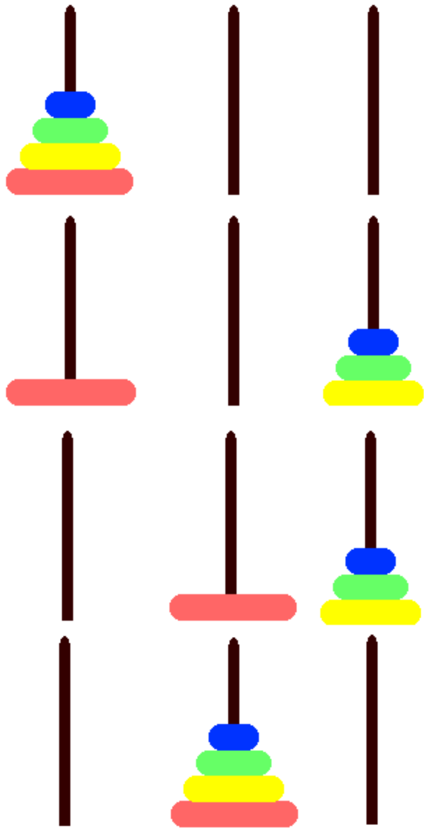


FIGURE 4 – étapes de résolution minimale

On remarque sans trop de surprise que u_n croît comme 2^n (ce qu'on attend d'une suite géométrique de raison 2 i.e. une suite qui vérifie la même équation de récurrence mais sans le terme constant $+1$) et que, plus précisément, $u_n = 2^n - 1$ semble être une formule plausible. Vérifions ceci par récurrence :
Initialisation : Pour $n = 1$ $u_1 = 1 = 2^1 - 1$
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_n = 2^n - 1$, alors

$$u_{n+1} = 2u_n + 1 \underset{H.R.}{=} 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1$$

d'où le résultat par récurrence.

Solution de l'exercice 5

1. Remarquons que

$$w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = au_n + b - av_n - v = a(u_n - v_n) = aw_n$$

et donc (w_n) est une suite géométrique de raisons a

2. Une suite particulièrement facile à manier est une suite constante, cherchons donc une telle suite (v_n) qui soit constante, disons égale à c, tout en vérifiant la relation de récurrence.

Il faut et suffit donc d'avoir :

$$c = ac + b \text{ i.e. } c = \frac{b}{1-a}$$

Ainsi, par la question précédent on déduit que $w_n = u_n - v_n = u_n - c$ est géométrique de raison a i.e. $w_n = a^n w_0 = a^n(u_0 - c)$
La formule devient finalement :

$$u_n = w_n + c = a^n(u_0 - c) + c \text{ avec } c = \frac{b}{1-a}$$

Pour l'exercice précédent, en prenant comme premier terme u_1 à la place de u_0 on obtient

$$u_n = a^{n-1}(u_1 - c) + c \text{ avec } c = \frac{b}{1-a}$$

Ce qui donne bien

$$u_n = 2^{n-1}\left(1 - \frac{1}{1-2}\right) + \frac{1}{1-2} = 2^{n-1}(1+1) - 1 = 2^n - 1$$

Solution de l'exercice 6

1. $(u_n) = (q^n)$ est solution

   $$\iff \forall n \in \mathbb{N}\ q^{n+2} = aq^{n+1} + bq^n \iff \forall n \in \mathbb{N}\ q^n(q^2 - aq - b) = 0 \underset{n=0}{\iff} q^2 - aq - b = 0 \iff P(q) = 0$$

   avec $P = X^2 - aX - b$
2. Remarquons que

   $$u_{n+2} = cr_1^{n+2} + dr_2^{n+2} = cr_1^n \cdot r_1^2 + dr_2^n \cdot r_2^2 = cr_1^n(ar_1 + b) + dr_2^n(ar_2 + b) = a(cr_1^{n+1} + dr_2^{n+1}) + b(cr_1^n + dr_2^n)$$
   $$= au_{n+1} + bu_n$$
3. L'un des sens est facile : si $(u_n) = (v_n)$ alors $u_0 = v_O$ et $u_1 = v_1$
   Pour la réciproque, remarquons qu'avoir des informations uniquement sur u_n ne suffit pas pour conclure sur u_{n+1} vu que ce dernier est aussi dépendant de u_{n-1}.
   Par conséquent, il faut imposer des hypothèses sur les deux pour en déduire le terme suivant : c'est ce qu'on appelle une récurrence double.
   Faisons une récurrence double :
   Initialisation : $u_0 = v_0$ et $u_1 = v_1$ par hypothèse
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = v_n$ et $u_{n+1} = v_{n+1}$, montrons que $u_{n+2} = v_{n+2}$
   On a :

   $$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \underset{H.R.}{=} av_{n+1} + bv_n = v_{n+2}$$

   D'où le résultat par récurrence.
   Récapitulons : vu qu'un seul terme était insuffisant pour conclure, on a imposé deux hypothèses à la place d'une. Ce qu'on montre ensuite est que $P(n)$ et $P(n+1)$ donnent $P(n+2)$. Le point crucial à garder en tête est que deux termes consécutifs sont nécessaires pour impliquer le suivant et que donc il faut commencer par prouver aussi bien $P(0)$ que $P(1)$ dans l'initialisation.

4. La question précédente nous permet donc d'affirmer qu'une suite vérifiant la relation de récurrence qui nous intéresse est définie et de manière unique par ses des premiers termes.
   En d'autres mots, si on trouve une suite de forme assez gentille (vérifiant la même relation de récurrence) qui vaut la même chose que (u_n) lorsque évaluée en ses deux premiers termes alors on a retrouvé (u_n)
   La question 2 semble suggérer une suite de la forme $(v_n) = (cr_1^n + dr_2^n)$ dans laquelle on doit donc ajuster c et d pour avoir $v_0 = u_0$ et $v_1 = u_1$.
   Ceci revient donc à résoudre le système linéaire

$$\begin{cases} cr_1^0 + dr_2^0 = c + d = u_0 \\ cr_1^1 + dr_2^2 = cr_1 + dr_2 = u_1 \end{cases}$$

   Remarquons que la condition $r_1 \neq r_2$ est celle qui assure l'existence (et unicité) de la solution du système ci-haut.
   Résolvons le système

$$\begin{cases} c + d = u_0 \\ cr_1 + dr_2 = u_1 \end{cases} \iff \begin{cases} d = u_0 - c \\ cr_1 + (u_0 - c)r_2 = u_1 \end{cases} \iff \begin{cases} d = u_0 - c \\ c = \dfrac{u_1 - u_0 \cdot r_2}{r_1 - r_2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} d = \dfrac{u_0 \cdot r_1 - u_1}{r_1 - r_2} \\ c = \dfrac{u_1 - u_0 \cdot r_2}{r_1 - r_2} \end{cases}$$

   Ces c et d retrouvés, on obtient donc, par ce qui précède, une formule de (u_n)

<u>*Solution de l'exercice 7*</u>
Récapitulons l'idée principale de l'exercice précédent :

1. Les suites géométriques $(u_n) = (q^n)$ solution de la relation $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ sont exactement celles avec $q^2 = q + 1$
2. Si on a 2 solutions distinctes $r_1 \neq r_2$, ce qui est le cas ici, alors notre suite (u_n) est de la forme $(u_n) = (cr_1^n + dr_2^n)$
3. Pour retrouver c et d il suffit que l'égalité des deux suites soit satisfaite en les indices 0 et 1

Ici nos solutions sont $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > \psi = \dfrac{-1}{\varphi}$ avec φ le nombre d'or.
Ainsi il suffit de résoudre le système

$$\begin{cases} c + d = F_0 = 0 \\ c\varphi + d\psi = F_1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} d = -c \\ c(\varphi - \psi) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} d = -c \\ c = \dfrac{1}{\varphi - \psi} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

On obtient donc que $(F_n) = (v_n) = \left(\dfrac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}\right)$
Remontrons ce résultat à la main par récurrence double comme l'énoncé le demande :

Initialisation : $v_0 = \dfrac{\varphi^0 - \psi^0}{\sqrt{5}} = \dfrac{1-1}{\sqrt{5}} = 0 = F_0$ et $v_1 = \dfrac{\varphi - \psi}{\sqrt{5}} = 1 = F_1$
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $v_n = F_n$ et $v_{n+1} = F_{n+1}$.
Remarquons que

$$\varphi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+5+2\sqrt{5}}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \varphi + 1$$

De même

$$\psi^2 = \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^2 = \frac{1}{\varphi^2} = \frac{1}{\varphi+1} = 1 - \frac{\varphi}{\varphi+1} = 1 - \frac{1}{\varphi}\cdot\frac{\varphi^2}{\varphi+1} = 1 - \frac{1}{\varphi} = 1 + \psi$$

Ainsi

$$v_{n+2} = \frac{\varphi^{n+2} - \psi^{n+2}}{\sqrt{5}} = \frac{\varphi^{n+1} + \varphi^n - \psi^{n+1} - \psi}{\sqrt{5}} = v_{n+1} + v_n \underset{H.R.}{=} F_{n+1} + F_n = F_{n+2}$$

On obtient le résultat par récurrence.

Solution de l'exercice 8
On montrera ce résultat par récurrence forte.
Initialisation : Pour $n = 1$ $x + \dfrac{1}{x} \in \mathbb{Z}$
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x + \dfrac{1}{x}, \dots, x^n + \dfrac{1}{x^n}$ soient tous des entiers relatifs. Montrons que $x^{n+1} + \dfrac{1}{x^{n+1}} \in \mathbb{Z}$
Si on connaît les coefficients binomiaux alors il suffit de les utiliser. Sinon, on aura besoin uniquement des deux points suivants :

— Si on développe $(a+b)^{n+1}$ on obtient une formule de la forme $c_{0,n+1}a^{n+1}b^0 + c_{1,n+1}a^nb^1 + \dots + c_{n+1,n+1}a^0b^{n+1}$ où les $c_{k,n+1}$ sont des coefficients dans $\mathbb{N}^*$ indépendants de a et b. Pour s'en convaincre faire une récurrence. Remarquer aussi que $c_{0,n+1} = c_{n+1,n+1} = 1$ (il faut ne choisir que des a ou que des b lorsqu'on développe le produit).

— Vu que a et b jouent le même rôle, alors $c_{k,n+1} = c_{n+1-k,n+1}$ pour tout k

On notera dans ce qui suit $c_{k,n+1}$ par $\binom{n+1}{k}$ comme il est habituellement noté. Ce terme s'appelle un coefficient binomial et possède plusieurs propriétés algébriques et combinatoires. On se contentera des deux énoncées ci-haut.
Ainsi

$$x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^{n+1} - \binom{n+1}{1}x^n \cdot \frac{1}{x^1} - \dots - \binom{n+1}{n}x^1 \cdot \frac{1}{x^n}$$

$\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^{n+1} \in \mathbb{Z}$ sans soucis. Pour les autres termes, par la deuxième propriété, on peut rassembler les termes opposées en puissance puisque le coefficient devant eux est le même. Deux cas se présentent alors

— Soit n est pair, auquel cas chaque terme $\dfrac{x^k}{x^{n+1-k}}$ est rassemblé avec son opposé $\dfrac{x^{n+1-k}}{x^k}$ et leur somme est, par hypothèse de récurrence forte, un entier pour $1 \leqslant k \leqslant n$.
Bien entendu, le tout étant multiplié après par un coefficient binomial entier, on a donc un entier relatif.

— Soit n est impair, auquel cas la même chose survient sauf pour le terme au milieu qui lui est seul. Toutefois, ce terme en milieu est de la forme x^0 i.e. c'est un entier ce qui permet tout aussi bien de conclure.

2 Principe des tiroirs et de l'extremum (Angela)

Principe des tiroirs

Idée intuitive :
Soient n tiroirs et $n+1$ chaussettes rangées dans ces tiroirs. Il existe au moins un tiroir contenant au moins deux chaussettes.

Théorème 1 (principe des tiroirs)**.**
Plus généralement, si n éléments doivent être rangés dans k tiroirs, alors il existe au moins un tiroir qui contient au moins $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ éléments.

Note : $\lceil x \rceil$ désigne la partie entière supérieure, ie l'unique entier tel que $x \leqslant \lceil x \rceil < x+1$.

Exemple 2.
Combien d'enfants faut-il au minimum dans une école pour que l'on soit sûr que 3 d'entre eux au moins aient leur anniversaire le même jour ?
Si on a 733 élèves, alors par le principe des tiroirs on est assuré d'avoir au moins trois élèves qui ont la même date d'anniversaire (il y a 366 dates possibles). Ce nombre est minimal car il existe une configuration à 732 élèves sans avoir trois élèves avec la même date d'anniversaire.

Le principe des tiroirs est un principe très simple et intuitif mais dont les conséquences sont tout à fait impressionnantes. Ce type de raisonnement est principalement efficace pour des problèmes demandant la preuve de l'existence d'un élément. Évidemment, il faut savoir reconnaître les tiroirs et les chaussettes, ce qui peut être très difficile.

Exercice 1
Montrer que si 3 nombres réels sont dans l'intervalle $[0, 1[$, alors il existe parmi eux deux nombres a et b tels que $|b-a| < \frac{1}{2}$.

Exercice 2
Montrer que, parmi les stagiaires d'Animath de cette semaine, il en existe deux qui connaissent le même nombre d'autres stagiaires.

Exercice 3
Combien d'entiers au minimum doit-on sélectionner dans l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 20\}$ pour être sûr que cette sélection inclue deux entiers a et b tels que $a-b=2$?

Exercice 4

1. Montrer que quel que soit n, parmi $n+1$ entiers quelconques a_0, a_1, ... a_n, on peut en trouver deux a_i et a_j tels que $a_i - a_j$ soit divisible par n.

2. Montrer que pour tout n, il existe un multiple de n d'au plus n chiffres, tous égaux à 0 ou 1.

Exercice 5 (USAMTS 2018)
Chaque point du plan est colorié soit en rouge, soit en vert, soit en bleu. Montrer qu'il existe un rectangle dont tous les sommets sont de la même couleur.

Exercice 6
Sur une table rectangulaire de dimension $2m \times 1m$ sont réparties 500 miettes de pain. Prouver que l'on peut trouver trois miettes qui déterminent un triangle d'aire inférieure à $50cm^2$.

Exercice 7
Soit n un entier. On choisit $n+1$ nombres parmi $\{1, 2, \ldots, 2n\}$, montrer que l'on peut en trouver deux premiers entre eux.
Montrer qu'on peut aussi en trouver deux tels que l'un divise l'autre.

Exercice 8 (Bolzano-Weierstrass)
On considère une suite infinie de réel dans l'intervalle $[0, 1[$ $x_0, x_1, x_2, \ldots$.
— Montrer que soit l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right[$ soit l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$ contient une infinité d'éléments de la suite.
— Soit $\frac{1}{2} > \varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe au moins un rationnel $\alpha \in [0,1]$ tel qu'une infinité d'éléments de la suite se trouvent dans l'intervalle $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$

Exercice 9
On place 51 points au hasard sur un carré de côté 1. Montrer qu'on peut en trouver au moins 3 à l'intérieur d'un cercle de rayon $\frac{1}{7}$ (ce cercle peut déborder les cotés du carré).

Exercice 10
Montrer que le produit de cinq nombres entiers strictement positifs consécutifs ne peut pas être le carré d'un nombre entier.

Solution de l'exercice 1
En partitionnant l'intervalle en $\left[0, \frac{1}{2}\right[$ et $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$, On a par principe des tiroirs l'un des intervalles qui contient au moins 2 des 3 réels choisis, qui conviennent alors.

Solution de l'exercice 2
Soit n le nombre de stagiaires. Chaque stagiaire connaît entre 0 et $n-1$ autres stagiaires. Or il ne peut pas y avoir en même temps un stagiaire qui connaît $n-1$ autres personnes (donc tout le monde) et un qui ne connaît personne. Il y a donc $n-1$ possibilités du nombre de stagiaire qu'une personne peut connaître et par le principe des tiroirs il y a 2 personnes qui connaît le même nombre de stagiaires.

Solution de l'exercice 3
Considérons les tiroirs de la forme $\{1, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{5, 7\}$, $\{6, 8\}$, $\{9, 11\}$, $\{10, 12\}$, $\{13, 15\}$, $\{14, 16\}$, $\{17, 19\}$, $\{18, 20\}$. En choisissant 11 entiers, par le principe des tiroirs, il en existera deux qui seront dans le même tiroir, et donc de différence 2. Cette quantité est bien minimale car l'ensemble $\{1, 2, 5, 6, 9, 10, 13, 14, 17, 18\}$ est de taille 10 et ne contient pas de tels entiers a et b.

Solution de l'exercice 4

1. On classe les nombres dans les n classes modulo n : 1, 2,... $n-1$. Au moins une classe contient au moins deux entiers, donc leur différence est divisible par n.
2. On utilise ce premier résultat avec la suite : $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 11$, $a_3 = 111$,... etc : a_i est l'entier formé de i chiffres tous égaux à 1. Deux d'entre eux ont une différence multiple de n, et cette différence a au plus n chiffres tous égaux à 0 ou 1.

Solution de l'exercice 5
Traçons le rectangle plein à coordonnées entières de taille 4×82 dont le sommet en bas à gauche est $(0, 0)$. Il y a $3^4 = 81$ façons de colorier une colonne de 4 points. Par principe des tiroirs, parmi les 82 colonnes, il en existe 2 identiques. Or, sur ces deux colonnes, parmi les 4 points, deux sont de la même couleur. Il suffit alors de sélectionner ces quatre sommets et de tracer le rectangle adéquat.

Solution de l'exercice 6
On découpe la table en 200 petits carrés de côté 10cm. D'après le principe des tiroirs, dans au moins un de ces carrés, il y aura trois miettes, et ces miettes vont déterminer un triangle dont l'aire sera inférieure à la moitié de la surface du carré, ie $50cm^2$.

Solution de l'exercice 7

— En considérant les n tiroirs de la forme $\{2k-1, 2k\}$ où $1 \leq k \leq n$, on voit qu'on peut trouver deux entiers consécutifs qui seront premiers entre eux.

— Chaque entier peut s'écrire sous la forme $2^s(2t+1)$. Or t varie entre 0 et $n-1$, il existe alors deux entiers parmi les $n+1$ choisis qui ont la même partie impaire et qui ne diffèrent que par la puissance de 2. L'un divise donc l'autre.

Solution de l'exercice 8
Pour la première question, il s'agit d'une simple application du principe des tiroirs dans le cas où l'on a une infinité de chaussettes.
La seconde question se résout de la même façon : commençons par choisir $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Prenons pour tiroirs les ensembles $\left[0, \frac{1}{2^n}\right]$,...,$\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$,...,$\left[\frac{2^n-1}{2^n}, 1\right]$. Par principe des tiroirs infinis, l'un de ces tiroirs contient une infinité d'éléments, et notons α son milieu. Cet intervalle est alors inclus dans $[\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon]$, ce qui achève la démonstration.

Solution de l'exercice 9
Couvrir un carré avec des cercles est moins facile que le couvrir avec des carrés. Découpons le carré en 25 petits carrés de côté $\frac{1}{5}$. Comme la diagonale chaque petit carré vaut $\frac{\sqrt{2}}{5} < \frac{2}{7}$, le carré peut être inclus dans un cercle de rayon $\frac{1}{7}$. D'après le principe des tiroirs, on peut trouver 3 points à l'intérieur d'un petit carré, qui se trouve dans un cercle de rayon $\frac{1}{7}$.

Solution de l'exercice 10
Soient a, b, c, d, e des entiers consécutifs tels que $abcde$ soit un carré, et p un nombre premier plus grand ou égal à 5. Si l'un des nombres est multiple de p, alors aucun des autres nombres ne l'est, donc ce nombre est multiple de p^2.

Chacun de ces nombres appartient à l'une de ces catégories, selon le nombre de facteurs 2 et 3 :

1. un carré ;
2. deux fois un carré ;
3. trois fois un carré ;
4. six fois un carré.

Par le principe des tiroirs, une des catégories contient deux nombres. Si ces deux nombres sont dans les catégories 2, 3 ou 4, alors leur différence vaut au moins 6.
Si ces deux nombres sont des carrés, alors ce sont 1 et 4, ce qui ne laisse que $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$, qui n'est pas un carré.

Principe de l'extremum

Le principe de l'extremum consiste à considérer le minimum ou le maximum d'une certaine quantité. Il est très efficace pour réaliser des raisonnements par l'absurde.

Théorème 3 (Principes du maximum)**.**

— Tout ensemble fini non vide de nombres réels admet un plus petit élément ainsi qu'un plus grand élément.

— Tout ensemble non vide d'entiers naturels admet un plus petit élément.

Exemple 4.
Montrer que l'ensemble des réels appartenant à l'intervalle $]0,1]$ n'admet pas de minimum.
On rappelle qu'un ensemble A admet m pour minimum si :

— $m \in A$

— $\forall\, x \in A,\ \ x \geqslant m.$

Démonstration : Supposons par l'absurde que m soit le minimum de $]0,1]$.
Notons que $1 \geqslant m > 0$ donc $1 > \frac{1}{2} \geqslant \frac{m}{2} > 0$, et $\frac{m}{2} \in]0,1]$. Or $m > \frac{m}{2}$, ce qui contredit la minimalité de m. Donc $]0,1]$ n'admet par de minimum.

Exercice 11
A chaque point à coordonnées entières d'un plan fini, on attribue un nombre entier strictement positif, tel que chaque nombre est égal à la moyenne arithmétique de ses quatre voisins (en haut, en bas, à gauche et à droite). Montrer que toutes les valeurs sont égales.

Exercice 12
Soit S un ensemble de points tel que tout point de S est le milieu d'un segment dont les extrémités sont dans S. Montrer que S est infini.

Exercice 13
À un tournoi, chaque compétitrice rencontre chaque autre compétitrice exactement une fois. Il n'y a pas de match nul. À l'issue de la compétition, chaque joueuse fait une liste qui contient les noms des joueuses qu'elle a battues, ainsi que les noms des joueuses qui sont battues par les joueuses qu'elle a battues.
Montrer qu'il existe une liste qui contient le nom de toutes les autres joueuses.

Exercice 14
On considère un ensemble T de $2n$ points du plan. Montrer qu'il est possible de relier les points par paire de sorte que deux segments ne se croisent pas.

Exercice 15
On considère un ensemble fini A de personnes. Deux personnes dans A ayant le même nombre d'amis n'ont aucun ami commun. Montrer qu'il existe une personne dans A qui possède exactement un ami dans A.

Exercice 16
A un stage, chaque élève connaît exactement trois autres élèves. Prouvons qu'on peut partager les élèves en deux groupes de sorte que chacun ne connaisse qu'une seule personne dans son groupe.

Exercice 17
Sept amis ont ramassé en tout cent champignons, chacun en a ramassé un nombre différent. Montrer qu'il en existe trois parmi eux qui ont ramassé à eux trois au moins 50 champignons.

Exercice 18
Lors d'une soirée dansante, aucun garçon n'a dansé avec toutes les filles, mais chaque fille a dansé avec au moins un garçon. Montrer que il existe deux garçons g, g' et deux filles f, f' tq g a dansé avec f mais pas avec f', et g' a dansé avec f' mais pas avec f.

Solution de l'exercice 11
Il existe un minimum des entiers écrit sur l'un des points, ses quatre voisins sont supérieurs ou égaux à celui ci, ce qui n'arrive que si ils sont tous égaux à lui. Donc ses 4 voisins sont égaux au minimum, puis de proche en proche toutes les cases du plan doivent être égales.

Solution de l'exercice 12
On considère le segment de distance maximale $[AB]$, et le segment $[CD]$ de milieu B. On voit que soit le segment $[AC]$ soit $[AD]$ est plus long que $[AB]$, contradiction.

Solution de l'exercice 13
Soit A la joueuse ayant gagné le plus de matchs. S'il n'existait pas de liste contenant le nom de toutes les autres joueuses, il existerait une joueuse B ayant gagné contre A ainsi que contre toutes les personnes battues par A. Comme B n'est pas sur la liste de A, les joueuses battues par les battues de A ont aussi perdu contre B. Donc B aurait gagné plus de matchs que A, absurde.

Solution de l'exercice 14
Parmi toutes les configurations, on considère celle qui minimise les distances des segments. Si deux segments se croisent, on peut les décroiser et diminuer la somme des distances par inégalité triangulaire, absurde !

Solution de l'exercice 15
Soit B la personne de A qui possède le nombre maximal d'amis. Notons n le nombre d'amis qu'elle possède. Tous les amis de B l'ont comme ami commun, et ont donc tous un nombre d'amis différent. Ils sont au nombre de n, et ont chacun au moins un ami, B, et au plus n. Nécessairement, ils ont 1,2,..., n pour nombres d'amis. En particulier, il existe une personne ayant exactement 1 ami.

Solution de l'exercice 16
Parmi tous les partages possibles en deux groupes, regardons le nombre total de connaissances qu'il y a cumulées en restant à l'intérieur de son groupe. Choisissons le partage qui minimise ce nombre. Prouvons que celui-ci convient.
Par l'absurde, supposons que dans le partage il existe un élève A qui connaît au moins deux personnes dans son groupe. Dans l'autre groupe, il y a au plus une personne qu'il connaît : en changeant A de groupe on diminuerait ainsi le nombre total de connaissances qu'il y a cumulées en restant à l'intérieur de son groupe, ce qui contredit la minimalité supposée du partage initial.

Solution de l'exercice 17
On ordonne les amis par nombre de champignon différent, disons $a_1 > a_2 > \dots > a_7$. Si $a_4 \geq 15$, on a $a_3+a_2+a_1 \geq 16+17+18 = 51$, et c'est gagné. Donc $a_4 \leq 14$ et $a_4+a_5+a_6+a_7 \leq 14+13+12+11 = 50$, donc $a_1+a_2+a_3 \geq 50$, et on a gagné.

Solution de l'exercice 18
On considère le garçon g ayant dansé avec le plus de fille. On considère une fille f' avec qui il n'a pas dansé. f' a dansé avec un garçon g'. g' n'a pas pu dansé avec toutes les même filles que g par hypothèse. Donc on peut trouver f qui n'a pas dansé avec g' mais avec g.

3 Pavages, Coloriages et Invariants (Arthur)

Ce cours est inspiré du cours d'Aline Cahuzac de 2020 et du cours de Savinien Kreczman de 2021.

Invariants

Un invariant est une quantité (qui peut-être un nombre entier, un nombre réel, un nombre modulo n, un ensemble de nombres, une suite de nombres, ...), qui reste inchangée pendant les différentes étapes d'un processus. Cela permet de démontrer qu'une configuration n'est pas accessible à partir d'une autre.

Exercice 1
On écrit les nombres $2, 3, 5, 7, 11$ sur un tableau. En une opération, on peut remplacer deux nombres de même parité par deux copies de leur moyenne arithmétique. Peut-on obtenir 5 nombres égaux après un certain nombre d'opérations ?

Solution de l'exercice 1
On remarque que la somme est invariante, et que chaque nombre écrit au tableau au cours du processus est un entier. Si les 5 entiers sont égaux à la fin, la somme doit être divisible par 5 ce qui n'est pas le cas au début.

Exercice 2
On considère le tableau de signes suivant :

+	+	+	-
-	+	+	-
+	+	+	-
+	-	-	-

Une opération consiste à choisir une ligne ou une colonne et inverser les signes présents dedans. Est-il possible d'arriver en un nombre fini de coups à un tableau rempli de signes $+$?

Solution de l'exercice 2
Le nombre de $-$ est impair, on remarque que la parité du nombre de $-$ ne change pas pendant une opération. À la fin, on devrait avoir un nombre pair de $-$ (aucun), ce n'est donc pas possible.

Exercice 3
Peut-on répartir les nombres $1, 2, \ldots, 33$ en 11 groupes de 3 tels que dans chaque groupe, un des trois nombres soit la somme des deux autres ?

Solution de l'exercice 3
On remarque que la somme des nombres d'un groupe est toujours paire, alors que la somme de tous les nombres est impaire. C'est donc impossible.

Exercice 4
On vous donne 20 cartes, chacune contenant exactement un chiffre. Chaque chiffre apparaît sur exactement deux cartes. Est-il possible de réarranger les cartes de telles manière à ce que pour chaque chiffre i, il y a exactement i cartes entre les deux cartes qui contiennent i ?

Solution de l'exercice 4
Notons q la somme pour chaque type de carte du nombre de cartes entre les deux cartes de ce type. En ordonnant les cartes dans l'ordre

$$0, 1, 2, \ldots 9, 0, 1, 2, \ldots 9$$

on a $q = 90$. Lorsque l'on échange deux cartes consécutives, on ajoute $-2, 0$ ou 2 à q. Comme n'importe quelle configuration de cartes est atteignable en échangeant des cartes consécutives, s'il est possible de réarranger dans une configuration vailde, q devra être pair. Or, pour une configuration qui respecte la condition, on a :

$$q = 0 + 1 + \cdots + 9 = 45$$

qui est impair. C'est donc impossible.

Coloriages et pavages

Un certain nombre de problèmes de combinatoire sont des problèmes de "pavage". Dans un tel problème, l'objectif est de recouvrir une forme avec des tuiles de types donnés. Pour prouver l'impossibilité d'un tel recouvrement, il est souvent utile de considérer un coloriage de la forme à recouvrir, c'est à dire la donnée d'une couleur pour chaque case de la forme. On analyse ensuite pour chaque tuile quelles couleurs elle recouvre pour arriver à la conclusion. Lorsqu'on considère un tel problème, il est toujours utile de compter le nombre de cases de la forme, ainsi que de considérer le coloriage "en échiquier".

Exercice 5
Considérons un échiquier $n \times n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On en retire deux coins opposés. Peut-on le paver avec des dominos de taille 2×1 ?

Solution de l'exercice 5
On colorie l'échiquier en blanc et noir de telle manière à ce que les deux coins retirés soient de couleur noire. Si n est impair, le nombre de cases est impair alors que chaque domino recouvre un nombre pair de cases, c'est donc impossible. Si n est pair, il y a 2 cases blanches de plus que de cases noires, alors que chaque domino recouvre autant de cases blanches que de cases noires. C'est donc impossible.

Exercice 6
Pour quels $n \geqslant 1$ peut-on paver une grille carrée de taille $n \times n$ avec des pièces en forme de T (dont chacune recouvre 4 cases de la grille) sans qu'elles ne se recouvrent ni débordent ? Les rotations sont autorisées.

Solution de l'exercice 6
Comme chaque T recouvre 4 cases, la grille contient un nombre pair de cases, donc n est pair. Si on colorie la grille comme un échiquier, il y a donc autant de cases blanches que de cases noires. Il y a deux types de T : ceux qui recouvrent trois cases blanches et une case noire, et ceux qui recouvrent trois cases noires et une case blanche. Comme il y a autant de cases blanches que de cases noires, il y doit y avoir autant de T de type 1 que de T de type 2. Il y a donc un nombre pair de T. On obtient alors que $n \times n$ est divisible par 8, donc n est divisible par 4. Si n est divisible par 4, il est possible de couvrir la grille : on peut paver un carré 4×4 avec 4 T et répéter cette construction dans les deux directions. La grille est donc pavable si et seulement si n est divisible par 4.

Exercice 7
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour quels n, m peut on paver une grille $n \times m$ avec des dominos $1 \times k$? Les rotations sont autorisées.

Solution de l'exercice 7
Si k divise n ou m, alors il est possible de recouvrir le rectangle $n \times m$ en prenant toutes les tuiles dans la même direction. Montrons que si ce n'est pas le cas, il n'est pas possible de recouvrir la grille. On écrit le nombre $(x - y \mod k)$ sur la case aux coordonnées (x, y) ; on pense à chaque nombre comme étant une couleur. Chaque pièce $1 \times k$ recouvre exactement k cases ; une case de chaque couleur. Pour montrer l'impossibilité, il suffit donc de montrer qu'il y a une case de plus de la couleur 0 que de la couleur 1. Pour cela, on remarque que si on enlève les k dernières lignes ou les k dernières colonnes de la grille, on enlève autant de cases de chaque couleur. En répétant ce processus, il suffit de considérer le cas où $0 < n < k$ et $0 < m < k$. Supposons par symétrie $n < m$. On voit aisément qu'il y a n éléments de couleur 0, mais seulement $n - 1$ éléments de couleur 1, ce qui conclut.

Exercice 8
Votre petite soeur a colorié des carreaux sur votre cahier. Vous avez réussi à recouvrir exactement ces carreaux par des rectangles 2×2 et 1×4. Votre petite soeur déchire un rectangle 1×4, et il ne vous reste plus qu'un seul rectangle 2×2 en plus. Pouvez-vous réorganiser les rectangles pour à nouveau recouvrir tous les carreaux coloriés ?

Solution de l'exercice 8
On colorie les cases de la grille qui ont leur deux coordonnées paires en noir. Une tuile 2×2 recouvre exactement une case noire, alors qu'une tuile 1×4 recouvre 0 ou 2 cases noires. La parité du nombre de cases noires couvertes est donc égale à la parité du nombre de 2×2. Cette

parité change si on remplace un 2×2 par un 1×4 ou réciproquement, alors que la forme à couvrir ne change pas (donc la parité du nombre de cases noires ne change pas). C'est donc impossible.

Exercice 9
Partons de la séquence 10. En une opération, on peut soit insérer à un endroit une séquence de la forme XXX, où X est une séquence de 0 et de 1, soit supprimer une séquence du même type n'importe où. Peut-on arriver à la séquence 01 en un nombre fini d'opérations ?

Solution de l'exercice 9
On colore la séquence avec trois couleurs, dans l'ordre rouge, vert, bleu, rouge , vert, bleu, etc. Lorsqu'on ajoute ou supprime une séquence de la forme XXX quelque part, les couleurs des chiffres existants ne change pas. Ainsi, si on compte le nombre de 1 rouges, il n'est possible de le modifier que par un multiple de 3. En particulier, le nombre de 1 rouges modulo 3 est un invariant. Cet invariant vaut 1 dans la configuration initiale mais vaut 0 dans la configuration finale. Il n'est donc pas possible de passer de l'une à l'autre.

Monovariants

Un monovariant est une quantité qui diminue à chaque opération (ou augmente à chaque opération). Identifier un monovariant permet souvent de démontrer qu'un processus termine en un nombre fini d'opérations, ou qu'il n'est pas possible d'atteindre une certaine configuration depuis une configuration initiale donnée.

Exercice 10
On dessine des segments dans le plan, de telle manière que trois extrémités de segments ne soient jamais alignées. En une opération, on peut choisir deux segments qui s'intersectent $[AB]$ et $[CD]$. On les "décroise" alors en les remplaçant par $[AC]$ et $[BD]$. Démontrez qu'on ne peut effectuer qu'un nombre fini de telles opérations.

Solution de l'exercice 10
On remarque que lorsque l'on remplace $[AB]$ et $[CD]$ par $[AC]$ et $[BD]$ lorsqu'ils s'intersectent, on diminue la somme des longueurs strictement (on applique deux fois l'inégalité triangulaire). Il s'agit donc d'un monovariant. On ne peut donc pas repasser deux fois par la même configuration pendant le processus et il n'y a qu'un nombre fini de configurations possibles (ie. de manières de relier les points par des segments) ; on ne peut effectuer qu'un nombre fini d'opérations.

Exercice 11
On place un nombre fini de pierres sur une bande infinie de carrés. S'il y a au moins deux pierres sur la même case, on peut avancer une de ces pierres d'un carré et reculer une autre de ces pierres d'un carré. Est-il possible de retourner à la configuration de départ après avoir effectué un nombre fini de mouvements ?

Solution de l'exercice 11
On numérote les cases dans l'ordre avec des indices dans $\mathbb{Z}$. Considérons la quantité q qui vaut la somme pour chaque pierre de 2^i, où i est l'indice de la case sur laquelle se trouve la pierre. Cette quantité est bien définie. Lorsqu'on effectue une opération, on remplace deux pierres de valeur 2^i par une pierre de valeur 2^{i-1} et une pierre de valeur 2^{i+1}. Comme :

$$2 \times 2^i < 2^{i-1} + 2^{i+1}$$

La quantité q croît strictement à chaque étape. On ne peut donc pas revenir à la configuration initiale.

4 Équations fonctionnelles (Rémi)

Ce cours s'est déroulé en deux parties. Après une introduction rapide à la notion d'équation fonctionnelle, la première partie est participative, on cherche à résoudre ensemble l'équation de Cauchy sur $\mathbb{Z}$ puis $\mathbb{Q}$. Les exercies et leurs solutions servent donc de cours. Dans la deuxième partie, on présente quelques outils de base et on traite des exercices d'application.

Equation de Cauchy

Les équations fonctionnelles sont un des types de problèmes d'olympiades qui sont les plus éloignés des cours scolaires, et par conséquent un des plus durs à conceptualiser. Une équation fonctionnelle est une équation dans laquelle la solution recherchée n'est pas un entier ou un réel, mais une fonction. Pour illustrer ce concept, commençons par un exemple classique.

Exercice 1
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vérifiant

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, \qquad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Solution de l'exercice 1
L'astuce principale pour résoudre une équation fonctionnelle est la substitution. Si l'équation proposée est vraie pour tous entiers x et y, elle est vraie en particulier pour $x = 0$ et $y = 0$. Voyons à quoi cela nous mène...

$$f(0+0) = f(0) + f(0) \implies f(0) = 0$$

Magnifique ! On connaît déjà la valeur de f en 0. Ensuite, une autre astuce est de deviner les solutions. Ici, après quelques essais, on semble remarquer que les seules solutions sont les fonctions linéaires, les fonctions du type $f(x) = cx$ où c est une constante réelle. Pour tenter de le prouver, posons $f(1) = a$ et voyons ce que l'on peut en tirer.

En remplaçant y par 1 dans l'équation initiale, on a

$$f(x+1) = f(x) + f(1) = f(x) + a$$

En particulier, $f(2) = f(1+1) = f(1) + a = 2a$, puis $f(3) = f(2+1) = f(2) + a = 3a$, etc... En raisonnant par récurrence sur x, on peut alors montrer que $f(x) = ax$. En effet , l'initialisation est faite, et si l'on suppose le résultat vrai à un certain rang x, alors $f(x+1) = f(x) + a = ax + a = a(x+1)$

Finalement, on a montré que les seules solutions possibles étaient les fonctions linéaires, mais attention ! Cela ne permet pas encore de conclure. Face à une équation fonctionnelle, il faut toujours penser à vérifier les solutions une fois qu'on les a trouvées, parce que certaines sont peut-être impossibles.

Ici on voit bien que $f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y)$, donc toutes les fonctions linéaires sont solutions. Finalement, les solutions de cette équation fonctionnelle sont exactement les fonctions linéaires.

Passons à la suite : plus difficile, même énoncé, mais avec une légère modification : on cherche désormais les solutions non plus sur les entiers naturels, mais sur les rationnels.

Exercice 2
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ vérifiant

$$\forall x, y \in \mathbb{Q}, \qquad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Solution de l'exercice 2
En cherchant un peu, on se doute que les solutions vont être les mêmes que pour l'exercice précédent, à savoir les fonctions linéaires $f(x) = ax$, mais avec $a \in \mathbb{Q}$ cette fois. On peut évidemment commencer en s'appuyant sur l'exercice précédent, en affirmant qu'il existe un entier a tel que $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = an$. Déduisons-en quelques propriétés utiles : on peut par exemple montrer par récurrence sur n que, $\forall n \in \mathbb{N}$, et $q \in \mathbb{Q}$,

$$f(nq) = nf(q)$$

La récurrence est immédiate, en posant $x = nq$ et $y = q$. Ce résultat est vrai pour tout q, donc en particulier pour $q = \frac{1}{n}$, auquel cas on obtient :

$$f(1) = nf\left(\frac{1}{n}\right) \iff f\left(\frac{1}{n}\right) = a\frac{1}{n}$$

Maintenant, soient p et q des entiers strictement positifs. Alors :

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = pf\left(\frac{1}{q}\right) = a\frac{p}{q}$$

On a presque fini, mais attention, on a travaillé seulement avec des nombres positifs ! Il reste à faire une dernière observation, en posant $y = -x$, si x est positif, on obtient

$$f(0) = f(x) + f(-x) \implies f(-x) = -f(x) = -ax = a(-x)$$

Donc les seules solutions envisageables sur les rationnels sont aussi les fonctions linéaires, et on vérifie comme pour l'exercice précédent qu'elles sont bien toutes des solutions.

Remarque 1.
L'équation $f(x+y) = f(x) + f(y)$ est l'exemple le plus classique d'équation fonctionnelle et s'appelle l'équation de Cauchy. On ne l'étudie pas sur $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, car les solutions ne sont pas forcément caractérisables : il s'agit soit des fonctions linéaires, soit de fonctions horribles, discontinues en tout point. Un bon exercice est toutefois de montrer que les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation de Cauchy qui sont continues ou monotones (croissantes ou décroissantes) sont seulement les fonctions linéaires. On peut réutiliser librement ce qu'on a appris sur l'équation de Cauchy dans des exercices : si après diverses manipulations on tombe sur cette équation sur un domaine convenable ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$), on peut immédiatement conclure que les solutions sont linéaires (attention à ne pas oublier la vérification !)

Après cette introduction, on sait résoudre des équations fonctionnelles par substitution, donc passons à des exemples plus coriaces...

Exercice 3
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad f(x+y) = f(x) - f(y)$$

Exercice 4
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ vérifiant $f(0) = 0$ et

$$\forall x, y \in \mathbb{Q}, \qquad f(f(x) + f(y)) = x + y$$

Le problème suivant sert à présenter une astuce classique très pratique...

Exercice 5
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{N}, \qquad f(f(x)) = x + 1$$

Exercice 6
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ telles que pour tous réels x, y :

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)}{2} + \frac{f(y)}{2}$$

Solutions des exercices

Solution de l'exercice 3
Il suffit de poser $x = y$, et on obtient

$$f(2x) = f(x) - f(x) = 0$$

Pour $z = 2x$, z parcourt tout $\mathbb{R}$ et on a $f(z) = 0$. La seule solution est donc la fonction nulle, qui satisfait bien l'équation initiale

Solution de l'exercice 4
Si on prend $y = 0$, on obtient directement

$$f(f(x)) = x$$

Si on reprend l'équation initiale, on peut appliquer f aux deux membres, et on a

$$f(f(f(x) + f(y))) = f(x+y) \iff f(x) + f(y) = f(x+y)$$

Donc f satisfait l'équation de Cauchy, et comme $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, les seules solutions éventuelles sont les fonctions linéaires.

Attention ! C'est ici qu'il ne faut pas commettre l'erreur de conclure que les fonctions linéaires sont toutes solutions... En effet, supposons que $f(x) = ax$, alors dans l'équation initiale,

$$a(ax + ay) = x + y \iff a^2(x + y) = x + y$$

Donc $a^2 = 1 \iff a = \pm 1$. Finalement les seules solutions sont $f(x) = x$ et $f(x) = -x$

Solution de l'exercice 5
L'astuce est la suivante : calculer $f(f(f(x)))$ de deux manières distinctes.

Déjà, il est clair que

$$f(f(f(x))) = f(x + 1)$$

En effet, il suffit juste d'appliquer f de chaque côté de l'équation initiale.

D'autre part, on peut écrire, pour $y = f(x)$,

$$f(f(y)) = f(y) + 1 \implies f(f(f(x))) = f(x) + 1$$

Cette astuce n'est pas facile à visualiser mais est très utile et doit être maîtrisée. D'après les deux résultats suivants, on obtient :

$$f(x + 1) = f(x) + 1$$

Par une récurrence immédiate, si on pose $f(0) = c$, on obtient $f(x) = x + c$. Mais de nouveau, il ne faut pas crier victoire trop vite ! En effet, si l'on remplace cela dans l'équation initiale, on obtient

$$x + 2c = x + 1 \implies f(0) = c = \frac{1}{2}$$

Ceci est impossible, puisque f est à valeurs dans $\mathbb{N}$, donc il n'y a pas de solutions.

Solution de l'exercice 6
On remarque que si f est une solution, alors pour toute constante $c \in \mathbb{R}$, $f + c$ est aussi une solution. Quitte à remplacer f par $g : x \mapsto f(x) - f(0)$, on peut donc supposer que $f(0) = 0$. En posant $y = 0$, on obtient alors $f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x)}{2}$. L'équation initiale peut alors se réécrire $\frac{f(x+y)}{2} = \frac{f(x)}{2} + \frac{f(y)}{2}$, soit $f(x + y) = f(x) + f(y)$. On retrouve l'équation de Cauchy, dont les solutions sont les fonctions linéaires. Finalement, les solutions de l'équation initiale sont les fonctions affines, dont on vérifie réciproquement qu'elles conviennent bien.

Injectivité, surjectivité et bijectivité

On introduit désormais les notions essentielles de fonction **injective, surjective et bijective**. Ce sont des propriétés que l'on peut essayer de déduire de l'énoncé pour avoir des indices sur les solutions.

Définition 2. Une fonction est dite injective si les images par f de deux éléments distincts sont distinctes. Autrement si a et b appartiennent au domaine de définition de f et $a \neq b$, alors $f(a) \neq f(b)$. Tout élément de l'ensemble d'arrivée admet donc un unique antécédent.

Définition 3. Une fonction est dite surjective si tout élément de l'ensemble d'arrivée admet au moins un antécédent. Autrement dit, si $f : A \to B$, alors pour tout $y \in B$ il existe un $x \in A$ tel que $f(x) = y$.

Définition 4. Une fonction est dite bijective si elle est à la fois injective et surjective.

Remarque 5.
Une fonction est donc bijective si tout élément de l'ensemble d'arrivée admet un unique antécédent.

Remarque 6.
Pour montrer qu'une fonction est injective on utilise le plus souvent la contraposée : on montre que si deux éléments a et b vérifient $f(a) = f(b)$, alors $a = b$.

Remarque 7.
Pour montrer qu'une fonction est surjective, on essaie généralement de se ramener à une équation du type $f(A) = B$, où A et B sont des expressions qui dépendent d'une variable x. Si B parcourt tout l'ensemble d'arrivée de f quand x parcourt ce même ensemble alors f est surjective.

Exercice 7
Parmi les équations fonctionnelles suivantes, déterminer lesquelles n'admettent que des solutions injectives, surjectives ou bijectives :

1. $f(x + f(y)) = 2f(x) + y$
2. $f(f(x)) = 0$
3. $f(f(x)) = \sin(x)$
4. $f(x + y) = f(x)f(y)$

Solution de l'exercice 7
1. En posant $x = 0$ on obtient $f(f(y)) = 2f(0) + y$. Si $f(a) = f(b)$, alors $f(f(a)) = f(f(b))$, donc $2f(0) + a = 2f(0) + b$, d'où $a = b$. Ainsi f est injective. De plus, l'expression $2f(0) + y$ parcourt $\mathbb{R}$ quand y parcourt $\mathbb{R}$, donc f est surjective. Finalement, f est bijective.
2. Supposons par l'absurde que f soit surjective. Alors, pour $y \in \mathbb{R}$, on dispose de x tel que $f(x) = y$. Ainsi $f(y) = f(f(x)) = 0$. Autrement dit, l'image de tout élément par f est 0, donc f n'est pas surjective, absurde. Supposons par l'absurde que f soit injective. Alors si $x \neq y$, alors $f(x) \neq f(y)$. Mais alors $f(f(x)) = f(f(y)) = 0$, donc $f(x)$ et $f(y)$ ont la même image par f, absurde. Finalement, f n'est ni injective, ni surjective.
3. Si $f(0) = f(\pi)$, alors f n'est pas injective. Sinon, $f(f(0)) = \sin(0) = \sin(\pi) = f(f(\pi))$, donc f n'est pas injective. De plus $f \circ f$ est à valeurs dans $[-1, 1]$, donc n'est pas surjective, mais si f était surjective alors $f \circ f$ le serait aussi, donc f n'est pas surjective.
4. La fonction nulle est solution, donc f n'est ni injective, ni surjective.

Exercices d'application

Exercice 8
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ vérifiant

$$\forall x, y \in \mathbb{Q}, \qquad f(x + f(y)) = f(x) + y$$

Exercice 9
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x) \cdot f(y) = f(x - y)$$

Exercice 10
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telles que pour tout couple d'entiers (x, y),

$$f(x + f(y)) = f(x) - y$$

Solution des exercices

Solution de l'exercice 8
On commence par substituer x par 0. On obtient $f(f(y)) = y + f(0)$

On applique l'astuce de l'exercice 5, et on montre que

$$f(f(f(y))) = f(y + f(0)) = f(y) + f(0)$$

Ensuite on remplace y par 0 et on a

$$f(x + f(0)) = f(x)$$

En combinant les deux identités précédentes, on aboutit à

$$f(x) = f(x + f(0)) = f(x) + f(0) \iff f(0) = 0$$

En reprenant la première identité trouvée, on a alors

$$f(f(y)) = y$$

On sait donc que f est surjective. On revient à l'équation initiale. Soit $t \in \mathbb{Q}$. On choisit y tel que $t = f(y)$. Alors on sait que $f(t) = f(f(y)) = y$. On en déduit que pour tout x et pour tout t,

$$f(x + t) = f(x) + f(t)$$

Donc f satisfait l'équation de Cauchy, et les solutions sont nécessairement linéaires. Encore une fois, vérifions-les :

$$f(x) = ax \implies a(x + ay) = ax + y \implies a^2 y = y \implies a = \pm 1$$

Finalement, les seules solutions sont $f(x) = x$ et $f(x) = -x$

Solution de l'exercice 9
Pour $x = y = 0$, on trouve $f(0)^2 = f(0)$, donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$. Ensuite, pour $x = y$, on obtient $f(x)^2 = f(0)$. Si $f(0) = 0$, alors f est la fonction nulle. Sinon $f(0) = 1$, auquel cas $f(x) = 1$ ou $f(x) = -1$. Mais attention ! Cela ne suffit pas à dire que f est constante. En effet, il ne faut pas oublier de considérer les fonctions dites multigraphes, c'est-à-dire qui prennent la valeur 1 en certains points et -1 aux autres points. On pose alors $x = 0$, et on obtient $f(y) = f(-y)$, donc f est paire. Enfin, en posant $y = -x$, on aboutit à $f(x)f(-x) = f(2x)$, soit $f(2x) = f(x)^2 = 1$ par parité de f. Finalement, comme $2x$ parcourt $\mathbb{R}$ quand x parcourt $\mathbb{R}$, la seule solution possible dans ce cas est la fonction constante égale à 1. Les solutions au problème sont donc $x \mapsto 0$ et $x \mapsto 1$, dont on vérifie réciproquement qu'elles conviennent.

Solution de l'exercice 10
En prenant $x = 0$, on obtient $f(f(y)) = f(0) - y$, donc f est surjective. Soit a tel que $f(a) = 0$. En posant $y = a$, $f(x) = f(x) - a$, donc $a = 0$. Ainsi $f(f(y)) = -y$. Si $f(y) = z$, alors $f(z) = f(f(y)) = -y$, donc dans l'équation initiale on obtient $f(x + z) = f(x) + f(z)$. Comme f est surjective, cette équation est vraie pour tout x et pour tout z, donc f est linéaire. Mais en vérifiant avec $f(f(y)) = -y$, on constate qu'il n'y a aucune solution.

5 Comptage et TD Pot pourri (Aladin)

Objectif : Introduire les calculs liés au comptage et plus particulièrement aux coefficients binomiaux.

Produits, sommes et factorielles

On commence par rappeler très brièvement les premiers principes de comptage.

Le premier principe essentiel de la combinatoire est que pour effectuer des choix successifs et indépendants on *multiplie* le nombre de possibilités.

Exemple 1.
Dans un jeu de carte, si il y a 13 possibilités pour la valeur et 4 possibilités pour la couleur, alors il y a $13 \times 4 = 42$ cartes possibles.

Remarque 2. D'un point de vue des ensembles cela signifie que le cardinal d'un produit cartésien est le produit des cardinaux.

Si E et F sont de cardinaux finis alors

$$|E \times F| = |\{(e, f),\ e \in E, f \in F\}| = |E| \times |F|.$$

Le deuxième principe est que dans pour compter une disjonction en cas deux à deux disjoints, on effectue la somme des possibilités dans chaque cas.

Remarque 3. D'un point de vue des ensembles cela signifie que le cardinal d'une union disjointe est la somme des cardinaux.

Si A et B sont de cardinaux finis et $A \cap B = \emptyset$ alors

$$|A \bigsqcup B| = |A| + |B|.$$

Exemple 4.
Il y a 16 élèves dans le groupe B et 30 élèves dans le groupe C. De plus les deux groupes sont disjoints.

Pour choisir un·e élève dans le groupe B ou C on a $16 + 30 = 46$ possibilités.

Définition 5 (Factorielle)**.**
On définit la factorielle par

— $0! = 1$

— pour un entier n plus grand que 1

$$n! = n \times (n-1)!.$$

Exemple 6.
On a par exemple

$$\begin{aligned} 4! &= 4 \times (3!) = 4 \times 3 \times (2!) = 4 \times 3 \times 2 \times (1!) = 4 \times 3 \times 2 \times 1 \\ &= 24. \end{aligned}$$

On peut aussi la définir de manière plus succincte en utilisant le symbole produit

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k.$$

Exemple 7.
On a par exemple

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720.$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
$n!$	1	1	2	6	24	120	720	5040	40320	$\cdots$

TABLE IV.1 – Les premières valeurs de la factorielle.

L'utilisation en combinatoire est la suivante :

Proposition 8 (Factorielle et ordonnement)**.**
Il y a $n!$ possibilités pour ordonner n éléments.

Remarque 9. D'un point de vue des ensembles si E est un ensemble à n éléments cela signifie qu'il y a $n!$ fonctions bijectives entre $\{1, 2, \ldots, n\}$ et E.

Démonstration.
L'intuition est la suivante :

— Pour ordonner n éléments on choisit d'abord le premier, donc n possibilités.

— Une fois le premier choisit, on choisit le second parmi les restants soit $n-1$ possibilités.

— Une fois le premier et le second choisis, on choisit le troisième parmi les restants soit $n-2$ possibilités.

— On continue ainsi, etc.

— Pour l'avant dernier il faut le choisir parmi les $n-(n-2)$ restants c'est à dire 2 possibités.

— Pour le dernier il n'y en a qu'un seul restant, donc 1 possibilité.

Au total on a donc

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1 = n!$$

possibilités.

Une autre façon de procéder et d'effectuer une récurrence sur n.

Pour un entier naturel n soit $\mathcal{P}_n$ la proposition :

$$\mathcal{P}_n \ : \quad \text{il y a } n! \text{ possibilités pour ordonner } n \text{ éléments.}$$

Initialisation Pour $n = 0$ il y a bien une et unique possibilité pour ordonner zéro élément.

Hérédité Soit $n \geqslant 0$ et supposons $\mathcal{P}_n$ vraie, c'est à dire qu'il y a $n!$ possibilités pour ordonner n éléments.

Pour en ordonner $n+1$ on procède de la manière suivante :

— On choisit le premier, d'où $n+1$ possibilités.

— Une fois le premier choisi, il reste à ordonner les $(n+1)-1=n$ éléments restants. Par hypothèse de récurrence il y a alors $n!$ possibilités.

Au total on a donc

$$(n+1)\times(n!)$$

c'est à dire

$$(n+1)!$$

possibilités.

Conclusion On a donc $\mathcal{P}_0$ vraie et pour tout n, si $\mathcal{P}_n$ est vraie alors $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Donc, par récurrence, pour tout n, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

□

Coefficients binomiaux

Définition 10.
Soient n et k deux entiers. On note

$$\binom{n}{k}$$

le nombre de façons de choisir k éléments dans un ensemble de n éléments.

Remarque 11. Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ se prononce "k parmi n".

Exemple 12.
Soit n un entier.

Il y a n possibilités pour choisir 1 élément parmi n donc

$$\binom{n}{1}=1.$$

Proposition 13.
Soient k et n deux entiers.

Si $0\leqslant k\leqslant n$ on a

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Démonstration. On compte de deux manières différentes le nombre de possibilités pour obtenir un sous-ensemble *ordonné* de k éléments parmi n éléments.

Comptage 1 Afin d'obtenir un sous-ensemble de k éléments ordonné on commence par choisir le sous-ensemble sans ordre, soit $\binom{n}{k}$ possibilités.

Il reste à ordonner les k éléments choisis, c'est à dire $k!$ possibilités.

Au total on a donc

$$\binom{n}{k}k!$$

possibilités.

Comptage 2 On choisit le premier élément parmi les n, soit n possibilités. On choisit ensuite le second parmi les restants, soit $n-1$ possibilités, etc. On continue jusqu'au k-ème élément pour lequel il y a $n-(k-1)$ possibilités.

Au total on a donc

$$n \times (n-1) \times \cdots \times (n-(k-1))$$

possibilités.

Or

$$\begin{aligned} n \times (n-1) \times \cdots \times (n-(k-1)) &= n \times (n-1) \times \cdots \times (n-(k-1)) \times \frac{(n-k) \times \cdots \times 2 \times 1}{(n-k) \times \cdots \times 2 \times 1} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!}. \end{aligned}$$

Par double comptage on a donc

$$\binom{n}{k} k! = \frac{n!}{(n-k)!}$$

c'est à dire

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}.$$

□

Remarque 14. Cette formule explicite, si elle est parfois utile (elle entraîne par exemple que $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ est entier), est rarement le moyen le plus simple d'aborder un problème combinatoire.

Proposition 15.
Soient n un entier et k un entier entre 0 et n.

Alors :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Démonstration. Une preuve combinatoire est de remarquer que choisir k éléments parmi n revient à choisir les $n-k$ éléments "qu'on ne choisit pas".

Cela donne directement

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Une autre façon de procéder est d'utiliser la formule explicite :

$$\begin{aligned} \binom{n}{n-k} &= \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

□

1															
1	1														
1	2	1													
1	3	3	1												
1	4	6	4	1											
1	5	10	10	5	1										
1	6	15	20	15	6	1									
1	7	21	35	35	21	7	1								
1	8	28	56	70	56	28	8	1							
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1						
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1					
1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1				
1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1			
1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1		
1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1	
1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003	1365	455	105	15	1

FIGURE 5 – Le triangle de Pascal. À la n-ième ligne et k-ième colonne se trouve le coefficient binomial $\binom{n}{k}$.

Théorème 16 (Formule de Pascal)**.**
Soit n un entier et k un entier entre 1 et $n-1$.
Alors :

$$\boxed{\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}}.$$

Démonstration. On va compter de deux manières différentes le nombre de possibilités pour choisir k éléments dans un ensemble à n éléments.

Comptage 1 Il y a, par définition,

$$\binom{n}{k}$$

possibilités pour choisir k éléments parmi n.

Comptage 2 On choisit un élément quelconque, que l'on note α, un élément que l'on particularise.

Il y a alors deux types de sous-ensembles à k éléments : ceux qui contiennent α et ceux qui ne le contiennent pas.

— Choisir k éléments sans contenir α revient à choisir k éléments parmi les $n-1$ qui ne sont pas α. D'où
$$\binom{n-1}{k}$$
possibilités.

— Choisir k éléments et contenir α revient à choisir $k-1$ éléments parmi les $n-1$ qui ne sont pas α, puis à rajouter α. D'où
$$\binom{n-1}{k-1}$$
possibilités.

En sommant sur les deux cas on obtient donc
$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$
possibilités pour choisir k éléments parmi n.

Par double comptage on obtient donc
$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$

□

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

FIGURE 6 – Illustration de la formule de Pascal.

Remarque 17. Cette formule permet alors de construire de manière efficace le tableau de Pascal ligne par ligne.

Théorème 18 (Formule du binôme)**.**
Soit n un entier.

Soient a et b deux réels. Alors

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Démonstration. On procède par récurrence sur n et on utilise la formule de Pascal, cf le cours sur la récurrence. □

Pour les petits n on retrouve les identités remarquables bien connues :

— $(a+b)^0 = 1$

— $(a+b)^1 = a+b$

— $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

— $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

— $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

— etc.

En pratique la formule essentielle pour effectuer des comptages est la suivante :

Théorème 19 (Formule du binôme)**.**
Soit n un entier.

Alors

$$\boxed{(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k}.$$

Remarque 20. Pour x réel les deux formules du binôme sont équivalentes : dans un sens on prend $a = 1, b = x$ et dans l'autre, si $b \neq 0$, on prend $x = \frac{a}{b}$.

La formulation

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

est en fait la plus pratique à utiliser. En effet on peut voir cela non seulement comme une égalité dans $\mathbb{R}$, mais aussi comme une égalité de fonctions ou de polynômes, permettant par exemple de la dériver ou de regarder des égalités en terme de coefficients.

Résumé

On a donc vu quatre

— La définition combinatoire.

— La formule explicite.

— La formule de Pascal.

— La formule du binôme.

En théorie les quatre formules sont toutes équivalentes. On peut choisir n'importe laquelle comme définition et l'utiliser pour démontrer les trois autres.

En pratique, comme on le verra en TD, pour résoudre un exercice on pourra selon l'énoncé et les préférences personnelles en utiliser une plutôt que l'autre.

Petit mémo

— Le coefficient binomial

$$\binom{n}{k}$$

est $\boxed{\text{le nombre de façons de choisir } k \text{ éléments parmi } n}$.

On utilise cette définition dans les preuves combinatoires et pour les doubles comptages.

— On a la formule explicite

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

On l'utilise rarement en combinatoire.

— On a la formule de Pascal, très utile dans les récurrences

$$\boxed{\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}}.$$

On l'utilise pour les récurrences, notamment pour les récurrences sur le n des $\binom{n}{k}$.
Il est très fortement conseillé de faire un schéma avec le triangle de Pascal.

— On a la formule du binôme

$$\boxed{(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k}.$$

Il faut ensuite faire des produits, dérivées, des évaluations en des valeurs particulières de x, etc. afin d'obtenir des informations sur es coefficients binomiaux.

Exercices

Exercice 1
Quel est le coefficient de x^6 dans le développement de $(x+2)^8$

Solution de l'exercice 1
C'est : $\sum_{k=0}^{n} \binom{8}{6} 2^{8-6} = 112$.

Exercice 2
Soit $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Solution de l'exercice 2
On propose ici trois démonstrations différentes.
Double comptage
On compte de deux manière différentes le nombre total de sous-ensembles d'un ensemble à n éléments.

Comptage 1 Pour choisir un sous-ensemble on a pour chacun des n éléments 2 possibilités : le mettre dans le sous-ensemble ou non.
On a donc au total

$$\underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{n \text{ fois}} = 2^n$$

possibilités.

Comptage 2 Pour un entier k entre 0 et n on a $\binom{n}{k}$ sous-ensembles à k éléments. En sommant sur toutes les tailles de sous-ensembles possibles on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

On conclut donc que

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n}.$$

Formule du binôme
On a pour tout x réel, par la formule du binôme

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Avec $x = 1$ on obtient donc

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k$$

c'est à dire

$$\boxed{2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}}.$$

Récurrence
Procédons par récurrence sur $n \geqslant 1$.
Pour n un entier posons $\mathcal{P}_n$ la proposition

$$\mathcal{P}_n \ : \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Initialisation Pour $n = 1$ on a

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} = \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 1 + 1 = 2^1$$

donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité Soit un entier $n \geqslant 1$ et supposons $\mathcal{P}_n$ vraie.
On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} &= \binom{n}{0} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{n+1} \\
&= 2 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} \\
&= 2 + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n+1-1}{k-1} + \binom{n+1-1}{k} \right) \\
&= 2 + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} \right) + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \right) \\
&= 2 + \left(\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{k} \right) + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \right) \\
&= 2 + \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{k} \right) + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \right) \\
&= 2 + (2^n - 1) + (2^n - 1) \\
&= 2^{n+1}.
\end{aligned}$$

Conclusion On a donc $\mathcal{P}_1$ est vraie et pour tout $n \geqslant 1$ $\mathcal{P}_n$ implique $\mathcal{P}_{n+1}$.
Donc par récurrence pour tout n la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie i.e

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n}.$$

Exercice 3
Soient k et n deux entiers plus grands que 1.
Montrer que

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

Solution de l'exercice 3
Méthode combinatoire
Comptons de deux manière différente le nombre de possibilités de choisir dans une classe de n élèves un groupe de k élèves avec un·e chef·fe par groupe.

Comptage 1 — On choisit d'abord le groupe de k élèves parmi les n de la classe on a

$$\binom{n}{k}$$

possibilités.

— Une fois fixé le groupe il faut choisir un·e chef·fe parmi les k c'est à dire

$$k$$

possibilités.

On a donc au total

$$\binom{n}{k} \times k$$

possibilités au total.

Comptage 2 — On choisit d'abord un·e chef·fe parmi les n élèves. On a donc

$$n$$

possibilités.

— Une fois fixé le·a chef·fe il faut choisir les $k-1$ élèves parmi les $n-1$ élèves restants. Soit

$$\binom{n-1}{k-1}$$

possibilités.

On a donc

$$n \times \binom{n-1}{k-1}$$

possibilités.

Conclusion Par double comptage on a donc

$$\boxed{k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}}.$$

<u>Formule du binôme</u>

Attention cette démonstration nécessite une certaine familiarité avec la notion de *polynôme* et n'est donc a priori pas accessible au groupe B.

La formule du binôme donne l'égalité polynomiale

$$(1+X)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k.$$

En dérivant on obtient donc

$$n(1+X)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k X^{k-1}$$

c'est à dire par la formule du binôme de nouveau

$$n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}X^k = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}kX^{k-1}$$

c'est à dire après une renumérotation

$$\sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}X^{k-1} = \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}kX^{k-1}.$$

Par égalité des coefficients on obtient donc que pour tout k

$$\boxed{k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}}.$$

Expression explicite
On a

$$\begin{aligned}
k\binom{n}{k} &= k\frac{n!}{k!(n-k)!} = k \times \frac{n\times(n-1)!}{k\times(k-1)!\times(n-k)!}\\
&= n\times\frac{(n-1)!}{(k-1)!\times(n-k)!} = n\times\frac{(n-1)!}{(k-1)!\times((n-1)-(k-1))!}\\
&= n\binom{n-1}{k-1}
\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\boxed{k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}}.$$

Récurrence

Ici la récurrence est plus subtile étant donné qu'il y a deux variables n et k.

Comme on s'attend à utiliser la formule de Pascal on effectue une récurrence sur n. Et pour chaque n la proposition concernera tous les k.

Pour un entier n on pose $\mathcal{P}_n$ la proposition

$$\mathcal{P}_n \ : \qquad \textbf{pour tout } k,\ k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

Initialisation Pour $n = 1$ on a bien :

— Pour $k = 1$, $1\binom{1}{1} = 1 = 1\binom{0}{0}$.

— Pour $k > 1$, $k\binom{1}{k} = 0 = 1\binom{0}{k-1}$.

Donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité Soit $n \geqslant 1$ et supposons $\mathcal{P}_n$ vraie.

Soit $k \geqslant 1$ quelconque.

Si $k = 1$ alors on a bien $1\binom{n}{1} = n = n\binom{n-1}{0}$.

Considérons désormais $k \geqslant 2$.
Alors par la **formule de Pascal**

$$\begin{aligned} k\binom{n+1}{k} &= k\left(\binom{n+1-1}{k-1} + \binom{n+1-1}{k}\right) \\ &= (k-1)\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k-1} + k\binom{n}{k}. \end{aligned}$$

On utilise alors **l'hypothèse de récurrence** $\mathcal{P}_n$ pour obtenir

$$\begin{aligned} (k-1)\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k-1} + k\binom{n}{k} &= n\binom{n-1}{k-2} + \binom{n}{k-1} + n\binom{n-1}{k-1} \\ &= n\left(\binom{n-1}{k-2} + \binom{n-1}{k-1}\right) + \binom{n}{k-1}. \end{aligned}$$

En appliquant de nouveau la **formule de Pascal**

$$\begin{aligned} n\left(\binom{n-1}{k-2} + \binom{n-1}{k-1}\right) + \binom{n}{k-1} &= n\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k-1} \\ &= (n+1)\binom{n+1-1}{k-1}. \end{aligned}$$

Au final on obtient donc bien

$$k\binom{n+1}{k} = (n+1)\binom{n+1-1}{k-1}$$

et ce quel que soit k, c'est à dire $\mathcal{P}_{n+1}$.

Conclusion On a donc $\mathcal{P}_1$ est vraie et pour tout $n \geqslant 1$ $\mathcal{P}_n$ implique $\mathcal{P}_{n+1}$.

Donc par récurrence pour tout n la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie i.e pour tous k et n

$$\boxed{k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}}.$$

Exercice 4
Soit n un entier.
Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

Solution de l'exercice 4

Pour $n = 0$ on a bien $0 = 0$. Supposons désormais que $n \geqslant 1$.

On utilise les deux exercices précédents.
Par l'exercice 2 pour tout $k \geqslant 1$ on a

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

d'où

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} n\binom{n-1}{k-1} \\ &= n\sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{k-1}.\end{aligned}$$

On utilise alors l'exercice 1

$$n\sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{k-1} = n2^{n-1}.$$

Et donc on a bien

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}}.$$

On peut aussi proposer des preuves qui ne font pas référence aux deux exercices précédents (même si les résultats des exercices 1 et 2 sont à connaître). Voici les idées générales :

Double comptage

On compte de deux manière différentes combien de groupes d'élèves avec un·e chef·fe peut-on former parmi n élèves.

D'un coté pour chaque taille de groupe k on choisit d'abord un groupe puis le ou la chef·fe dans le groupe qui donne au total $\binom{n}{k} \times k$. Puis on somme sur toutes les tailles possibles ce qui donne donc

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}.$$

De l'autre coté on choisit d'abord le ou la chef·fe soit n possibilités. Puis on rajoute un groupe quelconque parmi les $n-1$ restant·es soit 2^{n-1}. Au total on a donc

$$n2^{n-1}$$

possibilités.

Ce qui donne bien le résultat.

Par récurrence

Il s'agit d'une récurrence similaire aux exercices précédents.

Formule du binôme

On a **pour tout** x réel

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{k}{n}x^k.$$

Comme les deux termes sont dérivables (car fonctions polynomiales) en *dérivant* par rapport à x on obtient que pour tout x réel

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{k}{n}x^{k-1}.$$

Ensuite, en évaluant en $x=1$ on obtient

$$n(1+1)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{k}{n}1^{k-1}$$

c'est à dire (comme $0\binom{n}{0}=0$)

$$\boxed{n2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}}.$$

Exercice 5
Soit n un entier.

Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}.$$

<u>*Solution de l'exercice 5*</u>
Il est en fait plus facile de calculer la somme suivante :

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}.$$

Ensuite il reste à remarquer que

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n}(k(k-1)+k)\binom{n}{k}\\ &= \left(\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}\right)\end{aligned}$$

la deuxième somme valant $n2^{n-1}$ par l'exercice précédent.

Pour calculer $\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$ on procède de manière similaire à l'exercice 3.

<u>En utilisant les exercices 1 et 2</u>

On a pour tout k plus grand que 2

$$\begin{aligned}
k(k-1)\binom{n}{k} &= (k-1)\left(k\binom{n}{k}\right) \\
&= (k-1)\left(n\binom{n-1}{k-1}\right) \\
&= n\left((k-1)\binom{n-1}{k-1}\right) \\
&= n\left((n-1)\binom{n-2}{k-2}\right)
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} &= \sum_{k=2}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{k-2} \\
&= n(n-1)\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2} \\
&= n(n-1)\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j} \\
&= n(n-1)2^{n-2}
\end{aligned}$$

et donc on conclut que

$$\boxed{\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}}.$$

Formule du binôme

On a **pour tout** x réel, par la formule du binôme

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

et comme les deux membres sont dérivables, en dérivant par rapport à x on obtient que **pour tout** x réel

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1}.$$

De même en dérivant de nouveau par rapport à x on obtient que pour tout x

$$n(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}k(k-1)x^{k-2}.$$

En évaluant en $x=1$, comme $1+1=2$ on en déduit que

$$\boxed{\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}}.$$

Double comptage

On compte de deux manières différentes le nombre de possibilités de former un groupe d'élève avec un·e chef·fe et un·e second·e dans une classe de n élèves.

Comptage 1 On choisit d'abord le ou la chef·fe, ce qui donne n possibilités.

Parmi les élèves restants on choisit le ou la second·e, ce qui donne $n-1$ possibilités.

Il reste ensuite à choisir un sous-ensemble quelconque parmi ler $n-2$ élèves restants, soit $n-2$ possibilités.

Au total on a donc

$$n(n-1)2^{n-2}$$

possibilités.

Comptage 2 Pour k fixé on regarde tout d'abord combien il existe de tels groupes de taille k.

On choisit d'abord les k élèves ce qui donne $\binom{n}{k}$ possibilités.

On choisit ensuite un·e chef·fe dans le groupe donc k possibilités.

Puis on choisit un·e seconde parmi les membres lu groupe hors chef·fe, donc $k-1$ possibilités.

On obtient donc $k(k-1)\binom{n}{k}$ possibilités.

Et en sommant sur toutes les tailles possibles on a finalement

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}.$$

Et donc par double comptage

$$\boxed{\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}}.$$

Exercice 6

Soient k et N deux entiers.

Montrer que

$$\sum_{n=k}^{N} \binom{n}{k} = \binom{N+1}{k+1}.$$

Solution de l'exercice 6

On **fixe** k et on procède par récurrence sur $N \geqslant k$ à l'aide de la formule de Pascal (il est très conseillé de faire un schéma).

Initialisation Pour $N = k$ on a

$$\sum_{n=k}^{k} \binom{n}{k} = \binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1}$$

donc $\mathcal{P}_k$ est vraie.

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

FIGURE 7 – Illustration de l'exercice.

Hérédité Soit $N \geqslant k$, supposons $\mathcal{P}_k$ vraie. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{n=k}^{N+1}\binom{n}{k} &= \left(\sum_{n=k}^{N}\binom{n}{k}\right)+\binom{N+1}{k}\\ &= \binom{N+1}{k+1}+\binom{N+1}{k}\\ &= \binom{N+2}{k+2}\end{aligned}$$

Exercice 7
Soit n un entier.

Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}.$$

Solution de l'exercice 7
On commence par réécrire la somme

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}.$$

Considérons un ensemble à $2n$ élément et comptons de deux manières différentes le nombre de sous-ensembles à n éléments.

— On peut tout d'abord choisir simplement n éléments parmi $2n$ ce qui donne

$$\binom{2n}{n}.$$

— On sépare l'ensemble en n éléments bleus et n éléments rouges.
On compte pour k entre 0 et n le nombre de façons d'en choisir n dont k bleus.

Il faut d'abord en choisir k bleus c'est à dire $\binom{n}{k}$ possibilités puis $n-k$ rouges soit $\binom{n}{n-k}$ possibilités.
On a donc

$$\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$$

possibilités.
Comme le nombre d'éléments bleus est en fait quelconque en sommant sur tous les k on obtient finalement

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}.$$

et donc par double comptage on a

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}=\binom{2n}{n}}.$$

Exercice 8
Soit n un entier plus grand que 1.
Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0.$$

Solution de l'exercice 8
On a par la formule du binôme

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=(1-1)^n=0^n=0.$$

Exercice 9
On considère un ensemble à n éléments.
Combien existe-t-il de sous ensembles de cardinal impair ?

Solution de l'exercice 9
Notons I_n le nombre de sous-ensemble de cardinal impair et P_n le nombre de sous-ensembles de cardinal pair.
On sait déjà que

$$I_n+P_n=2^n.$$

Montrons que $I_n=P_n$.
Avec la formule du binôme
On a déjà vu que

$$(1-1)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=\sum_{\substack{k\in\{1,\dots,n\}\\ k\text{ pair}}}\binom{n}{k}-\sum_{\substack{k\in\{1,\dots,n\}\\ k\text{ impair}}}\binom{n}{k}$$

c'est à dire

$$0 = P_n - I_n.$$

Quelque soit la méthode on conclut donc que

$$\begin{cases} I_n + P_n & = 2^n \\ I_n - P_n & = 0 \end{cases}$$

et donc

$$\boxed{I_n = 2^{n-1}}.$$

Exercice 10
Combien y a t il de façons de distribuer $k+n$ polycopiés identiques à n élèves afin que chaque élève en reçoive au moins un ?

Solution de l'exercice 10
Notons n le nombre d'élèves et $k+n$ le nombre de polycopiés.
On commence par distribué un polycopié à chaque élève.
Il reste ensuite à en distribuer k de manière quelconque à n élève.
Notons les polycopié par des ronds et traçons $n-1$ traits.
Le nombre de ronds entre deux traits correspond alors à un élève.
[Faire schéma]
Il faut donc choisir $n-1$ bâtons parmi au total $k+(n-1)$ points ou bâtons.
On obtient finalement

$$\boxed{\binom{n+k-1}{n-1}}$$

possibilités.

Exercice 11
On considère un échiquier 8×8.
Combien y a t il de façons de placer 6 tours telle que deux tours ne soient jamais sur la même ligne ou même colonne ?

Solution de l'exercice 11
Notons n la taille de l'échiquier et k le nombre de tours.
Choisissons d'abord les k colonnes des tours. On a $\binom{n}{k}$ possibilités. On choisit ensuite les lignes des tours une à une ce qui donne $n \times (n-1) \times \cdot \times (n-k+1)$ possibilités.
Au total on a donc

$$\binom{n}{k} \times n \times (n-1) \times \cdot \times (n-k+1) = \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!}$$

ce qui peut se réécrire

$$\boxed{\binom{n}{k}^2 k!}.$$

Avec les valeurs numériques de l'énoncé on obtient donc

$$\binom{8}{6}^2 6! = (28)^2 \times 720 = 564\,480.$$

6 Inégalités (Angela et Émile)

Inégalité arithmético-géométrique

Théorème 1 (Inégalité arithmético-géométrique)**.**
Soient a, b deux réels. Alors on a

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geq ab$$

avec égalité si et seulement si $a = b$.

Remarque 2.
Si a et b sont deux réels strictement positifs, on a

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

avec égalité si et seulement si $a = b$.

Exercice 1
Soit $a > 0$. Montrer que

$$a + \frac{1}{a} \geq 2.$$

Quand a-t-on égalité ?

Exercice 2
Soient a, b, c des réels. Montrer que

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

Exercice 3
Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels positifs dont le produit vaut 1. Montrer que

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n) \geq 2^n.$$

Théorème 3 (Inégalité arithmético-géométrique généralisée)**.**
Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels positifs. On a

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}$$

avec égalité si et seulement si $a_1 = \ldots = a_n$.

Exercice 4
Soient a, b, c, d des réels positifs tels que $abcd = 1$. Montrer que

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd \geq 10$$

et déterminer les cas d'égalité.

Exercice 5
Soient a, b, c des réels positifs tels que $(a+1)(b+1)(c+1) = 8$. Montrer que $a + b + c \geq 3$ et $abc \leq 1$. Quand a-t-on égalité ?

Exercice 6
Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels positifs. On définit leur moyenne arithmétique par

$$m = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n},$$

leur moyenne géométrique par

$$g = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

et leur moyenne harmonique par

$$h = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$

Vérifier que ces moyennes m, g et h sont toutes trois comprises entre $\max\{a_1, \ldots, a_n\}$ et $\min\{a_1, \ldots, a_n\}$, et montrer que $h \leqslant g \leqslant m$. Dans quels cas deux de ces moyennes sont-elles égales ?

Exercice 7
Soient a, b, c des réels positifs tels que $abc = \frac{1}{8}$. Montrer que

$$a^2 + b^2 + c^2 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq \frac{15}{16}.$$

Trouver les cas d'égalité.

Exercice 8
Soient a, b, c, d des réels positifs tels que $a + b + c + d = 1$. Montrer que

$$\frac{bcd}{(1-a)^2} + \frac{acd}{(1-b)^2} + \frac{abd}{(1-c)^2} + \frac{abc}{(1-d)^2} \leq \frac{1}{9}$$

et déterminer les cas d'égalité.

Inégalité du réordonnement

Théorème 4 (Inégalité du réordonnement)**.**
Soit $n \geq 1$ un entier, $a_1 \geq \ldots \geq a_n$ et $b_1 \geq \ldots \geq b_n$ des nombres reéls. Soit $c_1, \ldots, c_n$ une permutation des $b_1, \ldots, b_n$. Alors on a

$$a_1b_1 + \ldots + a_nb_n \geq a_1c_1 + \ldots + a_nc_n \geq a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_nb_1.$$

Exercice 9

— Démontrer l'inégalité arithmético-géométrique avec 2 variables en utilisant l'inégalité du réordonnement.

— Résoudre l'exercice 2 en utilisant l'inégalité du réordonnement.

Exercice 10
Soient $a_1, \ldots, a_n$ des entiers strictement positifs distincts deux-à-deux. Montrer que

$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \ldots + \frac{a_n}{n} \geq n.$$

Exercice 11 (Inégalité de Tchebychev)
Montrer que si $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n$ et $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n$, alors :

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \geqslant \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n).$$

Exercice 12
Si a, b et c sont trois réels strictement positifs, montrer que $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} \geqslant \dfrac{3}{2}$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 5 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.**
Soient $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ des réels. Alors on a

$$(a_1b_1 + \ldots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + \ldots + b_n^2)$$

avec égalité si et seulement si les vecteurs $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots, b_n)$ sont proportionnels, c'est-à-dire que $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$ ou il existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout indice i, $b_i = \lambda a_i$.

Exercice 13
Soit n un entier strictement positif, $e_1, \cdots, e_n$ des réels quelconques et $f_1, \cdots, f_n$ des réels strictement positifs. Montrer que :

$$\frac{e_1^2}{f_1} + \cdots + \frac{e_n^2}{f_n} \geqslant \frac{(e_1 + \cdots + e_n)^2}{f_1 + \cdots + f_n}$$

Déterminer les cas d'égalité.

Exercice 14
Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels positifs. Montrer que

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}$$

et déterminer les cas d'égalité.

Solution de l'exercice 1

En appliquant l'inégalité du théorème 1 à $\sqrt{a}$ et $\frac{1}{\sqrt{a}}$, on a $\frac{a+\frac{1}{a}}{2} \geq 1$, d'où l'inégalité recherché. On a égalité pour $\sqrt{a} = \frac{1}{\sqrt{a}}$, c'est-à-dire $a = 1$.

Solution de l'exercice 2

En appliquant le théorème 1 on a :

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geq ab$$
$$\frac{b^2+c^2}{2} \geq bc$$
$$\frac{c^2+a^2}{2} \geq ca$$

En additionnant ces 3 inégalités on obtient le résultat voulu.

Solution de l'exercice 3

Pour tout entier i entre 1 et n, on applique le théorème 1 à 1 et $\sqrt{a_i}$:

$$1 + a_i \geq 2\sqrt{a_i}$$

D'où

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geq 2\sqrt{a_1} \cdot 2\sqrt{a_2} \cdot \ldots \cdot 2\sqrt{a_n} = 2^n\sqrt{a_1a_2\ldots a_n} = 2^n$$

Solution de l'exercice 4

En applicant l'inégalité arithmético-géométrique (IAG) on a :

$$a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ac+ad+bc+bd+cd \geq 10\sqrt[10]{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot d^2 \cdot ab \cdot ac \cdot ad \cdot bc \cdot bd \cdot cd} = 10\sqrt[10]{(abcd)^5} = 10$$

Dans le cas d'égalité, on a en particulier $a^2 = b^2 = c^2 = d^2$. Comme tous les nombres sont positifs, on a $a = b = c = d$. Comme $abcd = 1$, on a $a^4 = 1$ donc $a = b = c = d = 1$. Réciproquement, on vérifie que cela convient.

Solution de l'exercice 5

On applique l'inégalité arithmético-géométrique dans les deux sens. D'un côté, on a :

$$2 = \sqrt[3]{(a+1)(b+1)(c+1)} \leq \frac{a+1+b+1+c+1}{3}$$

ce qui donne, en réarrangeant les termes,

$$a+b+c \geq 3.$$

Pour la deuxième inégalité, on applique l'inégalité arithmético-géométriqueà chaque facteur du membre de gauche pour obtenir $a+1 \geq 2\sqrt{a}$ et de même pour les autres variables pour avoir

$$8 = (a+1)(b+1)(c+1) \geq 8\sqrt{abc}$$

d'où

$$abc \leq 1.$$

Solution de l'exercice 6
Posons α et β les minimum et maximum des a_i respectivement. Pour tout i, on a $\alpha \leq a_i \leq \beta$ d'où

$$\begin{cases} \alpha = \frac{n\alpha}{n} \leq m \leq \frac{n\beta}{n} = \beta \\ \alpha = \sqrt[n]{\alpha^n} \leq g \leq \sqrt[n]{\beta^n} = \beta \\ \alpha = \frac{n}{\frac{n}{\alpha}} \leq h \leq \frac{n}{\frac{n}{\beta}} = \beta \end{cases}.$$

L'inégalité $g \leq m$ est exactement l'inégalité arithmético-géométrique, pour laquelle on a égalité si et seulement si tous les a_i sont égaux. Montrons alors $h \leq g$. Par l'inégalité arithmético-géométrique, on a

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n}}$$

c'est-à-dire $\frac{1}{h} \geq \frac{1}{g}$ donc $h \leq g$. De même, on a égalité si et seulement si tous les a_i sont égaux.

Solution de l'exercice 7
L'astuce ici est de remarquer que $a = b = c = \frac{1}{2}$ est un cas d'égalité de l'inégalité, et que donc toutes les inégalités utilisées doivent avoir cette solution comme cas d'égalité. On écrit donc, par l'inégalité arithmético-géométrique,

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = \frac{3}{4}$$

et

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq 3\sqrt[3]{a^4b^4c^4} = \frac{3}{16}.$$

Ainsi, en combinant, on trouve bien

$$a^2 + b^2 + c^2 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq \frac{15}{16}.$$

Solution de l'exercice 8
On écrit, par l'inégalité arithmético-géométrique :

$$bcd \leq \left(\frac{b+c+d}{3}\right)^3 = \frac{(1-a)^3}{27}.$$

Alors on a

$$\frac{bcd}{(1-a)^2} + \frac{acd}{(1-b)^2} + \frac{abd}{(1-c)^2} + \frac{abc}{(1-d)^2} \leq \frac{1}{27}(1-a+1-b+1-c+1-d) = \frac{1}{9}.$$

Solution de l'exercice 9

— Soient a et b des réels. Par symétrie, on peut supposer $a \leq b$. Alors on pose $a_1 = b_1 = a$ et $a_2 = b_2 = b$ pour appliquer l'inégalité du réordonnement

$$a^2 + b^2 \geq ab + ba = 2ab.$$

— Soient a, b, c des réels. Par symétrie de l'inégalité, on peut supposer $a \leq b \leq c$. On pose alors $a_1 = b_1 = a$, $a_2 = b_2 = b$ et $a_3 = b_3 = c$ et on considère une permutation $c_1 = b, c_2 = c, c_3 = a$ pour avoir

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

Solution de l'exercice 10

Réordonnons $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ en $b_1 < b_2 < \cdots < b_n$. Comme les a_i sont des entiers strictement positifs, on a $b_1 \geq 1$. Sachant que les a_i sont distincts, on peut montrer par récurrence que pour tout k entre 1 et n, on a $b_k \geq k$. Comme $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ est une permutation de $(a_1,\ a_2,\ \cdots\ a_n\ )$, on peut appliquer l'inégalité du réordonnement :

$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n} \geq \frac{b_1}{1} + \frac{b_2}{2} + \cdots + \frac{b_n}{n} \geq 1 + 1 + \cdots + 1 = n$$

On présente une preuve alternative avec l'inégalité arithmético-géométrique. On a

$$\frac{a_1}{1} + \ldots + \frac{a_n}{n} \geq n \sqrt[n]{\frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{n!}}.$$

Comme $a_1, \ldots, a_n$ sont des entiers strictement positifs deux-à-deux distincts, leur produit vaut au moins $n!$, et on a donc le résultat.

Solution de l'exercice 11

On considère les indices modulo n, c'est-à-dire que l'on pose $a_{n+i} = a_i$ et $b_{n+i} = b_i$ lorsque ce n'est pas défini. Alors pour tout i entre 0 et $n-1$, on peut utiliser l'inégalité du réordonnement pour écrire

$$a_1 b_{1+i} + a_2 b_{2+i} + \ldots a_n b_{n+i} \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n.$$

En sommant toutes ces inégalités pour i entre 0 et $n-1$, on obtient

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) \leq n(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)$$

donc l'inégalité de Tchebychev en divisant par n.

Solution de l'exercice 12

Comme les 3 variables jouent des rôles symétriques, on peut supposer $a \geq b \geq c$. Alors $a + b \geq a + c \geq b + c$, donc $\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{a+c} \leq \frac{1}{b+c}$. En appliquant l'inégalité du réordonnement, on obtient :

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} + \frac{a}{a+b}$$

et

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b}$$

En additionnant les 2 inégalités ci-dessus, on a

$$2(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}) \geq \frac{b+c}{b+c} + \frac{c+a}{c+a} + \frac{a+b}{a+b} = 3$$

D'où le résultat.

Solution de l'exercice 13
Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec $a_i = \frac{e_i}{\sqrt{f_i}}$ et $b_i = \sqrt{f_i}$. On a alors

$$(f_1 + f_2 + \ldots + f_n)(\frac{e_1^2}{f_1} + \ldots + \frac{e_n^2}{f_n}) \geq (e_1 + e_2 + \ldots + e_n)^2$$

et le résultat découle en divisant par la somme des f_i. On a égalité lorsque les a_i sont proportionnels aux b_i. C'est équivalent à dire que tous les e_i sont nuls ou qu'il existe un réel λ avec pour tout i,

$$\sqrt{f_i} = \lambda \frac{e_i}{\sqrt{f_i}}$$

ou encore que les e_i et les f_i sont proportionnels.

Solution de l'exercice 14
On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec les a_i et les $b_i = 1$ pour avoir

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 \leq (1^2 + 1^2 + \ldots + 1^2)(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)$$

donc en prenant la racine carrée et en divisant par n, on obtient

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}.$$

2 Entraînement de mi-parcours

Veuillez rédiger chaque problème sur une copie différente. N'oubliez pas d'écrire votre nom et chaque numéro d'exercice. Les calculatrices sont interdites.

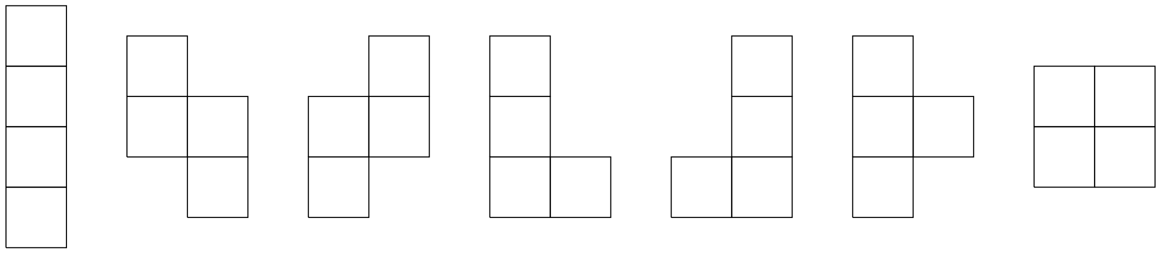
Exercice 1
Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ telles que

$$f(x+y) = 2f\left(\frac{x}{2}\right) + 3f\left(\frac{y}{3}\right)$$

pour tous les rationnels x et y.

Exercice 2
Soit A un ensemble de 12 entiers distincts entre 1 et 30. Montrer qu'il existe quatre nombres deux à deux distincts dans A tels que la somme de deux d'entre eux est égale à la somme des deux autres.

Exercice 3
On considère tous les 7 tétraminos comme ci-dessous.



Émile dispose de 2023 exemplaires de chaque tétramino. En s'autorisant à tourner les pièces, peut-il disposer toutes les pièces entre elles, sans se chevaucher, afin qu'elles forment un rectangle plein ?

Exercice 4
Soient a, b, c trois réels strictement positifs tels que $abc = 1$. Montrer que

$$\frac{1+ab}{1+a} + \frac{1+bc}{1+b} + \frac{1+ca}{1+c} \geqslant 3.$$

<u>Solution de l'exercice 1</u>
Soit f une fonction solution du problème. Alors en substituant $x = y = 0$, on trouve $f(0) = 5f(0)$ donc $f(0) = 0$. En posant $x = 0$, on a pour tout rationnel y,

$$f(y) = 3f\left(\frac{y}{3}\right).$$

De même, en posant $y = 0$, on a pour tout rationnel x,

$$f(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right).$$

L'équation se réécrit alors, pour tous rationnels x et y,

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

On reconnaît l'équation de Cauchy, donc f est linéaire, de la forme $f(x) = ax$. Réciproquement, les fonctions linéaires sont bien solution.

Solution de l'exercice 2

Il y a $\binom{12}{2} = \frac{12\times 11}{2} = 66$ manières de choisir deux nombres de A différents. Or, la somme de deux nombres de A vaut au moins 1 + 2 = 3 et au plus $29 + 30 = 59$, donc elle peut prendre 57 valeurs différentes. D'après le principe des tiroirs, il existe quatre nombres a, b, c, d dans A tels que $\{a, b\} \neq \{c, d\}$ et $a + b = c + d$. Ils sont bien deux à deux distincts car si par exemple $a = c$ alors $b = d$ donc $\{a, b\} = \{c, d\}$, ce qui contredit l'affirmation précédente.

Solution de l'exercice 3

Supposons par l'absurde que l'on ait un rectangle que l'on puisse paver par les 7×2023 tetraminos. On colorie les cases de la grille en damier. Alors dans chaque tetramino autre que ceux en "T", il y a 2 cases blanches et 2 cases noires, et dans celui en "T", il y a 3 cases d'une couleur et 1 de l'autre. Alors le nombre de cases noires dans les tetraminos est de même parité que le nombre de tetraminos en "T", c'est-à-dire 2023. Il y a alors un nombre impair de cases noires dans le rectangle. Mais le nombre de cases du rectangle est $4 \times 7 \times 2023$ donc le nombre de cases noires est $2 \times 7 \times 2023$ qui est pair, absurde.

Solution de l'exercice 4

On remarque que la condition $abc = 1$ permet d'écrire $1 + a = a(1 + bc)$, et de même pour les autres variables. On a alors, avec l'inégalité arithmético-géométrique à 3 variables :

$$\begin{aligned}\frac{1+ab}{1+a} + \frac{1+bc}{1+b} + \frac{1+ca}{1+c} &\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{(1+ab)(1+bc)(1+ca)}{a(1+bc)b(1+ac)c(1+ab)}} \\ &= 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} = 3.\end{aligned}$$

3 Deuxième partie : Arithmétique & Géométrie

1 Divisibilité, PGCD et nombres premiers (Matthieu Bo.)

Le cours reprend dans les grandes lignes celui de 2019, disponible sur le lien : https://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2019/08/PolycopieV1-1.pdf#subsection.4.1.1. Voici la correction des exercices traités pendant le cours.

Exercices traités

Exercice 1
Trouver tous les entiers $n \in \mathbb{Z}$ tels que $n+1 \mid n^2+1$.

Exercice 2
Pour des entiers strictement positifs m et n, montrer que $PGCD(2^m-1, 2^n-1) = 2^{PGCD(m,n)} - 1$.

Exercice 3
Trouver tous les $n \in \mathbb{N}^*$ tels que n^3+n-2 est une puissance de 2.

Exercice 4
Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4k+3$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 5
Soit $k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, soient a et b deux entiers premiers entre eux tels que ab est une puissance k-ième d'entier. Montrer que a et b sont des puissances k-ième d'entiers.

Solutions

Solution de l'exercice 1
L'entier n vérifie la propriété demandée si et seulement si $n+1 \mid n^2+1-(n+1)(n-1) = 2$. Les diviseurs de 2 sont $-2, -1, 1, 2$ donc les solutions sont $-3, -2, 0, 1$.

Solution de l'exercice 2
Par symétrie des rôles, on peut supposer sans perte de généralité que $m \geq n$. On a alors :

$$PGCD(2^m-1, 2^n-1) = PGCD(2^m-1-2^{m-n}(2^n-1), 2^n-1) = PGCD(2^{m-n}-1, 2^n-1)$$

Une récurrence immédiate fournit $PGCD(2^m-1, 2^n-1) = PGCD(2^{m-nq}-1, 2^n-1)$ pour tout $q \in \mathbb{N}$ tel que $m \geq nq$. En particulier, si r est le reste de la division euclidienne de m par n, alors

$$PGCD(2^m-1, 2^n-1) = PGCD(2^r-1, 2^n-1)$$

On reconnaît alors la suite des restes successifs de l'algorithme d'Euclide : en notant $x_0 = m$ et $y_0 = n$, puis (x_a, y_a) la liste des couples successifs, pour tout $a \geq 1$ on a :

$$PGCD(2^{x_{a-1}}-1, 2^{y_{a-1}}-1) = PGCD(2^{x_a}-1, 2^{y_a}-1)$$

On a finalement $PGCD(2^m-1, 2^n-1) = PGCD(2^{PGCD(m,n)}-1, 2^0-1) = 2^{PGCD(m,n)}-1$.

Remarque : Ce résultat reste valable en remplaçant 2 par n'importe quel entier $a \geq 2$.

Solution de l'exercice 3
Soit n une éventuelle solution. Alors $n^3 + n - 2 = (n-1)(n^2 + n + 2)$ donc $n - 1$ et $n^2 + n + 2$ sont des puissances de 2. Comme $n - 1 < n^2 + n + 2$, nécessairement $n - 1 \mid n^2 + n + 2$. On en déduit que $n - 1 \mid n^2 + n + 2 - (n-1)(n+2) = 4$. Les diviseurs positifs de 4 sont $1, 2, 4$ donc les seules valeurs possibles pour n sont $2, 3, 5$. En testant chaque possibilité, seuls 2 et 5 conduisent à des solutions.

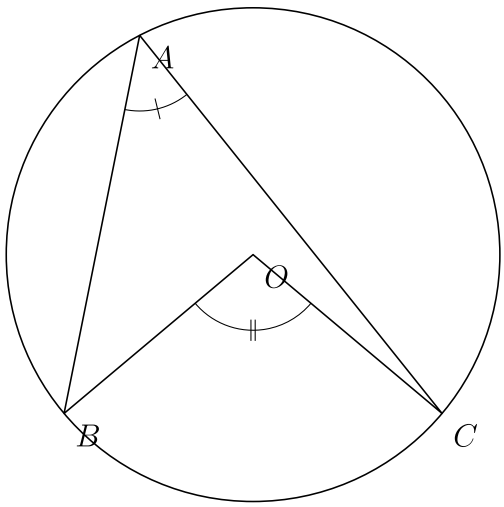
Solution de l'exercice 4
On raisonne par l'absurde en supposant qu'il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers de cette forme. Notons P leur produit et décomposons $N = 4P - 1$ en facteurs premiers : nécessairement tous ses diviseurs premiers sont congrus à 1 modulo 4 donc leur produit aussi. Ainsi, $4P = N + 1$ est de la forme $4k + 2$, impossible ! Il y a donc une infinité de nombres premiers de la forme $4k + 3$.

Solution de l'exercice 5
Pour tout p premier, $k \mid v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$. Pour tout p premier tel que $v_p(a) \neq 0$, on a $v_p(b) = 0$ car a et b sont premiers entre eux, donc $k \mid v_p(a)$. Ainsi, $k \mid v_p(a)$ pour tout p premier ! De la même façon, $k \mid v_p(b)$ pour tout p premier : a et b sont donc des puissances k-ièmes d'entiers.

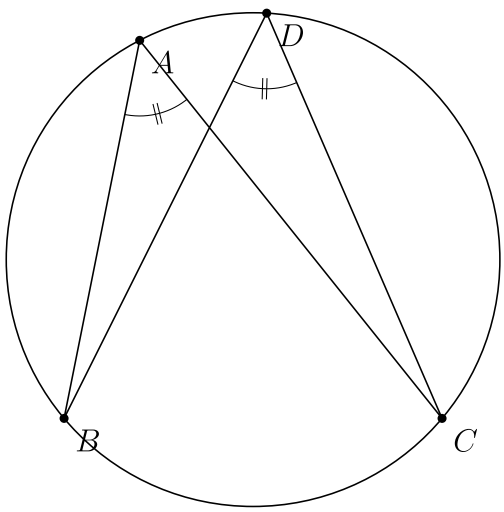
2 Chasse aux angles (Domitille et Benoît)

Eléments de chasse aux angles

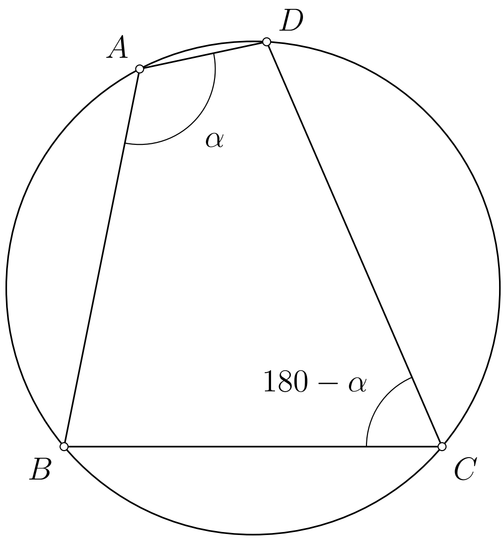
Proposition 1 (Angle au centre)**.**
Soit ABC un triangle et O le centre de son cercle circonscrit. Alors $\widehat{BOC} = 2 \cdot \widehat{BAC}$.



Proposition 2 (Angle inscrit)**.**
Soient A, B, C, D quatre points cycliques dans cet ordre.
Alors $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$

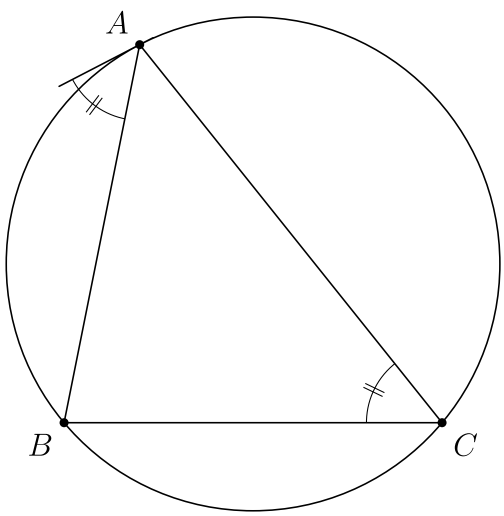


Ce théorème existe également sous une autre version :



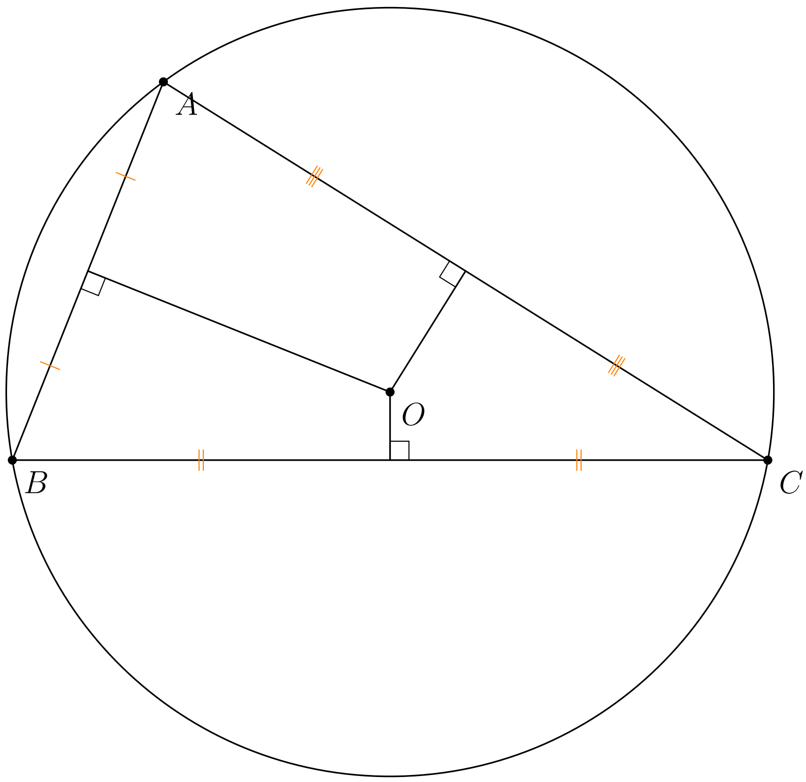
Ici, $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180$

Proposition 3 (Tangente)**.**
Le dernier théorème fondamental à connaître est le théorème de la tangente :

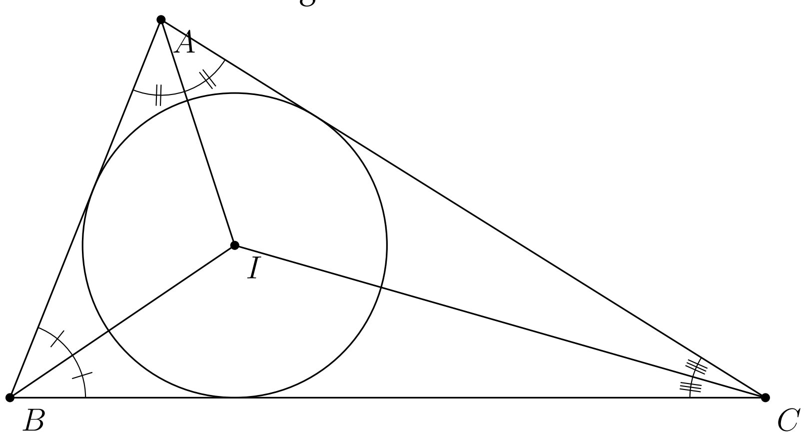


Rappels sur les points particuliers dans un triangle

Proposition 4.
Les médiatrices d'un triangle sont concourantes. Le point de concours est le centre du cercle circonscrit du triangle.

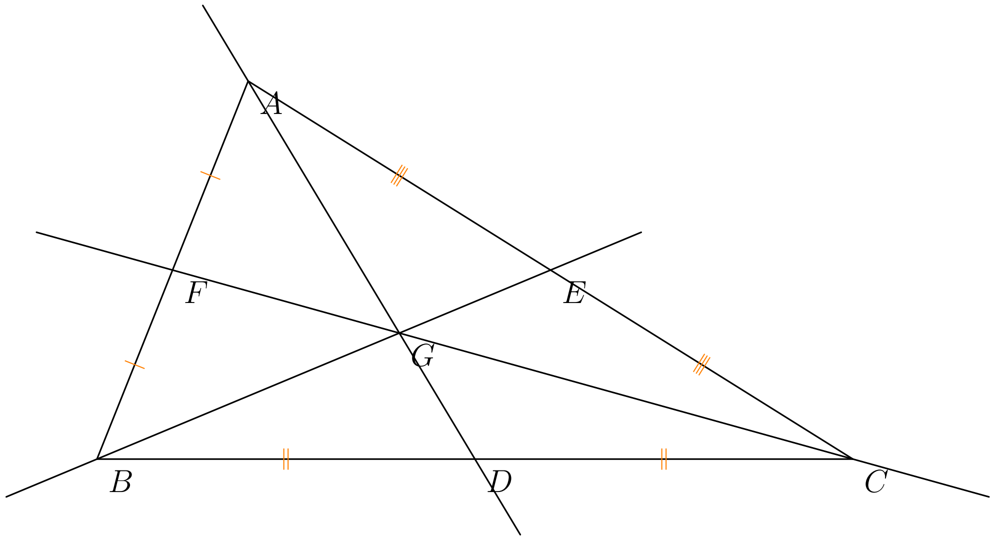


Proposition 5.
Les bissectrices des angles d'un triangle sont concourantes ; le point de concours est le centre du cercle inscrit au triangle.



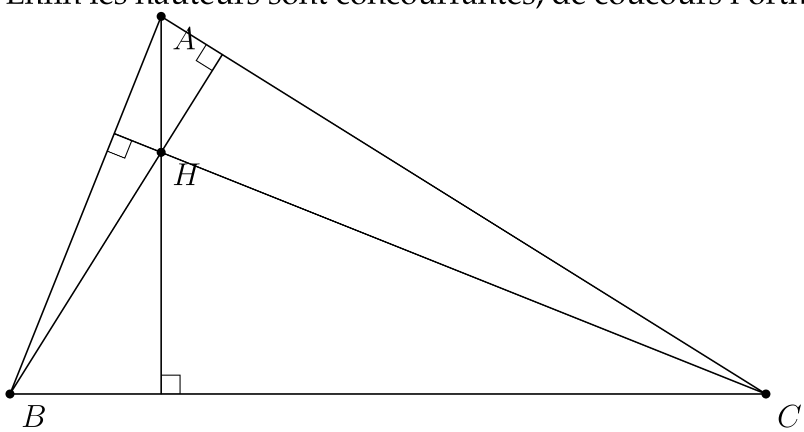
Proposition 6.

Les trois médianes du triangle sont concourantes. Le point de concours est le centre de gravité



Proposition 7.

Enfin les hauteurs sont concourrantes, de coucours l'orthocentre.



Exercice 1
Soit ABC un triangle. Soient A' et B' les pieds des hauteurs issus respectivement de A et B et H l'orthocentre de ABC.
Montrer que $AA'B'B$ et $CA'HB'$ sont cycliques.

Exercice 2
Soit Γ_1 et Γ_2 deux cercles sécants en A et B. Soit X un point situé à l'extérieur de ces deux cercles. La droite (XA) coupe les cercles Γ_1 et Γ_2 respectivement en C et E; la droite (XB) coupe les cercles Γ_1 et Γ_2 respectivement en D et F.
Prouver que (CD) et (EF) sont parallèles.

Exercice 3
Soit ABC un triangle, O le centre du cercle circonscrit et H l'orthocentre.
Prouver que $\widehat{BAO} = \widehat{CAH}$

Exercice 4
Soit ABC un triangle inscrit dans le cercle Γ.

Soit D le pied de la bissectrice issue de A. Soit P le point d'intersection de la tangente de Γ en A avec BC.
Montrer que PAD est isocèle en P.

Exercice 5
Soit ABC un triangle, P un point de $[BC]$, Q un point de $[CA]$, R un point de $[AB]$. Les cercles circonscrits à AQR et à BRP ont pour second point d'intersection X. Montrer que X est aussi sur le cercle circonscrit à CQP

Exercice 6
Soit ABC un triangle. Les bissectrices des angles de sommets A et B rencontrent les côtés BC et AC respectivement en D et E. Soit F la projection orthogonale de C sur BE et G la projection orthogonale de C sur AD. Montrer que (FG) et (AB) sont parallèles.

Exercice 7
Soit Γ_1 et Γ_2 deux cercles se coupant en A et B distincts. On note O le centre d Γ_1. Soit C un point de Γ_1 distinct de A et B, D et E les intersections de Γ_2 respectivement avec (AC) et (BC) . Montrer que (OC) et (DE) sont perpendiculaires.

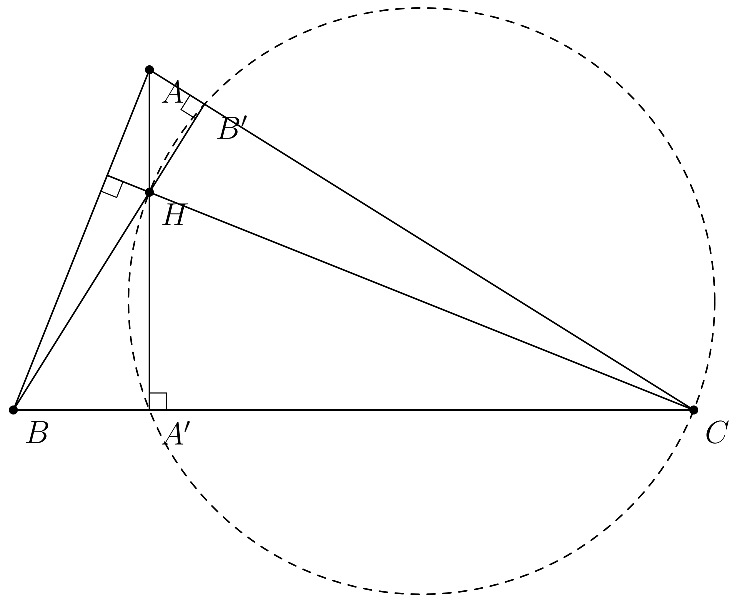
Exercice 8
Soit Ω_1 un cercle tangent intérieurement en en second cercle Ω_2. On note A le point de tangence. Soit P un point de Ω_2. On consière les tangentes à Ω_1 passant par P : la première coupe Ω_1 en X et recoupe Ω_2 en Q, la seconde coupe Ω_1 en Y et recoupe Ω_2 en R. Montrer que $\widehat{QAR} = 2 \cdot \widehat{XAY}$

Exercice 9
Soit un demi-cercle de diamètre $[AB]$ sur lequel on choisit deux points C et D. Soit S l'intersection de (AC) et (BD) et T le pied de la perpendiculaire à $[AB]$ issue de S. Montrer que (ST) est la bissectrice de $\widehat{CTD}$.

Exercice 10
Soit Γ un cercle et $[BC]$ une corde de ce cercle. On note A le milieu de l'arc BC. Soit D et E deux points du cercle qui ne sont pas sur l'arc de A. On considère F et G les points d'intersection respectifs des cordes $[AD]$ et $[AE]$ avec BC. Montrer que D, E, F, G sont cocycliques.

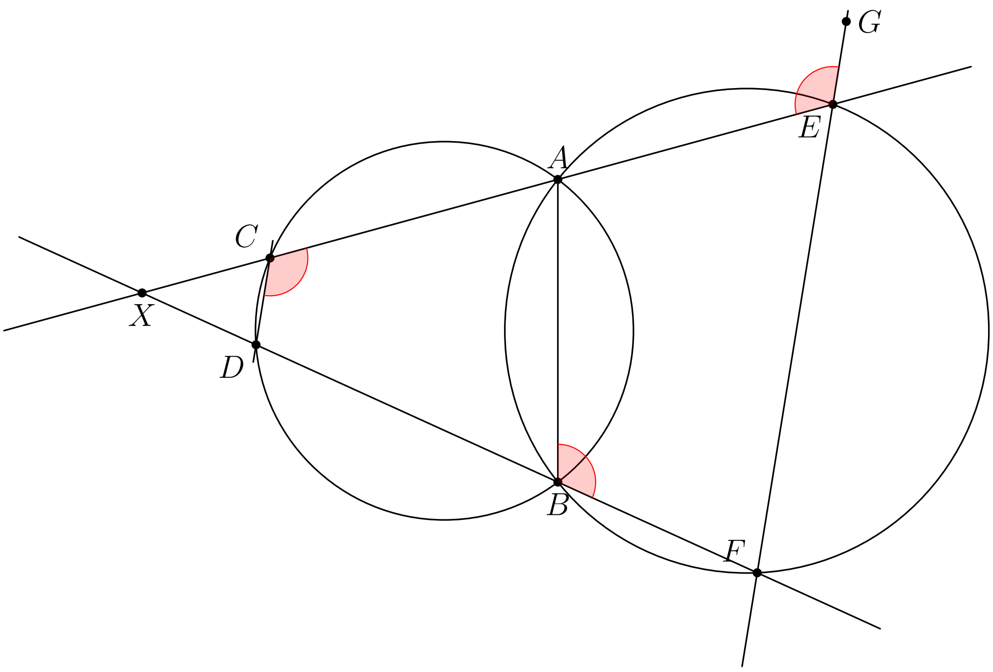
Exercice 11
Soit Γ un cercle de centre O et $ABCD$ quatre points sur Γ.
Les diagonales du quadrilatère $ABCD$ s'intersectent en P.
Les cercles circonscrits aux triangles ABP et CDP s'intersectent en Q.
Montrer que l'angle $\widehat{OQP}$ est droit.

Solution de l'exercice 1



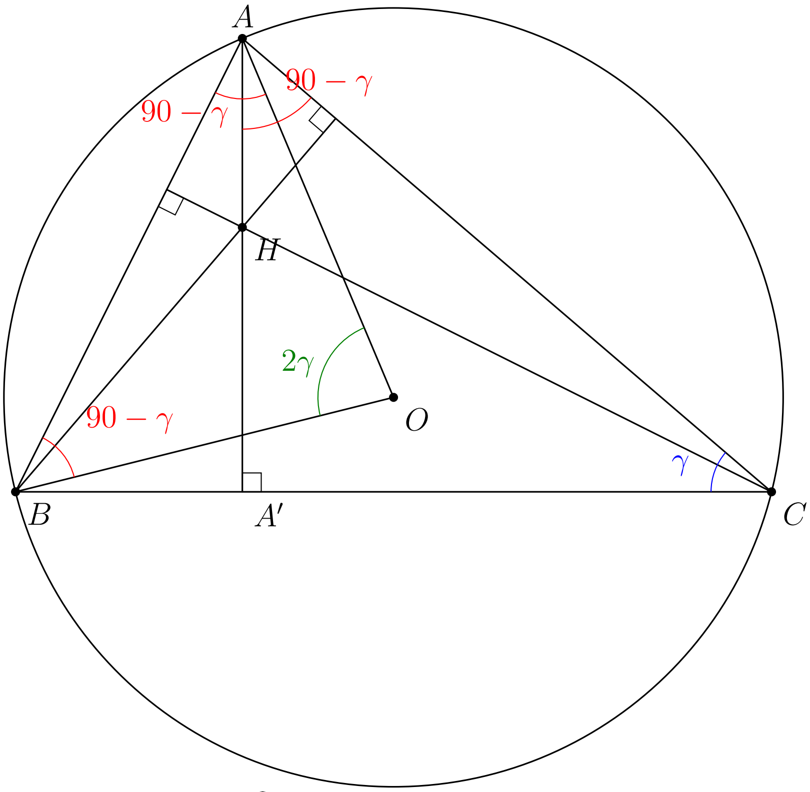
Les angles $\widehat{AA'B}$ et $\widehat{AB'B}$ sont égaux (ils sont droits) donc par le théorème des angles inscrits, $AA'B'B$ est cyclique.
On a $\widehat{CA'H} = 90° = 180 - \widehat{CB'H}$ donc le quadrilatère est cyclique.

Solution de l'exercice 2



On introduit le point G sur la figure.
A, B, C et D sont cocycliques donc $\widehat{DCA} = 180 - \widehat{DBA}$. D, B et F sont alignés donc $\widehat{FBA} = 180 - \widehat{DBA} = \widehat{DCA}$. De même par cyclicité de $ABFE$ et l'angle plat, on a $\widehat{AEG} = 180 - \widehat{AEF} = \widehat{ABF} = \widehat{DCA}$.
Ainsi, par angles alternes-internes, (CD) et (EF) sont parallèles.

Solution de l'exercice 3

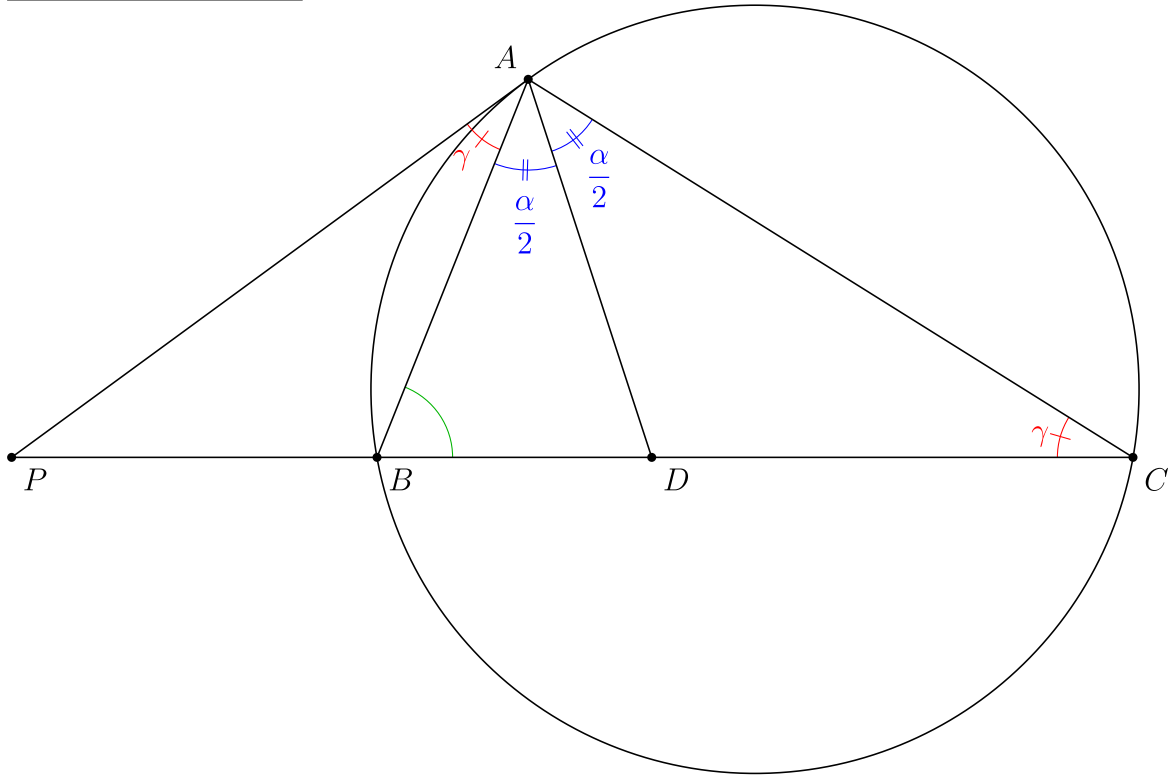


On appelle $\gamma = \widehat{ACB}$.
Par le théorème de l'angle au centre, on a $\widehat{AOB} = 2\widehat{ACB} = 2\gamma$. Comme AOB est isocèle en O, on a avec la somme des angles du triangle qui vaut $180°$: $2\widehat{BAO} + \widehat{AOB} = 180°$, d'où $\widehat{BAO} = 90 - \gamma$.
On note A' le pied de la hauteur de A. Comme $AA'C$ est rectangle en A'. On a

$$\widehat{A'AC} = 90 - \widehat{ACA'} = 90 - \gamma$$

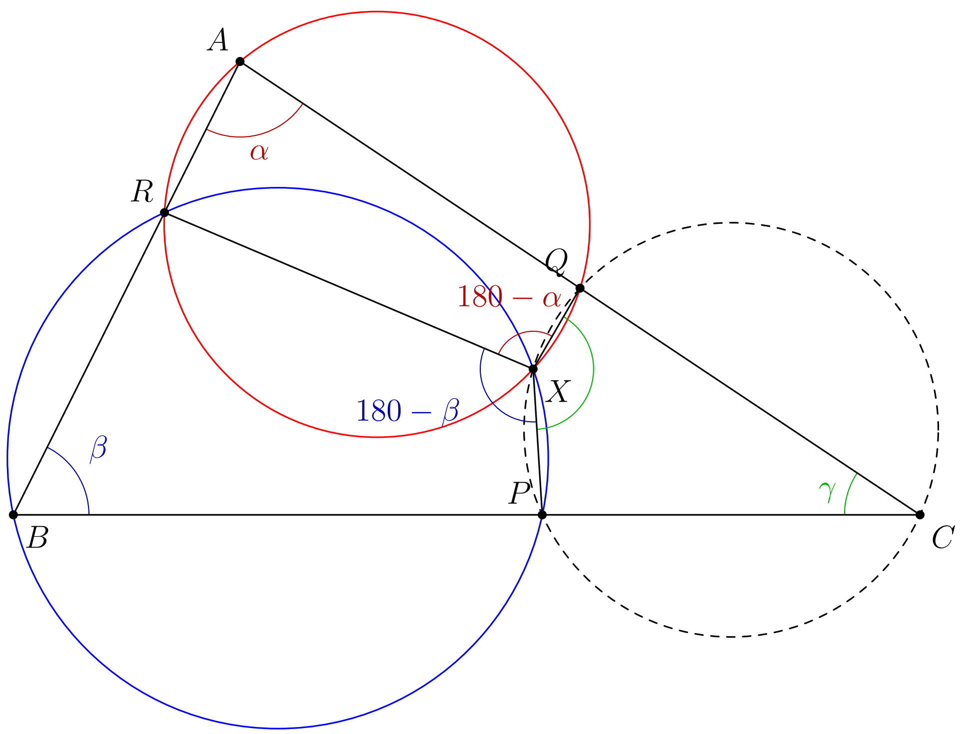
On a donc bien obtenu $\widehat{BAO} = \widehat{CAH}$

Solution de l'exercice 4



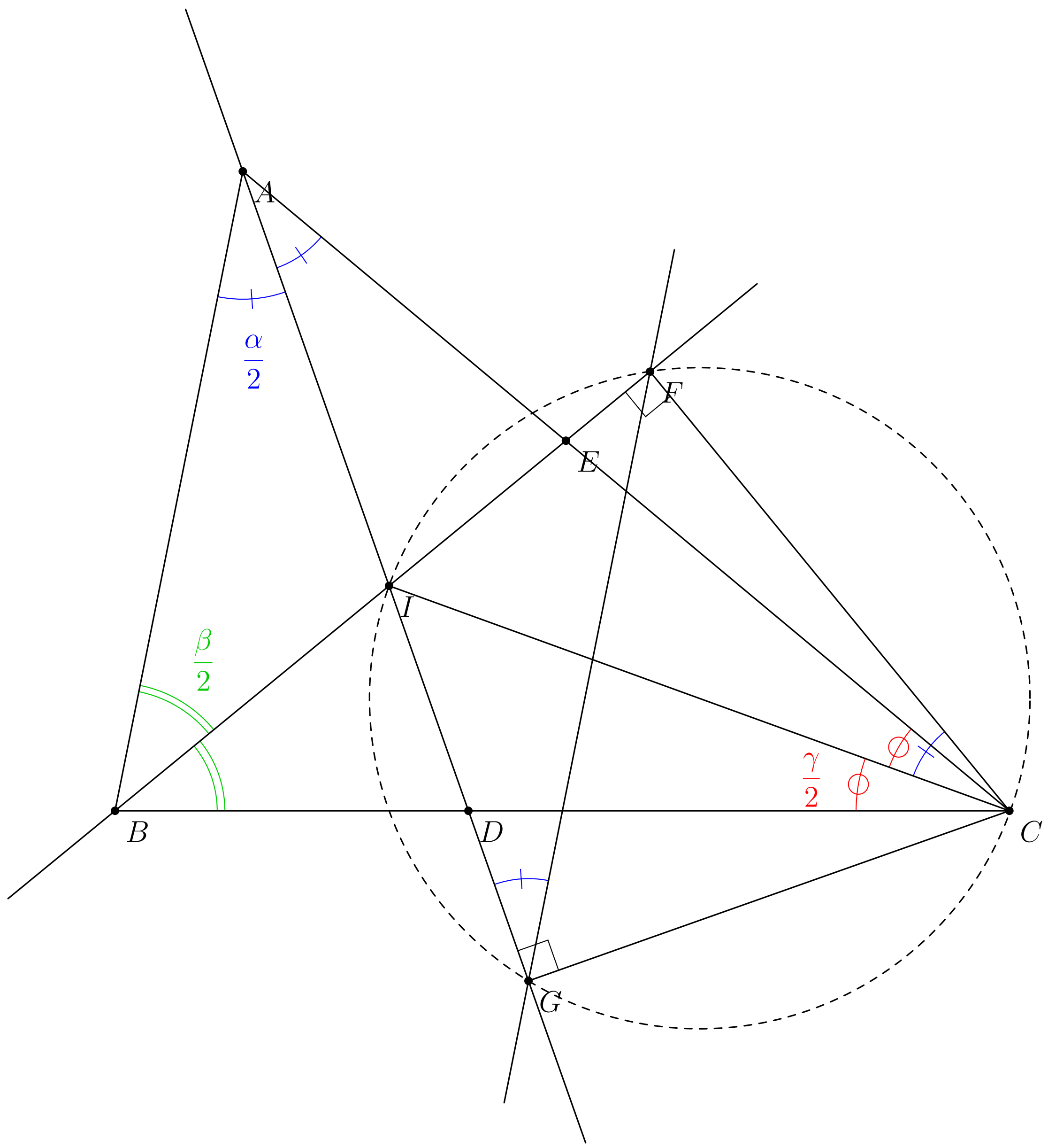
On note α, β et γ les angles $\widehat{BAC}, \widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$. Comme (PA) est une tangente à Γ, on a $\widehat{PAB} = \gamma$.
Par ailleurs comme la somme des angles d'un triangle vaut $180°$, $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ et $\widehat{DBA} + \widehat{BAD} + \widehat{BAD} = 180°$. Dès lors, $\widehat{ADP} = \widehat{ADB} = \gamma + \frac{\alpha}{2} = \widehat{PAD}$. Donc PAD est isocèle en P.

Solution de l'exercice 5



Il s'agit ici de montrer que $XQCP$ est cyclique.
On garde les notations précédentes de α, β et γ. Comme $ARXQ$ est cyclique, $\widehat{RXQ} = 180-\alpha$. De même, $\widehat{RXP} = 180-\beta$. Comme on a un tour complet, $\widehat{PXQ} = 360 - \widehat{RXQ} - \widehat{RXP} = \alpha+\beta = 180-\gamma$.
On a donc bien l'appartenance de X au cercle circonscrit de CQP

Solution de l'exercice 6



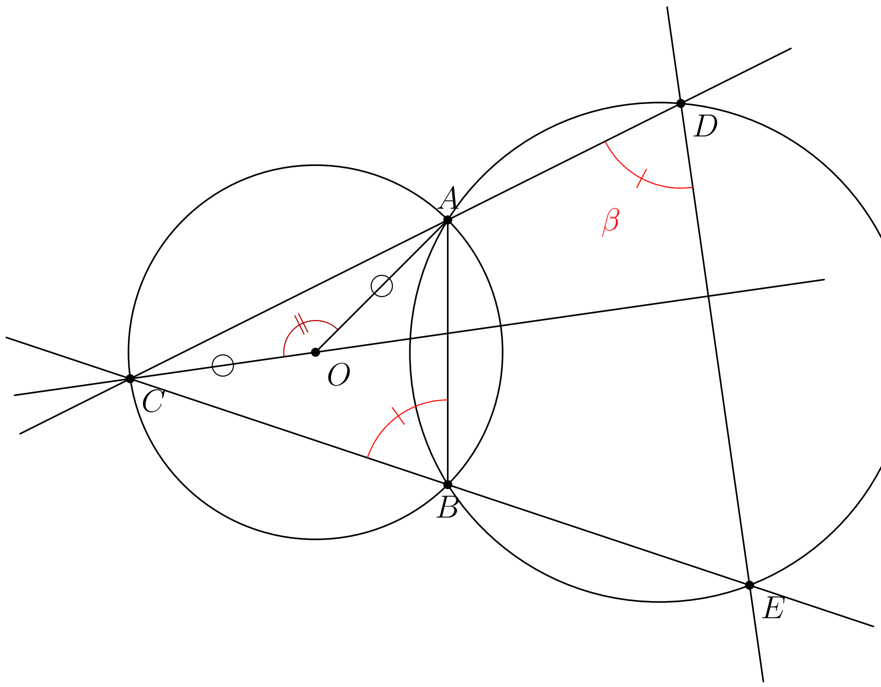
On note α, β, γ les angles du triangle ABC, selon les conventions d'usage. On note I le centre du cercle inscrit. C'est donc en particulier le point d'intersection de (AD) et (BE), et (CI) est la bissectrice de $\widehat{ACB}$

Alors, on cherche à montrer que $\widehat{AGF} = \widehat{BAG}$.

Comme $\widehat{IFC} = 180 - \widehat{IGC}$, $IFCG$ est cyclique. On a donc $\widehat{AGF} = \widehat{IGF} = \widehat{ICF}$.

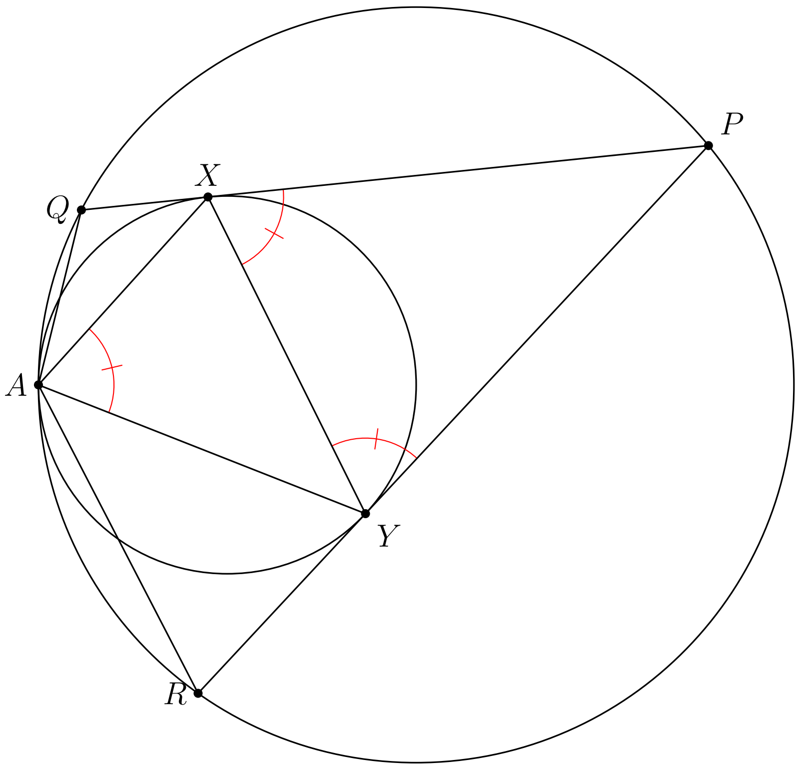
En regardant le triangle rectangle BFC, avec le fait que (BI) et (CI) sont des bissectrices, on a $90 = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} + \widehat{ICF}$. Comme $\alpha + \beta + \gamma = 180$, avec ce qui précède, $\widehat{AGF} = \frac{\alpha}{2}$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 7



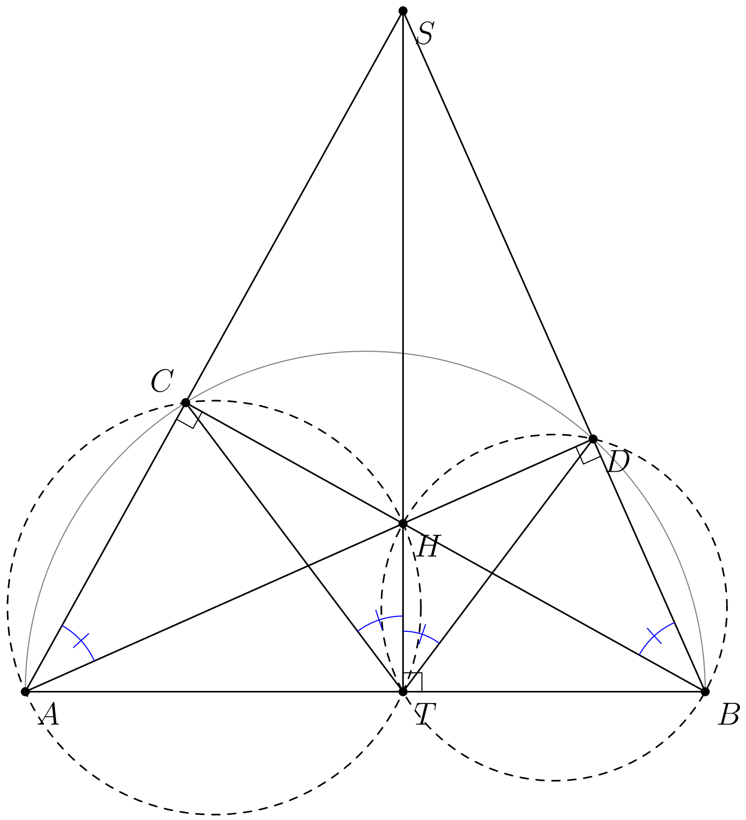
Comme $ADEB$ est cyclique, $\widehat{ADE} = \widehat{ABC}$, on note cet angle β. Par le théorème de l'angle au centre, $\widehat{AOC} = 2\widehat{ABC} = 2\beta$. Or AOC est isocèle en O, donc $2\widehat{ACO} + \widehat{COA} = 180°$ soit $\widehat{ACO} = 90 - \widehat{ABC} = 90 - \beta$ et donc $\widehat{ACO} + \widehat{CDE} = 90°$ ce qui conclut (on a un triangle rectangle).

Solution de l'exercice 8



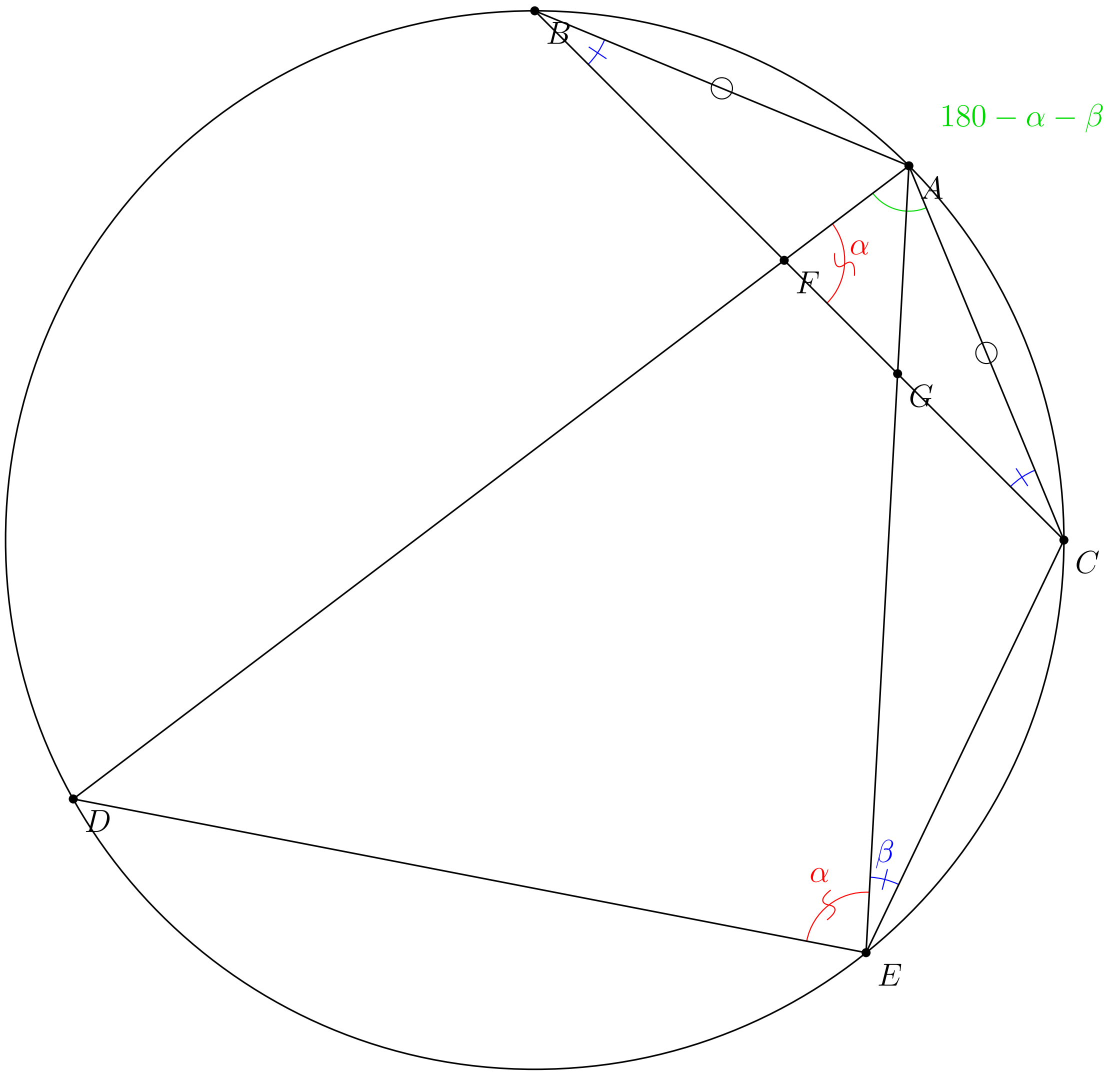
Comme $AQPR$ est cyclique, on a $\widehat{QAR} = 180 - \widehat{XPR}$.
Or (PX) et (PY) sont des tangentes donc, $\widehat{PXY} = \widehat{XAY} = \widehat{PYX}$. En appliquant cela au triangle PXY, on a $2\widehat{XAY} + \widehat{XPY} = 180$. Avec la première égalité, on obtient, $2\widehat{XAY} = \widehat{QAR}$

Solution de l'exercice 9



Cet exercice revient à montrer que l'orthocentre d'un triangle est aussi le centre du cercle inscrit du triangle formé par les pieds des hauteurs.
Ici, on introduit H, l'hortocentre de ABS qui est donc le point de concourrance de (CB), (DA) et (ST). Et on raisonne par chasse aux angles.
Comme la somme de deux angles droits est égale à $180°$, on en déduit que les points $ATHC$ et $TBDH$ sont cocycliques. Ainsi, en utilisant le théorème de l'angle inscrit, $\widehat{HTD} = \widehat{HBD} = \widehat{CAD} = \widehat{CTH}$.
D'où le résultat.

Solution de l'exercice 10

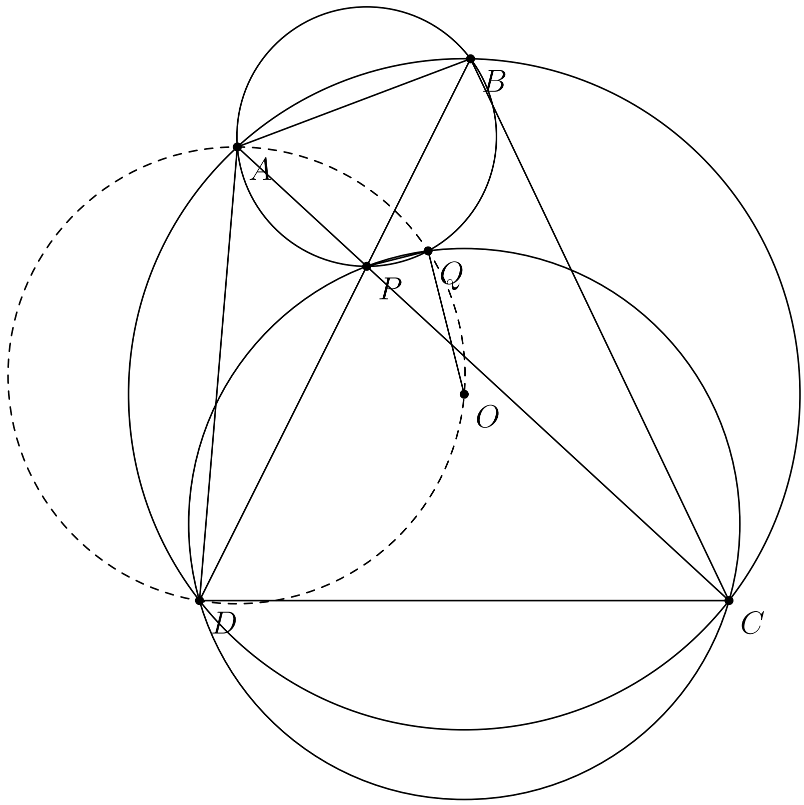


On va montrer que $DEGF$ est cyclique en montrant que $\widehat{DEG} + \widehat{DFG} = 180°$. On définit, $\widehat{AED} = \alpha$ et $\widehat{ACB} = \beta$.

On remarque tout d'abord que ABC est isocèle en A (c'est comme ça qu'on peut définir le milieu), donc $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \beta$. Comme $ABEC$ est cyclique, $\widehat{AEC} = \beta$.

De plus, $ACED$ est cyclique donc $\widehat{DAG} = 180 - (\alpha + \beta)$. Avec la somme des angles du triangle AFC, on a $\widehat{AFC} = 180 - (180 - \alpha - \beta) - \beta = \alpha$. D'où $\widehat{DFG} = 180 - \alpha$ et le résultat.

Solution de l'exercice 11



On s'aperçoit que quelque soit la façon dont on essaie de décomposer $\widehat{OQP}$, il faut connaître un angle de la forme $\widehat{OQD}$. De plus avec une figure bien tracé on peut conjecturer que $AOQD$ est un quadrilatère cocyclique.
Effectivement, en utilisant une fois le théorème de l'angle inscrit dans chacun des petits cercles puis le théorème de l'angle au centre dans le grand pour tout ramener en O, on obtient $\widehat{AQD} = \widehat{AQP} + \widehat{QPD} = \widehat{ABP} + \widehat{PCD} = 2 \cdot \frac{1}{2}\widehat{AOD}$, d'où cette cocyclicité.
Finalement, $\widehat{OQP} = \widehat{OQD} + \widehat{DQP} = \widehat{OAD} + \widehat{DCP} = \widehat{OAD} + \frac{1}{2} \cdot \widehat{AOD} = 90°$

3 Modulos, Fermat (Raphael G.)

Congruences et équations modulaires

Définition 1.
On dit que a et b des entiers sont congrus modulo n si $n \mid a - b$. On note $a \equiv b \ [n]$

Notation.
On rencontre aussi $\mod n$, (n) et il est parfois implicite si le contexte est clair.

Lemme 2.
Soient a, b, c, d, n des entiers tels que $a \equiv b \ [n]$ et $c \equiv d \ [n]$ alors $a + c \equiv b + d \ [n]$ et $ac \equiv bd \ [n]$

Démonstration. On sait que $n \mid a-b$ et $n \mid c-d$. Ainsi $n \mid a-b+c-d = (a+c)-(b+d)$. Par conséquent $a+c \equiv b+d$.
De plus, $n \mid (a-b)c+(c-d)b = ac-bc+bc-bd = ac-bd \iff ac \equiv bd$ □

Remarque 3.
$a^c \not\equiv a^d \mod n$ en général. Les modulos ne respecte pas l'exponentiation. $1 \equiv 4 \quad [3]$ mais pourtant $2^1 \equiv 2 \neq 1 \equiv 2^4 \quad [3]$

Définition 4.
On dit que y est l'inverse de x modulo n si $xy \equiv 1 \quad [n]$

Lemme 5. x est inversible modulo n si et seulement si $pgcd(x,n) = 1$ et son inverse est unique modulo n.

Démonstration. Soit y un inverse de x. Alors $n \mid xy-1 \iff \exists k \in \mathbb{Z}, xy+kn = 1$. On reconnaît une équation de Bézout. Ainsi y existe si et seulement si x et n sont premier entre eux. Supposons par l'absurde que x possède deux inverses distinctes y, y'. Alors, $xy \equiv 1 \equiv xy' \Rightarrow y \equiv yxy \equiv yxy' \equiv y'$. Ainsi $y = y'$ Absurde. □

Exercice 1
Trouvez tout les entiers a tels que $5 \mid a^3+3a+1$

Exercice 2
Trouvez tous les couples d'entiers (a,b) tels que $4 \mid a^2+b^2+1$

Exercice 3
Soit a, b, c des entiers tels que $9 \mid a^3+b^3+c^3$. Montrer que 3 divise l'un de ces entiers

Exercice 4
Montrer que $35 \mid 3^{6n} - 2^{6n}$

Exercice 5
Trouvez l'inverse de 42 modulo 143

Exercice 6
Montrer les critères de divisibilités par 9 et 11

Exercice 7
Soit n un entier impair. Montrer que $x^2 \equiv 1 \mod 8$, $x^4 \equiv 1 \mod 16$. Généraliser

Exercice 8
(Théorème de Wilson) Montrer que p est premier si et seulement si $(p-1)! \equiv -1 \mod p$

Exercice 9
Soit a, b, n tels que $a \equiv b \mod n$. Montrer que $a^n \equiv b^n \mod n^2$. (originellement n est premier mais je ne vois pas l'intérêt)

Exercice 10
Trouvez tous les (x,y) tels que $x^4+6 = y^3$

Exercice 11
Trouvez (a,b,c) tels que $a^2+b^2 = 3c^2$

Petit théorème de Fermat

Théorème 6 (Théorème d'Euler-Fermat)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et x premier avec n. Alors $x^{\phi(n)} \equiv 1 \ [p]$. En particulier si n est premier : $x^{p-1} \equiv 1 \ [p]$

Démonstration. Soit $I = \{m \in [\![1; n]\!], pgcd(m, n) = 1\}$. Soit P le produit de tous ses éléments. Enfin soit x premier avec n. x est inversible. Donc $I = xI$. Ainsi, $P \equiv x^{\phi(n)} \cdot P$. Comme P est un produit d'inversible il est inversible et donc $x^{\phi(n)} \equiv 1$. □

Théorème 7 (Théorème des restes chinois)**.** Soit $m_1, m_2, ..., m_k$ des entiers premiers entre-eux deux-à-deux. Soit $a_1, a_2, ..., a_k$ des entiers alors le système :

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \ [m_1] \\ x \equiv a_2 \ [m_2] \\ \qquad \vdots \\ x \equiv a_k \ [m_k] \end{cases}$$

admet une unique solution modulo $m_1 m_2 ... m_k$.

Démonstration. Existence : Soit le système :

$$\begin{cases} x_i \equiv 0 \ [m_j] \quad \forall j \neq i \\ x_i \equiv 1 \ [m_i] \end{cases}$$

On note P_i le produit de tous les m sauf m_i. Ainsi, il existe y_i tel que $x_i = y_i \cdot P_i$. De plus $x_i \equiv y_i \cdot P_i \equiv 1 \ [m_i] \iff y_i \equiv P_i^{-1} \mod m_i$. Ainsi $x_i = P_i^{-1} \cdot P_i$ convient. Pour un système quelconque, on vérifie facilement que $x = a_1 x_1 + ... + a_k x_k$ convient.
Unicité : Soit x, y deux solutions du système. Alors $\forall i, m_i \mid x - y$. Donc $m_1 ... m_k \mid x - y \iff x \equiv y \ [m_1 ... m_k]$ □

Exercice 12
Montrer que $n^7 \equiv n \mod 42$

Exercice 13
Montrer que $n^{561} \equiv n \mod 561$

Exercice 14
Soit p, q des nombres premiers, a un entier positif tel que $a \equiv 1 \mod (p-1)(q-1)$. Montrer que pour tout entier n, $(n^a) \equiv n \mod pq$.

Solution de l'exercice 1
On teste toute les congruences possibles de a :

- $a \equiv 0 : a^3 + 3a + 1 \equiv 1$
- $a \equiv 1 : a^3 + 3a + 1 \equiv 1 + 3 + 1 \equiv 0$
- $a \equiv 2 : a^3 + 3a + 1 \equiv 8 + 6 + 1 \equiv 0$
- $a \equiv 3 : a^3 + 3a + 1 \equiv 27 + 9 + 1 \equiv 2 - 1 + 1 \equiv 2$
- $a \equiv 4 : a^3 + 3a + 1 \equiv -1 - 3 + 1 \equiv 2$

Donc tous les nombres congrus à 1 et 2 sont solutions.

Solution de l'exercice 2
Les carrés modulo 4 sont $0, 1$ donc $1 + a^2 + b^2$ peut valoir $1, 2$ ou 3. Il n'y a ainsi pas de solution

Solution de l'exercice 3
Si $3 \nmid x$ alors $x^3 \equiv \pm 1 \ \ [9]$. Ainsi si aucun des entiers est multiple de 3, la somme des cubes est congrus à $\pm 1, \pm 3$

Solution de l'exercice 4
$35 \mid x \iff 5 \mid x$ et $7 \mid x$. Comme $3^2 \equiv 9 \equiv 4 \equiv 2^2$, $3^{6n} \equiv 2^{6n} \ \ [5]$. Ainsi $5 \mid x$
$3^6 \equiv 27^2 \equiv (-1)^2 \equiv 1 \equiv 2^6 \ \ [7]$. De même, $7 \mid 3^{6n} - 2^{6n}$. Cela conclut.

Solution de l'exercice 5
Méthode : trouver une relation de Bézout : $42x + 143k = 1$. Avec l'algorithme d'Euclide : $1 = 5 \cdot 143 - 17 \cdot 42$. Donc l'inverse de 42 est 17.

Solution de l'exercice 6
On note $N = a_k a_{k-1} ... a_1 a_0$ son écriture en base 10.

$$N \equiv \sum_{i=0}^{k} a_i 10^i \equiv \sum_{i=0}^{k} a_i \ \ [9]$$

$$N \equiv \sum_{i=0}^{k} a_i 10^i \equiv \sum_{i=0}^{k} (-1)^i a_i \ \ [11]$$

Solution de l'exercice 7
Montrons que $x^{2^n} \equiv 1 \ \ [2^{n+2}]$ par récurrence. Pour $n = 1$, on regarde les différentes valeurs possibles de x.
Supposons qu'il existe k tel que $x^{2^k} \equiv 1 \ \ [2^{k+2}]$ pour un certain k. $x^{2^{k+1}} - 1 = (x^{2^k} - 1)(x^{2^k} + 1)$. Or $2^{k+2} \mid x^{2^k} - 1$ et $2 \mid x^{2^k} + 1$. Ainsi $2^{k+3} \mid x^{2^{k+1}} - 1$. Ainsi la propriété est héréditaire. Par le principe de récurrence, $x^{2^n} \equiv 1 \ \ [2^{n+2}]$ pour tout $n \geq 1$.

Solution de l'exercice 8
Supposons que p soit premier. Tous les nombres de 1 à $p - 1$ dispose d'un inverse. S'il est distinct, leur produit vaut 1. Ainsi reste dans $(p-1)! \ \ [p]$ que le produit des nombres étant leur propre inverse : $x^2 \equiv 1 \ \ [p] \iff p \mid (x+1)(x-1) \iff x \equiv \pm 1 \ \ [p]$ (vrai uniquement car p est premier). Ainsi, $(p-1)! \equiv 1 \cdot -1 \equiv -1 \ \ [p]$
Réciproquement, si $(p-1)! \equiv -1 \ \ [p]$, il existe k tel que $(p-1)! = kp - 1 \iff kp - (p-1)! = 1$. Soit $1 \leq n \leq p - 1$, alors $kp - n\left(\frac{(p-1)!}{n}\right) = 1$. Alors $\operatorname{pgcd}(p, n) = 1$ et donc $n \nmid p$. Donc p est premier.

Solution de l'exercice 9
$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$. Or $n \mid a-b$ et $a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1} \equiv na^{p-1} \equiv 0$. Ainsi $n^2 \mid a^n - b^n$

Solution de l'exercice 10
Nous allons regarder l'équation modulo 13, car 3 et 4 divise $13-1$, ce qui réduit le nombre de valeurs possibles de x^3 et y^4. Les cubes valent $0, \pm 1, \pm 5$, les puissances 4, $0, 1, 3, -4$. On remarque alors que l'équation n'a pas de solutions.

Solution de l'exercice 11
Supposons par l'absurde qu'il existe a, b, c et sans perte de généralité premiers entre-eux (quitte à diviser par leur pgcd) $3 \mid a^2 + b^2 \Rightarrow 3 \mid a, b$. Ainsi $9 \mid 3c^2$ donc $3 \mid c$. Absurde car leur pgcd serait alors multiple de 3.

Solution de l'exercice 12
L'équation $n^7 \equiv n \ [42]$ est équivalente à

$$\begin{cases} n^7 \equiv n \ [7] \\ n^7 \equiv n \ [3] \\ n^7 \equiv n \ [2] \end{cases}$$

La première est juste une application du petit théorème de Fermat. Pour la deuxième, on réalise la division euclidienne de 7 par $3 - 1 = 2$. Donc $n^7 \equiv n \ [3]$. De même, $n^7 \equiv n \ [2]$

Solution de l'exercice 13
L'équation $n^{561} \equiv n \ [561]$ est équivalente à

$$\begin{cases} n^{561} \equiv n \ [3] \\ n^{561} \equiv n \ [11] \\ n^{561} \equiv n \ [17] \end{cases}$$

Comme $561 \equiv 1 \ [2]$, $n^{561} \equiv n \ [3]$. De même, $561 \equiv 1 \ [10]$, donc $n^{561} \equiv n \ [11]$. Enfin, $561 \equiv 1 \ [16]$, donc $n^{561} \equiv n \ [17]$. Cela conclut.

Solution de l'exercice 14
Il existe k tel que $a = 1 + k(p-1)(q-1)$. Donc $n^{1+k(p-1)(q-1)} \equiv n \ [p]$. De même l'égalité est vraie modulo q. Donc, $n^{(p-1)(q-1)} \equiv n \ [pq]$

4 Triangles semblables (Alexander)

Cette séance reprend la séance sur les triangles semblables qui a été proposée par Anna et Martin. Celle-ci a été augmentée de quelques exercices qui suivent.

Énoncés supplémentaires

Exercice 1
Montrer que la droite qui passe par les milieux des bases AB et CD d'un trapèze $ABCD$ passe aussi par le point d'intersection de BC et AD, ainsi que par le point d'intersection de AC et BD.

Exercice 2
Montrer que la bissectrice issue d'un côté d'un triangle est toujours plus courte que la médiane issue du même côté. Étudier le cas d'égalité.

Exercice 3
Si deux cercles sont tangents extérieurement, montrer que la longueur sur leur tangente commune délimitée par les points de contact est égale à la moyenne géométrique de leurs diamètres.

Remarque 1.
Le lecteur attentif remarquera que cet exercice fournit une démonstration géométrique à l'inégalité arithmético-géométrique.

Exercice 4
Si dans un triangle ABC rectangle en A, on inscrit un carré $DEFG$ de sorte à ce que le côté DE se trouve sur l'hypoténuse BC, alors DE est la moyenne géométrique de BD et EC (sur l'hypoténuse, les points se situent dans l'ordre B, D, E, C)

Exercice 5
Si deux cercles sont concentriques, alors la somme des carrés des distances de n'importe quel point d'un des deux cercles aux extrémités de n'importe quel diamètre de l'autre cercle est une constante.

Solutions ou indications

Solution de l'exercice 1
Notons E et F les milieux de $[AB]$ et $[CD]$ respectivement. Notons G l'intersection de AC et BD et H l'intersection de AD et BC. Le but est de montrer que (EF) passe par G et par H.

Montrons que E, F, G sont alignés. Notons F' l'intersection de (EG) et (CD). (AB) et (DC) étant parallèles, d'après le théorème de Thalès, $\frac{AB}{CD} = \frac{GA}{GC}$. De même, $\frac{AE}{F'C} = \frac{GA}{GC}$. On en déduit que $\frac{AE}{AB} = \frac{F'C}{CD}$. Or, $\frac{AE}{AB} = \frac{1}{2}$. Donc, F' est le milieu de $[CD]$ et donc $F = F'$.

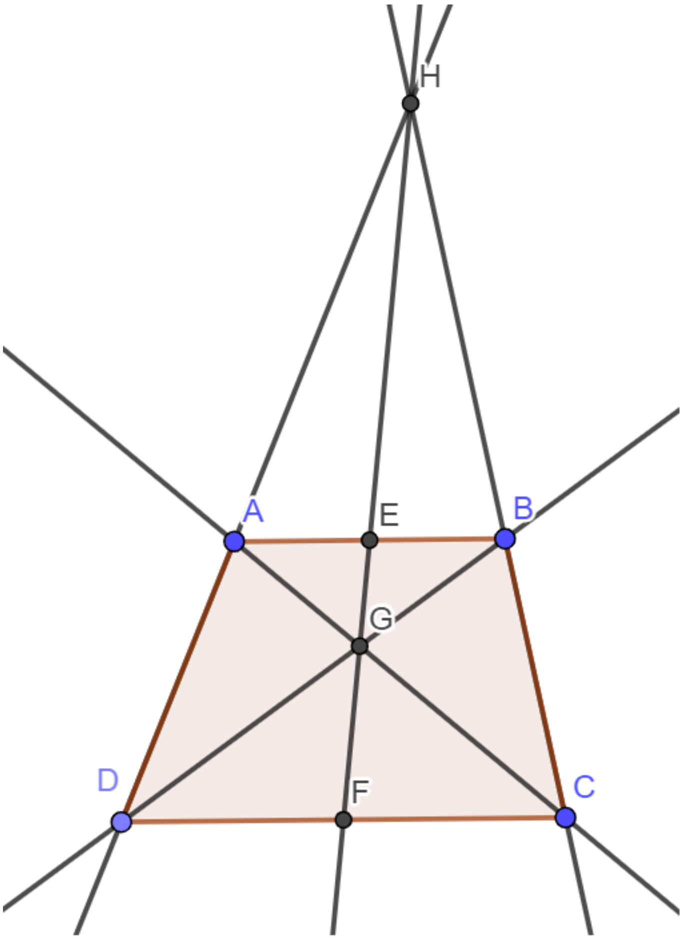
La preuve du fait que E, F, H sont alignés se fait de la même manière.

Solution de l'exercice 2
Soit ABC un triangle, et on note $\beta = \widehat{B}$ et $\gamma = \widehat{C}$. Supposons qu'il est acutangle, on laisse le lecteur rédiger le cas où il ne l'est pas. Sans perte de généralité, supposons que $AB \leqslant AC$. Donc, $\beta \geqslant \gamma$. Notons AD sa hauteur issue de A, AE sa bissectrice intérieure issue de A et AF sa médiane issue de A. Le but est de montrer que $AE \leqslant AF$. Pour cela, il suffit de montrer que les points D, E, F sont rangés dans cet ordre là sur la droite (BC).

Comme le triangle est acutangle, D, E, F se trouvent sur le segment $[BC]$. Ensuite, notons que $\frac{BF}{CF} = 1$. D'après le théorème de la bissectrice, $\frac{BE}{CE} = \frac{AB}{AC} \leqslant 1$. D'après la loi des sinus, $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$. Comme $\beta \geqslant \gamma$, on a $\frac{\cos\beta}{\cos\gamma} \leqslant 1$. Donc, $\frac{BD}{CD} \leqslant \frac{BE}{CD} \leqslant \frac{BF}{CF}$.

Le cas d'égalité correspond au cas où le triangle est isocèle en A.

Solution de l'exercice 3
Il y a plusieurs façons de résoudre cet exercice. La plus simple consiste à reporter le segment de tangente commune à partir du centre du plus petit des deux cercles. L'égalité souhaitée se déduit du théorème de Pythagore.



Il est aussi possible de faire une preuve utilisant les triangles semblables. En notant $[AB]$ la tangente commune considérée où A et B sont les points de contact de chacun des deux cercles avec la tangente et en notant C le point de contact entre les deux cercles, on montre au moyen d'une chasse aux angles que l'angle $\widehat{ACB}$ est droit. Il s'agit ensuite de repérer les triangles rectangles semblables et d'écrire les égalités de rapports.

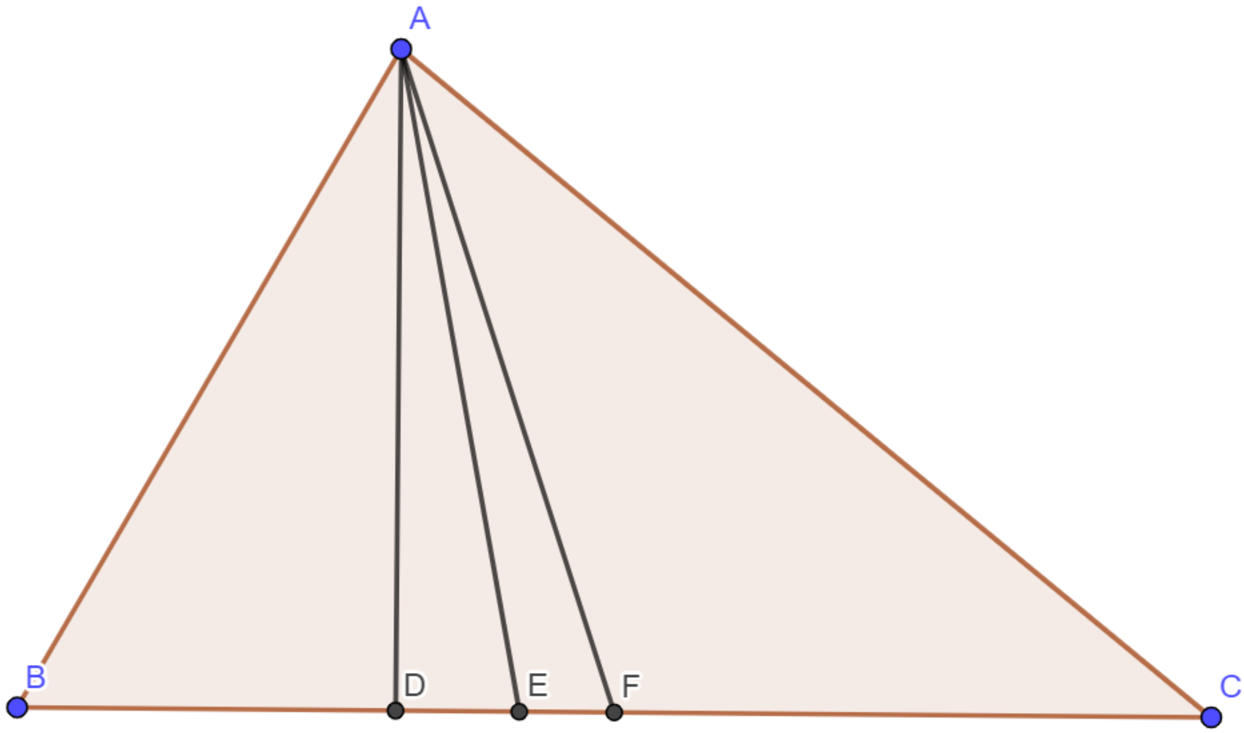
Solution de l'exercice 4
Repérer les triangles rectangles semblables.

Solution de l'exercice 5
Utiliser le théorème de Pythagore et des identités fournies par des triangles semblables pour exprimer la somme des carrés en fonction des rayons des deux cercles.

5 TD de Géométrie (Hannah et Mathieu Ba.)

Énoncés

Exercice 1
Soit ABC un triangle. La bissectrice de $\widehat{BAC}$ recoupe $[BC]$ en D et le cercle circonscrit à ABC en S. Montrer que la droite (SB) est tangente au cercle circonscrit à ABD.



Exercice 2
Soient A, B, C et D quatre points cocycliques et E le point d'intersection des droites (AB) et (CD). Montrer l'égalité suivante : $\frac{AC}{BC} \times \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{BE}$.

Exercice 3
Soient A, B, C et D quatre points dans cet ordre sur un cercle et soit S le milieu de l'arc $\widehat{AB}$ ne contenant pas C et D. Les droites (SD) et (SC) intersectent (AB) en E et F respectivement. Montrer que C, D, E et F sont cocycliques.

Exercice 4
Soit ABC un triangle isocèle en A, Γ le cercle tangent à (AB) et (AC) en B et C, et M un point de l'arc de Γ intérieur au triangle ABC. On définit E et F les projetés orthogonaux de M sur $[AC]$ et $[AB]$ respectivement, et D son projeté orthogonal sur $[BC]$. Prouver que $MD^2 = ME \times MF$.

Exercice 5
Soit ABC un triangle et D le pied de la bissectrice issue de B. Les cercles circonscrits aux triangles ABD et BCD recoupent les côtés $[AB]$ et $[BC]$ en E et F respectivement. Montrer que $AE = CF$.

Exercice 6
Soit $CDEF$ un rectangle, A un point sur (ED) et B l'intersection de (EF) et la perpendiculaire à (AC) en C. Montrer que $BE = CD + \frac{AD}{AC} \times BC$.

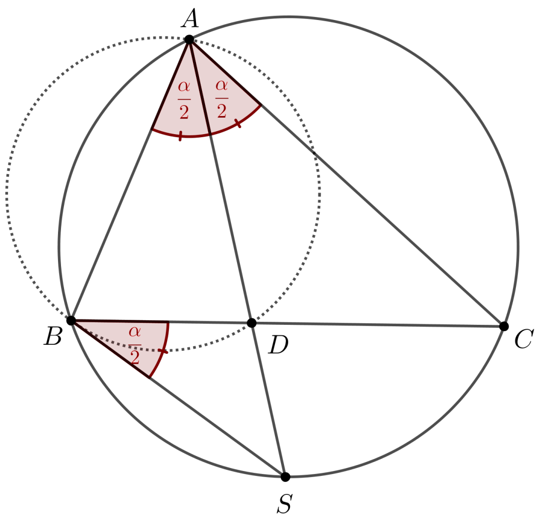
Exercice 7
Soient A, B, C, D et E cinq points dans cet ordre sur un cercle, vérifiant $AB = BC$ et $CD =$

DE. On appelle respectivement P, Q et T l'intersection des droites (AD) et (BE), (AC) et (BD), (BD) et (CE). Montrer que le triangle PQT est isocèle.

Exercice 8
Soient ABC un triangle et D l'intersection de la bissectrice intérieure issue de A avec $[BC]$. La médiatrice de $[AD]$ recoupe la bissectrice issue de B en M et celle issue de C en N. Montrer que les points A, M, N et I sont sur un même cercle.

Solutions des exercices

Solution de l'exercice 1
D'après le théorème de l'angle tangent, il suffit de montrer que $\widehat{BAD} = \widehat{SBD}$. Or, (AS) étant la bissectrice de $\widehat{BAC}$, on a : $\widehat{BAD} = \widehat{SAC} = \frac{\alpha}{2}$. Comme B, A, C et S sont cocycliques, le théorème de l'angle inscrit donne $\widehat{SBC} = \widehat{SAC}$ et on a bien $\widehat{SBD} = \widehat{BAD} = \frac{\alpha}{2}$.



Solution de l'exercice 2
L'égalité à prouver fait intervenir des ratios de longueur entre plusieurs segments d'extrémités A, B, C, D ou E. Cherchons donc des triangles semblables entre ces points faisant intervenir les ratios en question.

D'après le théorème de l'angle inscrit, on a $\widehat{EAC} = \widehat{BDE}$. On en déduit que $ECA \sim EBD$, ce qui entraîne

$$\frac{EC}{AC} = \frac{BE}{BD}.$$

De même, la cocyclicité de A, B, C et D fournit $\widehat{EBC} = \widehat{EDA}$ et $\widehat{ECB} = \widehat{EAD}$, d'où l'on tire que $EBC \sim EDA$, puis

$$\frac{BC}{EC} = \frac{AD}{AE}.$$

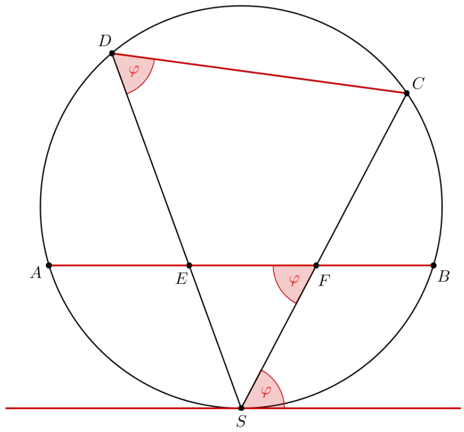
En faisant le produit des deux identiés ci-dessus, le terme EC se simplifie et on obtient bien que $\frac{BC}{AC} = \frac{AD}{BD} \times \frac{BE}{AE}$.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u>
Première solution. On fait une chasse aux angles, cette dernière pouvant être accélérée en utilisant le théorème du pôle Sud, qui nous permet d'identifier que (DS) est la bissectrice de $\widehat{ADB}$ et (CS) celle de $\widehat{ACB}$.

Seconde solution, plus astucieuse. L'idée est de considérer la tangente au cercle en S, qu'on appelle t. Cette idée est motivée par le fait que, S étant le milieu de l'arc $\widehat{AB}$, $t \mathbin{//} (AB)$. On a alors

$$\begin{aligned}(DE, DC) &= (DS, DC) \ \text{ car } D, E \text{ et } S \text{ sont alignés}\\ &= (t, SC) \ \text{ d'après le cas limite du théorème de l'angle inscrit}\\ &= (AB, SC) \ \text{ puisque } t \mathbin{//} (AB)\\ &= (FE, FS) \ \text{ (alignement des points)}\end{aligned}$$

ce qui prouve la cocyclicité des points C, D, E et F.

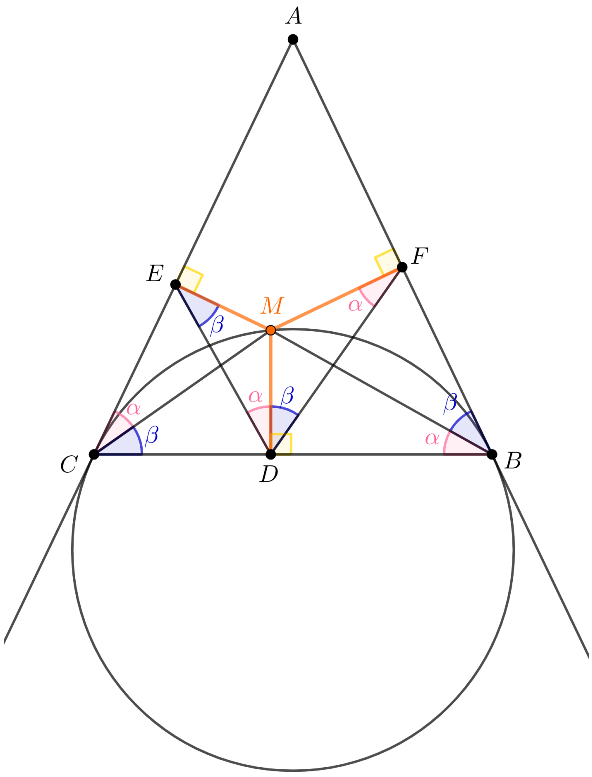


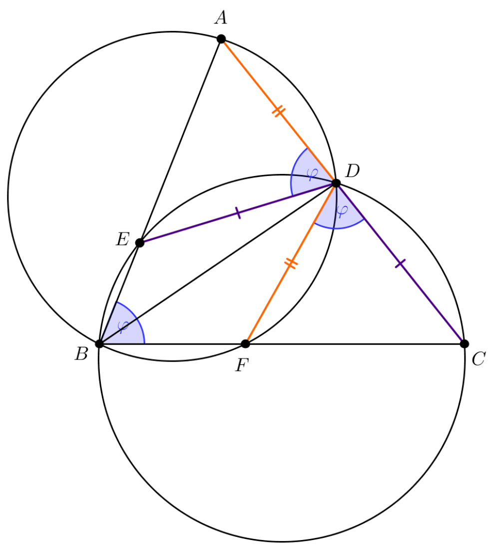
<u>*Solution de l'exercice 4*</u>
On remarque d'abord que $MD^2 = ME \times MF \iff \frac{MD}{ME} = \frac{MF}{MD}$. Ce rapport de longueur nous indique la piste des triangles semblables. Nous allons donc faire une chasse aux angles pour identifier des triangles semblabes de côté MD, ME, et MF.

On a $\widehat{MEC} + \widehat{MDC} = 180$ donc les points M, E, C et D sont cocycliques par réciproque du théorème de l'angle inscrit. De même, $\widehat{MFB} + \widehat{MDB} = 180$ et les points M, F, B et D sont cocycliques. Par angle inscrit, il vient $\widehat{MED} = \widehat{MCD}$ et $\widehat{MFD} = \widehat{MBD}$. De plus, (AC) et (AB) étant tangentes au cercle Γ, le théorème de la tangente donne $\widehat{MCD} = \widehat{MBF}$ et $\widehat{MBD} = \widehat{MCE}$. Pour finir, par angle inscrit on a $\widehat{MBF} = \widehat{MDF}$ et $\widehat{MCE} = \widehat{MDE}$.

Ainsi, $\widehat{MED} = \widehat{MDF}$ et $\widehat{MFD} = \widehat{MDE}$. Les triangles EMD et DMF sont semblables car ils ont deux angles égaux. Les rapports nous donnent $\frac{MD}{ME} = \frac{MF}{MD}$.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u>
D'après le théorème du pôle Sud appliqué dans les triangles ABF et CBE, nous savons que d'une part $DA = DF$ et d'autre part que $DE = DC$. Qui plus est, le théorème de l'angle inscrit donne $\widehat{CBE} = \widehat{EDA}$ (cocyclicité de B, C, D et E) et $\widehat{ABF} = \widehat{FDC}$ (cocyclicité de A, B, F, D). Ainsi, $\widehat{ADE} = \widehat{FDC}$. Mis avec les égalités de longueurs précédentes, on en conclut que les triangles ADE et FDC sont superposables, ce qui implique que $AE = CF$.





Solution de l'exercice 6

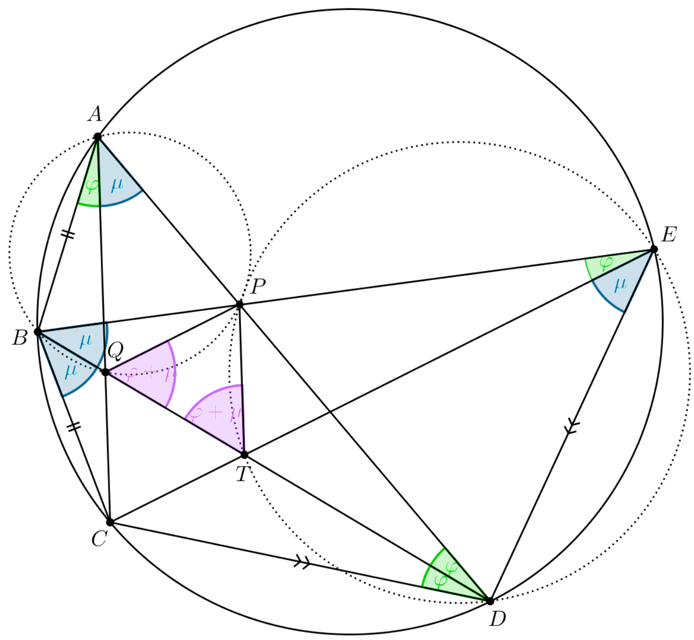
On décompose d'abord : $BE = BF + FE$. Dans un rectangle, les côtés opposés sont de longueurs égales, d'où $FE = CD$.

Par ailleurs, on a $\widehat{DCA} = \widehat{FCD} - \widehat{FCA} = 90 - \widehat{FCA}$ et $\widehat{BCF} = \widehat{BCA} - \widehat{FCA} = 90 - \widehat{FCA} = \widehat{DCA}$. Or, $\widehat{BFC} = \widehat{ADC} = 90$ donc les triangles BFC et ADC sont semblables car ils ont deux angles égaux. On en déduit l'égalité de rapports $\frac{BF}{AD} = \frac{BC}{AC} \iff BF = \frac{AD}{AC} \times BC$. En remplaçant dans notre première égalité, on a bien $BE = CD + \frac{AD}{AC} \times BC$.

Solution de l'exercice 7

Les points A, B, C et D étant cocycliques, le théorème de l'angle inscrit nous permet d'écrire $(BC, BD) = (AC, AD)$. Puisque D est le milieu de l'arc $\widehat{CE}$, le théorème du pôle Sud affirme que $(BC, BD) = (BD, BE)$. Les deux résultats précédents, combinés à l'alignement des points B, P et E d'une part et B, Q, T et D d'autre part, donnent $(AQ, AP) = (BQ, BP)$, ce qui démontre que les points A, B, P et Q sont cocycliques. On prouve de la même façon que les points E, D, P et T sont cocycliques.

On a ainsi $(AB, AP) = (QT, QP)$ et $(EP, ED) = (TP, TQ)$. Mais $(AB, AP) = (EP, ED)$ car A, B, D et E sont cocycliques, d'où $(QT, QP) = (TP, TQ)$. Le triangle PQT est donc isocèle en P.

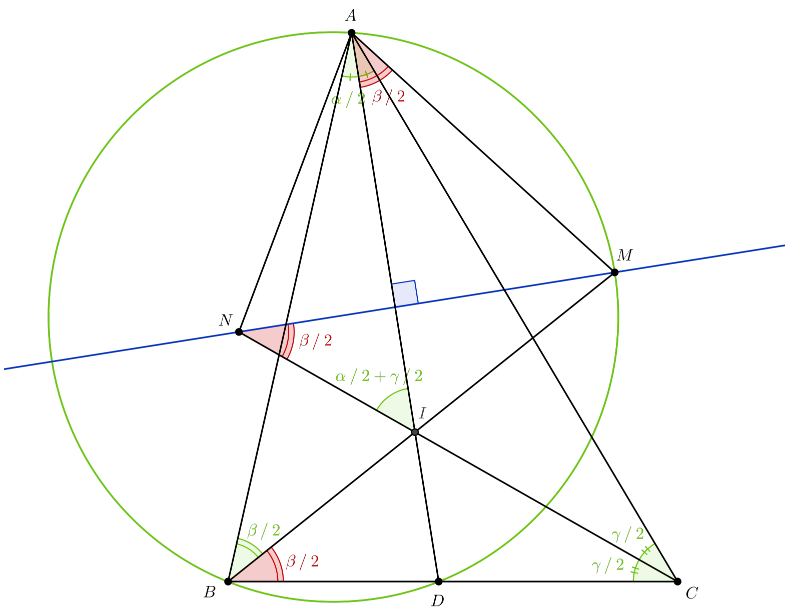


Solution de l'exercice 8

Le point M est défini comme l'intersection de la médiatrice de $[AD]$ avec la bissectrice de $\widehat{ABD}$. D'après le théorème du pôle Sud, M, A, B et D sont donc cocycliques. On en déduit que $(BD, BM) = (AD, AM) = \frac{(BC,BA)}{2}$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned}(NM, NI) &= (NM, IA) + (AI, AC) + (CA, CI) \quad \text{(relation de Chasles)}\\ &= 90 + \frac{(AB, AC)}{2} + \frac{(CA, CB)}{2} \quad \text{par définition de } I\\ &= \frac{(AB, CB)}{2} \quad \text{d'après la relation de Chasles}\end{aligned}$$

Dès lors, $(NM, NI) = (AM, AI)$, ce qui prouve que A, M, I et N sont cocycliques.



6 TD d'Arithmétique (Antoine)

Il y a d'abord eu un temps de révisions de ce qui avait été vu lors des deux dernières journées en arithmétique, et il y a ensuite eu un TD axé sur les équations diophantiennes pour appliquer la théorie.

A retenir : quand on a plein de carrés on regarde modulo $4, 3, 8$ (dans cet ordre).
Quand on regarde des cubes, modulo 9 et 7. De manière générale, si on a plein de puissances n-ièmes, il peut être judicieux de regarder modulo n^2, ou modulo p, avec p premier tel que $n \mid p-1$.
Sinon, on essaie de trouver des factorisations, des inégalités, etc.

Exercices

Exercice 1
Résoudre l'équation diophantienne $x^2 + y^2 = 206$.

Exercice 2
Quelles sont les valeurs possibles de x^3 modulo 9 ?
Est-il possible d'avoir $x^3 + y^3 = z^3 + 4$?

Exercice 3
Quel est le dernier chiffre de $2019^{2020^{2021}}$?

Exercice 4
Quel est le dernier chiffre de $2023^{2024^{2025}}$?

Exercice 5
Quel est le reste de la division euclidienne de $2022^{2022^{2022}}$ par 11 ?

Exercice 6
Pour quels $n \in \mathbf{N}^*$ $n \times 2^{n+1} + 1$ est-il un carré ?

Exercice 7
1) Soit p un nombre premier impair. Quelles valeurs peut prendre $a^{\frac{p-1}{2}}$ modulo p (avec a et p premiers entre eux) ?
2) Pouvez-vous trouver un rapport enter la valeur prise et le fait que a soit un carré modulo p ? Il s'avère qu'il s'agit d'une équivalence (pas très simple à montrer)
3) Montrer que -1 est un carré modulo p si et seulement si $p \equiv 1 \pmod 4$
4) Résoudre $11^n = a^2 + b^2$ pour $a, b \in \mathbf{N}$

Exercice 8 (Un avant-goût d'ordre)
Trouver tous les $p, q > 5$ premiers tels que $pq \mid (5^p - 2^p)(5^q - 2^q)$

Solutions

Solution de l'exercice 1
On regarde modulo 8, et on se rend compte qu'on devrait avoir une somme de deux carrés doit être congrue à $6 \pmod 8$, alors que les seules valeurs que les carrés peuvent prendre modulo 8 sont $0, 1, 4$, d'où la contradiction.

Solution de l'exercice 2
On regarde modulo 9, et le côté gauche peut être congru à $-2, -1, 0, 1, 2$ alors que le côté de droite peut être congru à $3, 4, -4$, donc l'équation n'a pas de solution.

Solution de l'exercice 3
2020^{2021} est pair, et comme $2019 \equiv -1 \pmod{10}$, on obtient $2019^{2020^{2021}} \equiv 1 \pmod{10}$.

Solution de l'exercice 4
On remarque que $3^2 \equiv 9 \equiv -1 \pmod{10}$, donc $3^4 \equiv 1 \pmod{10}$. Par ailleurs, 2024^{2025} est un multiple de 4, donc on a encore une fois $2023^{2024^{2025}} \equiv 1 \pmod{10}$.

Solution de l'exercice 5
Par le Petit théorème de Fermat, on a $2022^{10} \equiv 1 \pmod{11}$. Ainsi, si on connaît la valeur de 2022^{2022} modulo 10, on serait très content.
On regarde les puissances de 2 modulo 10 : elles ont une période de 4 : $2, 4, 6, 8, 2 \ldots$ Comme 2022 est congru à $2 \pmod 4$, on obtient $2022^{2022} \equiv 2^{2022} \equiv 4 \pmod{10}$.
Par ailleurs $2024 = 184 \times 11$, donc $2022 \equiv -2 \pmod{11}$.
Finalement, $2022^{2022^{2022}} \equiv 2022^{10k} \times (-2)^4 \equiv 16 \equiv 7 \pmod{11}$

Solution de l'exercice 6
Soit n une solution, et m tel que $n \times 2^{n+1} + 1 = m^2$. Remarquons que $n \times 2^{n+1}$ est pair car $n + 1 \geq 1$, donc m est impair. Écrivons donc $m = 2k + 1$.
L'équation devient alors $n \times 2^{n+1} = (m-1)(m+1)$, ou encore $n \times 2^{n-1} = k(k+1)$. Parmi k et $k+1$, l'un des deux est pair, et l'autre est impair. Supposons que k est pair. Alors $2^{n-1} \mid k(k+1)$, et par Gauss, $2^{n-1} \mid k$. Ainsi, $a2^{n-1} = k$, et en réinjectant dans $n2^{n-1} = k(k+1)$, on obtient $n = a(k+1)$, soit $k + 1 \mid n$. Mais alors $k + 1 \leq n$ et $2^{n-1} \leq k$.
En combinant, on obtient $2^{n-1} < n$. Or 2^{n-1} croît beaucoup plus vite que n, donc on va avoir un problème pour n suffisamment grand. Vérifions-le.
Pour $n = 2$, on a $2^{2-1} = 2$, et pour $n = 3$, on a $2^{3-1} > 3$.

Par récurrence, si on a un $n > 2$ tel que $2^{n-1} > n$, alors $2^n > 2n > n+1$, et ce sera encore le cas pour $n+1$, ce qui conclut par récurrence.
Ainsi pour $n \geq 3$, $2^{n-1} > n$.

Reste le cas où k est impair, qui se résout de la même manière, en inversant k et $k+1$. On obtient encore une inégalité qui devient fausse pour les grands n, même si elle devient fausse plus tard que celle que nous avons traité.
Finalement, on obtient $3 \times 2^{3+1} + 1 = 49 = 7^2$ pour seule solution.

Solution de l'exercice 7 (Pas donné en TD)
1) On a $\left(a^{\frac{p-1}{2}}\right)^2 = a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$. Ainsi, $a^{\frac{p-1}{2}}$ vérifie $x^2 \equiv 1 \pmod p$. Cette équation devient $p \mid x^2 - 1$, et par le lemme d'Euclide, $p \mid x-1$ ou $p \mid x+1$, soit $x \equiv \pm 1 \pmod p$. Ainsi, $a^{\frac{p-1}{2}}$ peut prendre les valeurs 1 et -1 modulo p.
2) Supposons que a soit un carré modulo p, c'est-à-dire $a \equiv b^2$ pour un certain b. Alors $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv b^{p-1} \equiv 1 \pmod p$. Donc si a est un carré, alors $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p$. Comme dit dans l'énoncé, cette implication est en fait une équivalence, mais il faut la notion de racine primitive pour pouvoir montrer l'équivalence, donc nous n'allons pas le faire ici.
3) On applique ce qu'on vient de voir ! $(-1)^n \equiv 1 \pmod p$ si et seulement si n est pair (car $p \neq 2$!), donc $(-1)^{\frac{p-1}{2}} = 1$ si et seulement si $\frac{p-1}{2}$ est pair, ou encore $p \equiv 1 \pmod 4$.
4) Si $n = 0$, on a $(0,1)$ et $(1,0)$. Si $n = 1$, il n'y a pas de solutions. Sinon, supposons que a soit premier avec 11. Alors $a^2 \equiv -b^2 \pmod{11}$, ce qu'on réécrit $-1 \equiv (ba^{-1})^2 \pmod{11}$. Or -1 n'est pas un carré modulo 11, puisque $11 \equiv 3 \pmod 4$! Contradiction. Donc a est divisible par 11, et b aussi.
On peut donc diviser par 11^2 des deux côtés, et on obtient la même équation avec $n-2$ et $\frac{a}{11}$ et $\frac{b}{11}$. On peut donc réitérer le procédé, jusqu'à avoir $n = 0$ ou $n = 1$.
On a vu que seul $n = 0$ était possible, et donc après avoir divisé beaucoup de fois par 11^2, on est tombé sur $(1,0)$ ou $(0,1)$. Ainsi, au début on avait un triplet de la forme $(11^k, 0, 2k)$, ou $(0, 11^k, 2k)$.

Solution de l'exercice 8
Supposons que $p \mid 5^p - 2^p$. Alors $5 \equiv 5^p \equiv 2^p \equiv 2 \pmod p$ par Fermat ($p > 5$) soit $p \mid 3$: impossible.
Ainsi, $p \mid 5^q - 2^q$ par le lemme d'Euclide. De même, $q \mid 5^p - 2^p$. Mais alors, $(5 \times 2^{-1})^p \equiv 1 \pmod q$, et par Fermat, $(5 \times 2^{-1})^{q-1} \equiv 1 \pmod q$.
Supposons que p et $q-1$ soient premiers entre eux. Alors on a un couple de Bézout u, v tel que $(q-1)u + pv = 1$. Alors

$$(5 \times 2^{-1})^1 = (5 \times 2^{-1})^{u(q-1)+pv} = \left((5 \times 2^{-1})^{q-1}\right)^u \times \left((5 \times 2^{-1})^p\right)^v \equiv 1^u \times 1^v = 1 \pmod q$$

soit $5 \equiv 2 \pmod q$, encore une contradiction.
Or p est premier, donc $p \mid q-1$. De même, $q \mid p-1$. Ainsi, $p \leq q-1 < q \leq p-1 < p$, soit $p < p$, contradiction.
On a eu beaucoup de sous-cas, mais tous ont fini en une contradiction, donc il n'y a pas de solutions.

4 Entraînement de fin de parcours

Veuillez rédiger chaque problème sur une copie différente. N'oubliez pas d'écrire votre nom et chaque numéro d'exercice. Les calculatrices sont interdites.

Pour les exercices de géométrie, on attend de l'élève une figure propre, grande, où la propriété que l'on cherche à démontrer est apparente : s'il faut démontrer que des points sont alignés (ou cocycliques), il faut tracer la droite (ou le cercle) qui passe par ces points.

Énoncés

Exercice 1
Trouver tous les n tels que $6^n + 19$ soit premier.

Exercice 2
Soient A, B deux points sur le cercle Γ de centre O, et soit D le point d'intersection de la bissectrice de $\widehat{OAB}$ avec Γ, et E la deuxième intersection de (AB) et du cercle circonscrit à OBD.

Montrer que le triangle OAE est isocèle en A.

Exercice 3
Trouver tous les triplets d'entiers positifs (p, n, m) tels que p soit premier et $p^n + 144 = m^2$

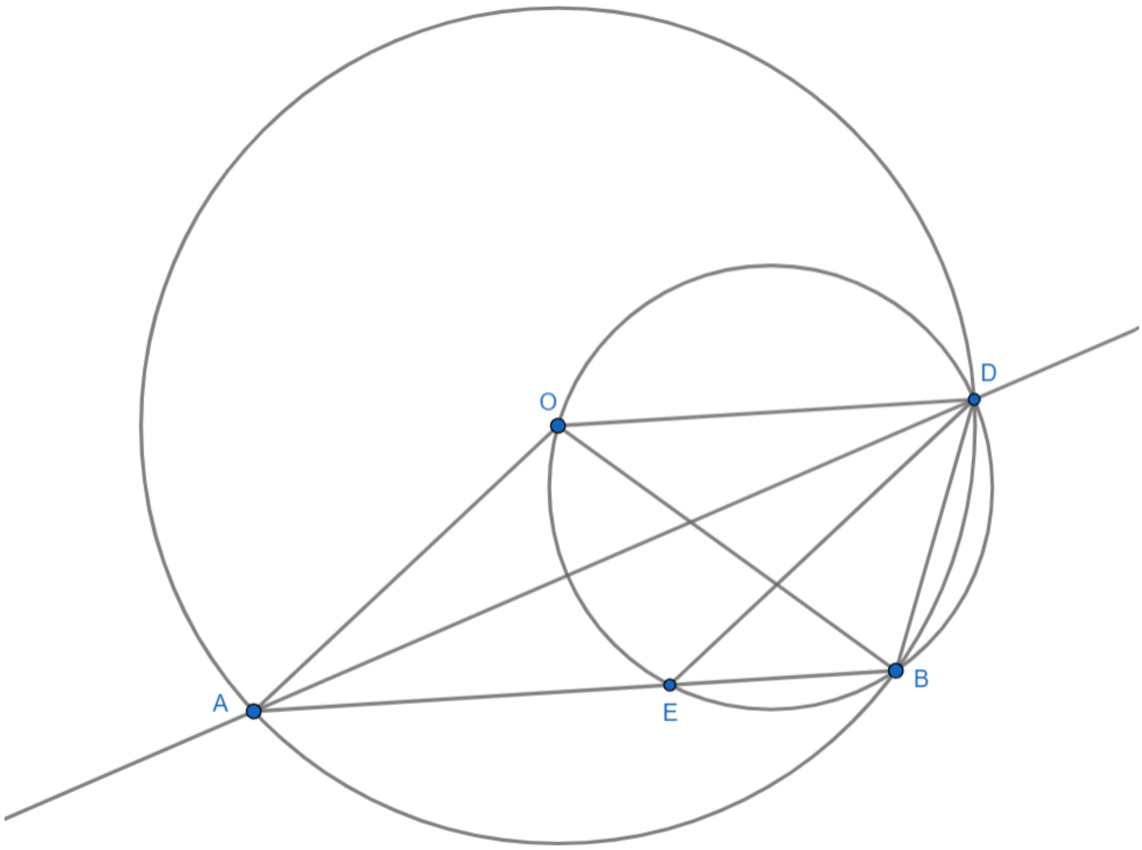
Exercice 4
On prend $ABCD$ un carré, et P sur le segment $[BC]$. On pose M l'intersection de (CD) avec (AP) et N l'intersection de (AB) et (DP).
Montrer que (NC) et (BM) sont perpendiculaires.

Solution de l'exercice 1
En regardant les petits cas, on se rend compte que tous ces nombres sont divisibles par 5. Prouvons le donc :

$$6^n + 19 \equiv 1^n + 19 \equiv 1 + 19 \equiv 0 \pmod 5.$$

Comme de plus, $6^n + 19 \geq 19 > 5$, $6^n + 19$ n'est pas premier, pour tout n entier.

Solution de l'exercice 2

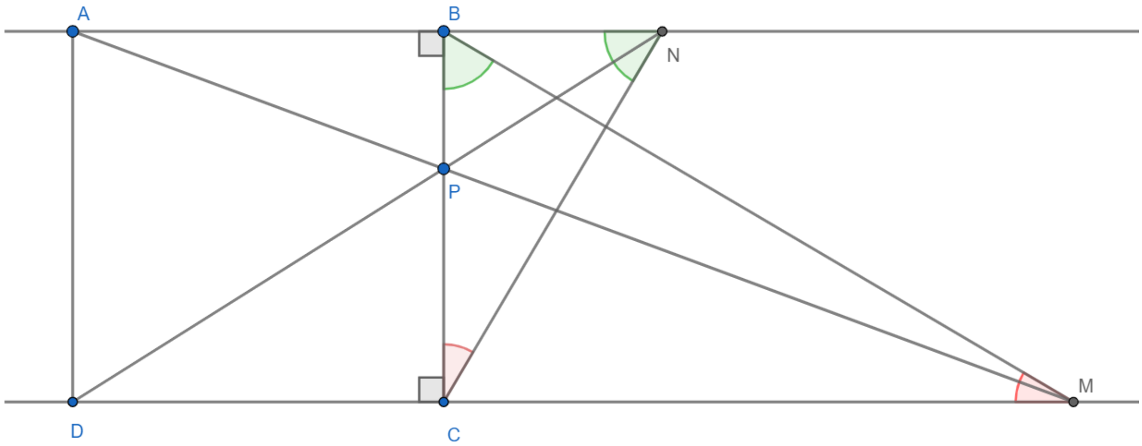


On peut montrer que $OAED$ est un losange. On pose $\alpha = \widehat{OAD} = \widehat{BAD}$. Par théorème de l'angle au centre, $\widehat{BOD} = 2\widehat{BAD} = 2\alpha$ et par cocyclicité de $ODBE$ $\widehat{DEB} = 2\alpha$ soit $\widehat{AED} = 180 - 2\alpha$.
Aussi, on a OAD isocèle en O et $\widehat{AOD} = 180 - 2\alpha$. Les deux triangles AOD et AED sont isométriques, ce qui montre que $OAED$ est un losange et permet de conclure que AOE isocèle en A.

Solution de l'exercice 3
On peut factoriser l'équation sous la forme $p^n = (m-12)(m+12)$. Ainsi, $m-12$ et $m+12$ sont tous deux des diviseurs de p^n, donc eux aussi des puissances de p. On appelle a et b les exposants, de sorte que $p^a = m - 12$ et $p^b = m + 12$ (on sait donc que $b > a$ et que $a + b = n$). En soustrayant la deuxième égalité à la première, on obtient $p^b - p^a = 24$. Si $a > 0$, on sait que p divise $p^b - p^a$, donc p divise 24, donc $p = 2$ ou $p = 3$ sauf si $a = 0$. On distingue donc 3 cas :

Si $a = 0$, la première équation donne $1 = m - 12$, soit $m = 13$. En reportant dans la deuxième équation, on obtient $p^b = 13 + 12 = 25$ donc p vaut 5 et on trouve la solution $(5, 2, 13)$.
Si $p = 2$, on obtient $2^b - 2^a = 24$. On remarque que $2^b > 24 > 2^4$, donc $b \geqslant 5$. Ainsi, on trouve que $-2^a \equiv 8[16]$, autrement dit $a = 3$. On trouve alors $b = 5$, soit $n = 3 + 5 = 8$, et finalement la solution $(2, 8, 20)$.
Si $p = 3$, on obtient $3^b - 3^a = 24$. Par un raisonnement analogue, on trouve $a = 1$ et $b = 3$, d'où la solution $(3, 4, 15)$.
On vérifie réciproquement que ces trois solutions conviennent, ce sont donc les seules.

Solution de l'exercice 4



D'une part, on a $CMP \sim BAP$ soit $\frac{CM}{AB} = \frac{PC}{BP}$. D'autre part, on a $CDP \sim BNP$ soit $\frac{PC}{BP} = \frac{CD}{BN}$. $ABCD$ étant un carré, on a l'égalité $BA = CD = BC$, ce qui donne en combinant les résultats précédents $\frac{BN}{BC} = \frac{BN}{CD} = \frac{BP}{PC} = \frac{AB}{CM} = \frac{BC}{CM}$.
Les angles $\widehat{NBC}$ et $\widehat{BCM}$ sont droits, ce qui donne $BNC \sim CBM$. Ainsi, $\widehat{NCM} + \widehat{BMC} = \widehat{BNC} + \widehat{BCN} = 90$, ce qui conclut.

5 Derniers cours

1 Révisions (Xavier et Aurélien)

Séance de révisions

Arithmétique

Exercice 1
Soient a, b, n des entiers, $n \geqslant 1$, $a \equiv b \mod n$. Montrer que $a^n \equiv b^n \mod n^2$.

<u>*Solution de l'exercice 1*</u>
On veut montrer que $n^2 | a^n - b^n$. Or on sait que $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1}$. Puisque $n | a - b$ par hypothèse, il suffit de montrer que $n | a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1}$. Mais $a \equiv b \mod n$, donc en fait $a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1} \equiv a^{n-1} + a^{n-1} + a^{n-1} = na^{n-1} \equiv 0 \mod n$, ce qui conclut.

Exercice 2
Trouver les $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $x^4 + 6 = y^3$.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u>
L'idée ici est de raisonner modulo un entier bien choisi pour essayer d'arriver à une contradiction. On cherche un nombre premier p modulo lequel il y a peu de cubes et de puissances quatrièmes. Pour cela, l'idéal est que $p - 1$ soit divisible par 3 et 4, donc par 12. On peut par exemple prendre $p = 13$. Les cubes modulo 13 sont $0, 1, 5, 8$ et -1, tandis que les puissances quatrièmes sont $0, 1, 3$ et 9. En regardant les différents cas, on voit que ce n'est pas possible.

Exercice 3
Existe-t-il dix entiers strictement positifs distincts dont la moyenne arithmétique est égale à 5 fois leur pgcd ? À 6 fois leur pgcd ?

<u>*Solution de l'exercice 3*</u>
Supposons disposer de tels entiers $a_1, \ldots, a_n$, de moyenne arithmétique égale à k fois leur pgcd. On note d leur pgcd, et on écrit $a_i = db_i$ pour tout i. La moyenne arithmétique des a_i est alors égale à d fois celle des b_i, ainsi qu'à kd. Donc les b_i ont une moyenne arithmétique égale à k. Autrement dit, on peut supposer que les entiers choisis sont premiers entre eux.

Si $k = 5$, on a $b_1 + b_2 + \cdots + b_{10} \geqslant 1 + 2 + \cdots + 10 = 55$, donc leur moyenne arithmétique est strictement supérieure à 5, absurde.

Si $k = 6$, on peut prendre $1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11$ qui conviennent.

Algèbre

Exercice 4
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on ait :

$$f(f(x) + y) = f(x + y) + yf(y)$$

<u>*Solution de l'exercice 4*</u>
Avec $y = 0$, on obtient $f(f(x)) = f(x)$. Puis, avec $x = f(X)$, on trouve $f(X + y) = f(f(X) +$

$y) = f(X+y) = yf(y)$, donc $yf(y) = 0$, donc f est nulle sauf éventuellement en 0. Mais on a $0 = f(f(1)) = f(0)$, donc f est identiquement nulle.

Réciproquement, f identiquement nulle convient clairement.

Exercice 5
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tous $a, b > 0$, on a :

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^n + \left(1+\frac{b}{a}\right)^n \geqslant 2^{n+1}$$

Quand y a-t-il égalité ?

Solution de l'exercice 5
Par IAG :

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^n + \left(1+\frac{b}{a}\right)^n \geqslant 2\sqrt{\left(1+\frac{a}{b}\right)^n \left(1+\frac{b}{a}\right)^n} = 2(\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{a}\right))^{\frac{n}{2}}$$

avec égalité si et seulement si $\left(1+\frac{a}{b}\right)^n = \left(1+\frac{b}{a}\right)^n$, ie si $a = b$.

Or $\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{a}\right) = 2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$, et il est connu que $\frac{a}{b} \geqslant \frac{b}{a}$ avec égalité si et seulement si $\frac{a}{b} = 1$, ie si $a = b$.

Donc $\left(1+\frac{a}{b}\right)^n + \left(1+\frac{b}{a}\right)^n \geqslant 2 \cdot 4^{\frac{n}{2}} = 2^{n+1}$ avec égalité si et seulement si $a = b$.

Exercice 6
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on ait :

$$f(f(x) + x + y) = f(x+y) + yf(y)$$

Solution de l'exercice 6
Avec $x = 0$, on obtient $f(f(0) + y) = f(y) + yf(y) = (y+1)f(y)$. Pour faire disparaître le membre de droite, on prend alors $y = -1$, ce qui donne $f(f(0) - 1) = 0$. Posons $a = f(0) - 1$. Pour faire disparaître le $f(x)$ à gauche, on prend $x = a$, ce qui donne $f(a+y) = f(a+y) + yf(y)$, soit $yf(y) = 0$, donc f est nulle sauf éventuellement en 0. Mais, si $f(0) \neq 0$, on a $f(f(0)) = 0$, donc, avec $x = y = 0$, on trouve une contradiction. Donc la seule solution possible est la fonction nulle (dont on vérifie immédiatement qu'elle convient).

Géométrie

Exercice 7
Soit Γ un cercle, A, B, C, D quatre points sur Γ (dans cet ordre) et I, J, K, L les milieux des arcs reliant A à B, B à C, C à D, D à A respectivement (arcs pris en parcourant le cercle toujours dans le même sens). Montrer que (IK) est perpendiculaire à (JL).

<u>*Solution de l'exercice 7*</u>
Soit X le point d'intersection de (IK) et (JL). Alors on a

$$
\begin{aligned}
\widehat{IXJ} &= 180 - \widehat{JXK} && \text{(IV.1)}\\
&= \widehat{JKI} + \widehat{LJK} && \text{(IV.2)}\\
&= \widehat{JKB} + \widehat{LJD} + \widehat{BKI} + \widehat{DJK} && \text{(IV.3)}\\
&= \widehat{JKC} + \widehat{LJA} + \widehat{AKI} + \widehat{CJK} && \text{(IV.4)}\\
&= \widehat{JIC} + \widehat{LJA} + \widehat{AJI} + \widehat{CIK} && \text{(IV.5)}\\
&= \widehat{JIK} + \widehat{LJI} && \text{(IV.6)}\\
&= 180 - \widehat{IXJ} && \text{(IV.7)}\\
& && \text{(IV.8)}
\end{aligned}
$$

Donc l'angle est droit.

Exercice 8
Soit ABC un triangle, H_A, H_B, H_C les pieds des hauteurs issues de A, B, C respectivement. Soient I et J les symétriques de H_A par rapport à (AB) et (AC) respectivement. Montrer que I, H_B, H_C et J sont alignés.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u>

$$
\begin{aligned}
\widehat{IH_CB} &= \widehat{H_AH_CB} && \text{(IV.9)}\\
&= \widehat{ACB} \text{ par angle inscrit avec } ACH_AH_C \text{ cyclique} && \text{(IV.10)}\\
&= 180 - \widehat{H_BH_CB} \text{ par angle inscrit avec } BCH_BH_C \text{ cyclique} && \text{(IV.11)}\\
& && \text{(IV.12)}
\end{aligned}
$$

Donc IH_BH_C sont alignés. De même pour l'alignement de JH_CH_B

Exercice 9
Soit ABC un triangle, F et E les points de tangence respectifs du cercle inscrit avec (AB) et (AC). Soit P le projeté orthogonal de C sur la bissectrice issue de B. Montrer que E, F et P sont alignés.

<u>*Solution de l'exercice 9*</u>

Soit I le centre du cercle inscrit. Alors $ICEP$ est cyclique.

$$\begin{aligned}
180-\widehat{FEC} &= \widehat{AEF} && \text{(IV.13)}\\
&= \widehat{AFE} && \text{(IV.14)}\\
&= \frac{1}{2}(\widehat{AFE}+\widehat{AEF}) && \text{(IV.15)}\\
&= \frac{1}{2}(180-\widehat{FAE}) && \text{(IV.16)}\\
&= \frac{1}{2}(\widehat{ABC}+\widehat{ACB}) && \text{(IV.17)}\\
&= \widehat{IBC}+\widehat{ICB} && \text{(IV.18)}\\
&= \widehat{PIC} && \text{(IV.19)}\\
&= \widehat{PEC} && \text{(IV.20)}
\end{aligned}$$

Ce qui conclut.

Combinatoire

Exercice 10
On considère un tableau 4×4. À chaque étape, on choisit une ligne, une colonne ou une grande diagonale et on change tous les 0 de celle-ci en 1, et inversement. Pour lesquels de ces tableaux est-il possible d'arriver au tableau ne contenant que des 0 ?

$$\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&1&0&1\\0&0&0&1\\1&0&1&1\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&1&0&0\\0&1&0&1\\1&0&0&1\end{pmatrix}$$

Solution de l'exercice 10
Pour le premier cas, on observe que la parité du nombre de 1 doit demeurer constante, mais il y a au départ un nombre impair de 1 et il ne peut donc pas y en avoir 0 à la fin.

Pour le deuxième, on observe qu'en fait, si on colorie en noir et blanc comme un damier les tableaux, la parité du nombre de 1 sur des cases blanches doit demeurer constante, mais cette parité est initialement impaire et il y aura donc toujours des 1.

Pour le troisième, si on effectue l'opération sur la colonne de droite, la deuxième ligne et la diagonale qui va d'en bas à gauche vers en haut à droite, on arrive bien à n'obtenir que des 0.

Exercice 11
Soit $n\geqslant 1$. On choisit $n+1$ entiers entre 1 et $2n$. Montrer qu'il y en a toujours deux tels que l'un divise l'autre.

Solution de l'exercice 11
Tout entier $k>0$ s'écrit de façon unique sous la forme $k=2^r(2q-1)$. De plus, si $1\leqslant k\leqslant 2n$, on a en fait $1\leqslant q\leqslant n$, soit n possibilités pour q. Si on choisit $n+1$ entiers entre 1 et $2n$, d'après le principe des tiroirs, il y en a au moins deux qui s'écrivent sous la forme $a=2^\alpha(2q-1), b=2^\beta(2q-1)$ (avec le même q). On peut par symétrie supposer $\alpha<\beta$, et on a alors $a|b$ comme souhaité.

Exercice 12
On considère une grille infinie. On place cinq pions sur des sommets de celle-ci. Montrer qu'on peut trouver deux pions tels que le milieu du segment qui les relie est sur un sommet de la grille.

Solution de l'exercice 12
Commençons par regarder les abscisses de ces cinq points (à coordonnées entières). Par principe des tiroirs, on peut choisir trois points de sorte que leurs abscisses aient même parité. Puis, parmi ces trois points, toujours par principe des tiroirs, on peut en trouver deux donc les ordonnées ont la même parité. Si on prend ces deux points, puisque le milieu du segment qui les relie a pour coordonnées la moyenne des coordonnées des deux points, ces coordonnées sont entières, comme désiré.

Exercice 13
Soit $n > 0$. Montrer que $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$ par une bijection bien choisie.

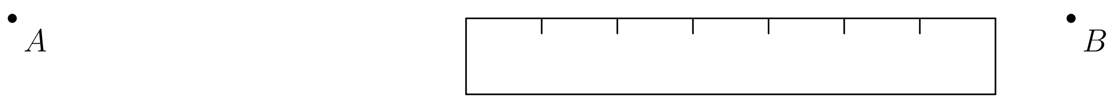
Solution de l'exercice 13
On considère A (resp. B) l'ensemble des parties de $\{0, \ldots, n-1\}$ de cardinal pair (resp. impair). On définit ensuite la fonction $f : A \to B$ qui à une partie X de $\{0, \ldots, n-1\}$ associe $X \cup \{0\}$ si $0 \notin X$, et $X \setminus \{0\}$ si $0 \in X$. Cela augmente ou diminue le cardinal de X de 1, et change donc sa parité. On peut donc définir de même une fonction $g : B \to A$, et f et g sont alors réciproques l'une de l'autre. Ainsi, f est bien une bijection entre A et B. Or le cardinal de A est $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \ldots$, alors que celui de B est $\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \ldots$. En mettant tous les termes du même côté, on trouve l'égalité désirée.

2 Tracer un grand segment avec une règle trop courte (Tristan)

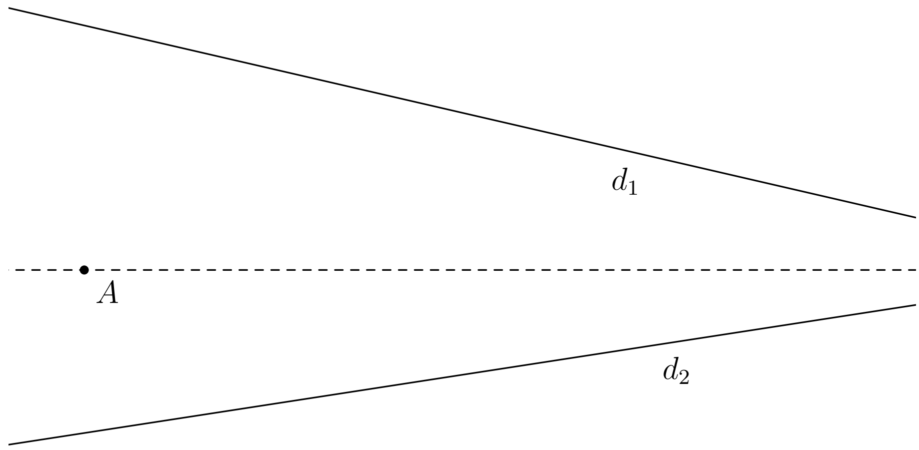
COMMENT TRACER UN GRAND SEGMENT AVEC UNE RÈGLE TROP COURTE ?

L'objectif de ce cours est de résoudre les deux problèmes suivants :

Problème n°1 : Etant donné deux points A et B du plan, comment tracer le segment $[AB]$ avec une règle de longueur strictement plus courte que la longueur AB ?



Problème n°2 : On se donne un point A et deux droites d_1 et d_2 ne passant pas par le point A. On suppose que les deux droites d_1 et d_2 se coupent mais que le point d'intersection B est située en dehors de notre feuille de travail. Comment tracer la droite (AB) ?



On cherche bien sûr une résolution mathématique, et non une solution astucieuse comme "on prend une règle plus grande".

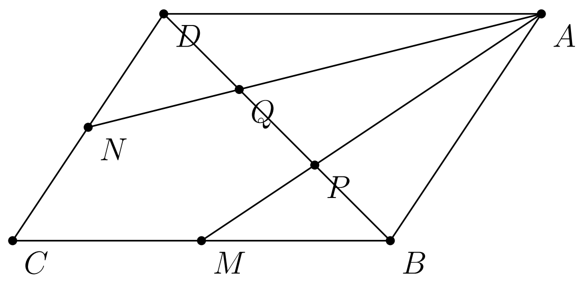
La résolution de ce problème sera l'occasion d'effectuer une introduction à la géométrie projective, à travers quelques théorèmes. La particularité de ces théorèmes est qu'ils ne concernent que des droites et des longueurs. Pas de cercles, pas d'angles.

Le théorème de Thalès

La première étape du voyage est bien sûr le premier théorème concernant juste des droites et des longueurs, le théorème de Thalès.

Exercice 1
Soit $ABCD$ un parallélogramme. Soit M le milieu du segment $[BC]$ et N le milieu du segment $[CD]$. Les droites (AN) et (BD) se coupent en Q et les droites (AM) et (BD) se coupent en P. Montrer que $BP = PQ = QD$.

Solution de l'exercice 1



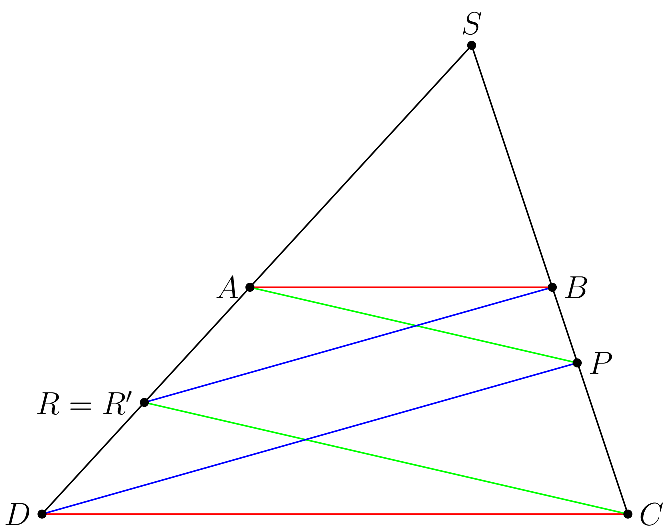
D'après le théorème de Thalès dans le papillon $DNQAB$, $\frac{DQ}{QB} = \frac{DN}{AB} = \frac{1}{2}$. Donc $QB = 2DQ$ et $DQ = \frac{1}{3}DB$.

D'après le théorème de Thalès dans le papillon $BMPAD$, $\frac{PB}{PD} = \frac{MB}{AD} = \frac{1}{2}$ et donc $PB = \frac{1}{3}DB$.

En conséquence, on a aussi $QP = \frac{1}{3}DB$ donc on a les égalités de longueur voulues.

Exercice 2
Soit $ABCD$ un trapèze avec $AB < CD$ et les droites (AB) et (CD) parallèles. Soit P un point appartenant au segment $[CB]$. La parallèle à le droite (AP) passant par le point C coupe le segment $[AD]$ en le point R et la parallèle à la droite (DP) passant par le point B coupe le segment $[AD]$ en le point R'. Montrer que $R = R'$.

Solution de l'exercice 2



Soit S le point d'intersection des droites (CB) et (AD). Comme les droites (AP) et (RC) sont parallèles, d'après le théorème de Thalès on a

$$\frac{AS}{RS} = \frac{PS}{CS}$$

soit $RS \cdot PS = AS \cdot CS$.
Comme les droites (DP) et (BR') sont parallèles, d'après le théorème de Thalès

$$\frac{DS}{R'S} = \frac{PS}{BS}$$

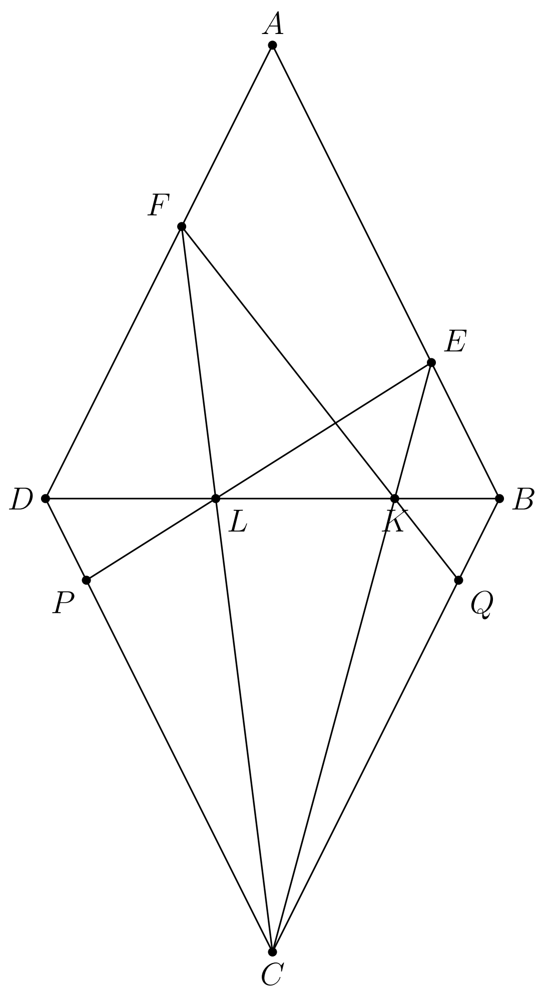
soit $DS \cdot BS = PS \cdot R'S$.
Enfin, les droites (AB) et (CD) sont parallèles donc d'après le théorème de Thalès,

$$\frac{AS}{DS} = \frac{BS}{CS}$$

soit $AS \cdot CS = BS \cdot DS$. On conclut que $PS \cdot RS = PS \cdot R'S$ donc $RS = R'S$ et comme les points S, R et R' sont sur la même droite, on trouve bien $R = R'$.

Exercice 3
Soit $ABCD$ un losange. Soit F un point du segment $[AD]$ et E un point du segment $[AB]$. Les droites (FC) et (BD) se coupent en L, les droites (EC) et (BD) se coupent en K. Les droites (FK) et (BC) se coupent en Q et les droites (EL) et (DC) se coupent en P. Montrer que $CP = CQ$.

Solution de l'exercice 3



On dispose de plusieurs papillons, on va donc les examiner chacun et tirer les informations utiles.

D'après le théorème de Thalès dans le papillon $QBKDF$, $\frac{QB}{DF} = \frac{BK}{DK}$.

D'après le théorème de Thalès dans le papillon $EBKDC$, $\frac{EB}{DC} = \frac{BK}{DK}$ et ainsi, en combinant les deux égalités $QB = \frac{DF \cdot DF}{DC}$.

D'après le théorème de Thalès dans le papillon $DPLEB$, $\frac{DP}{EB} = \frac{DL}{LB}$.

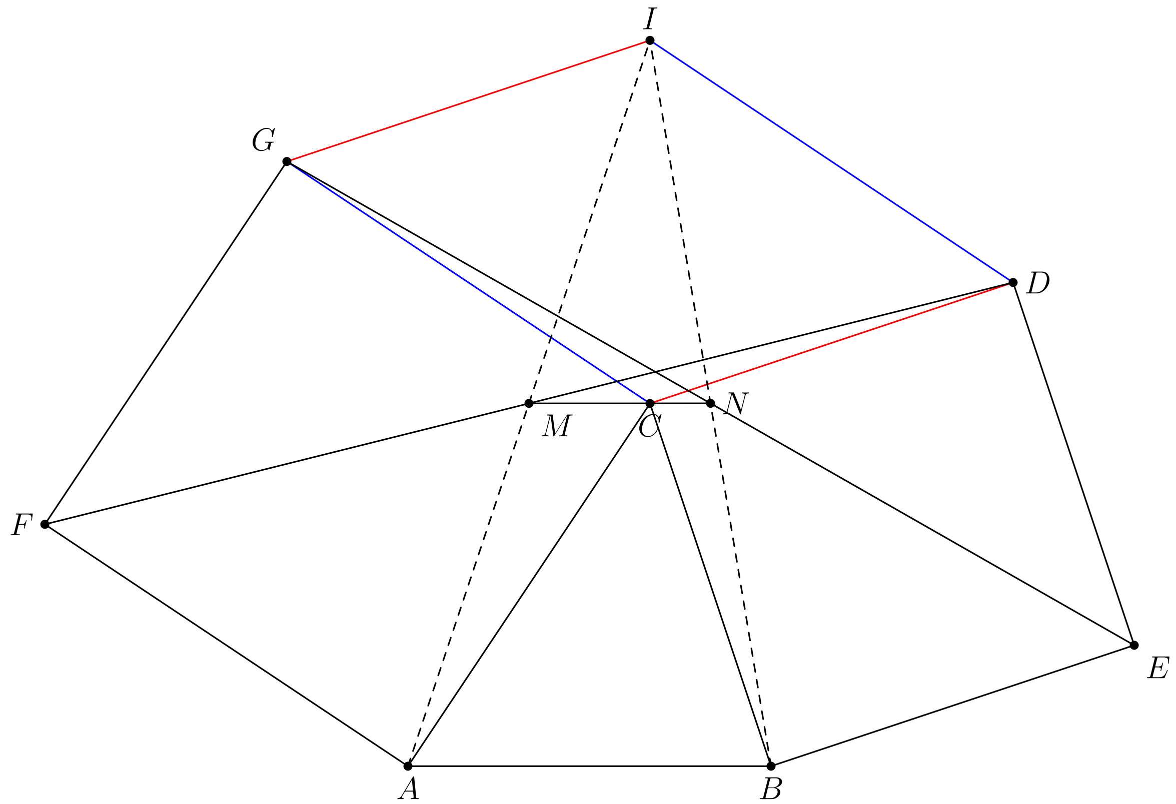
D'après le théorème de thalès dans le papillon $DFLCB$, $\frac{DF}{CB} = \frac{DL}{LB}$. Ainsi, en combinant les deux égalités, $DP = \frac{DF \cdot EB}{BC} = \frac{DF \cdot EC}{CD} = QB$.

On a donc bien $CP = CQ$.

Exercice 4

Soit ABC un triangle. On construit à l'extérieur du triangle ABC le carré $BCDE$ et on construit à l'extérieur du triangle ABC le carré $ACGF$. On note M et N les milieux des segments $[FD]$ et $[GE]$. Calculer la longueur MN en fonction des longueurs des côtés du triangle ABC.

Solution de l'exercice 4



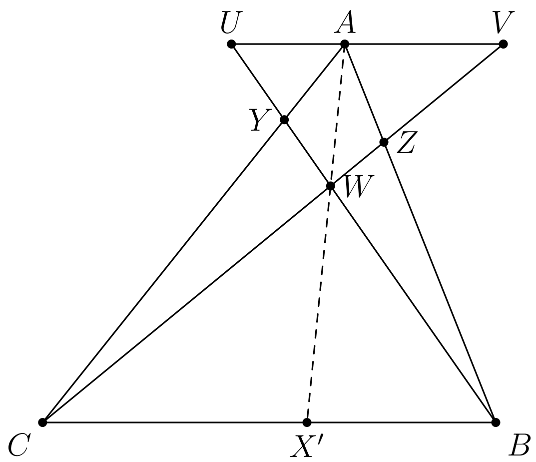
On introduit I le point tel que le quadrilatère $IDCG$ soit un parallélogramme. Alors les droites $(GI), (CD)$ et (BE) sont parallèles. Donc par angles alternes-internes, $\widehat{NEB} = \widehat{NGI}$ et $NE = NG$ et $BE = GI$. Donc les triangles NEB et NGI sont isométriques. Donc les points I, N et B sont alignés. De même on obtient que les points I, M et A sont alignés. On a de plus que les points M et N sont les milieux des segments $[AI]$ et $[BI]$. On a donc par le théorème de Thalès que $MN = \frac{1}{2}AB$.

Le théorème de Céva

La deuxième étape, plus significative, vers la géométrie projective est le théorème suivant, appelé le théorème de Céva :

Théorème 1. Soit ABC un triangle et X, Y et Z des points appartenant respectivement aux côtés $[BC], [CA]$ et $[AB]$. Alors les droites $(AX), (BY)$ et (CZ) sont concourantes si et seulement si

$$\frac{XB}{XC} \cdot \frac{YC}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$$



Démonstration.
Soit W le point d'intersection des droites (CZ) et (BY) et soit X' le point d'intersection des droites (AW) et (BC). Il suffit de montrer que

$$\frac{X'C}{X'B} = \frac{YC}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB}$$

en effet, les droites $(AX), (BY)$ et (CZ) sont concourantes si et seulement si $X = X'$.

On trace la droite parallèle d à la droite (BC) passant par le point A. On note U et V les points d'intersection respectifs des droites (BY) et (CZ) avec la droite d.

D'après le théorème de Thalès dans le "papillon" $AVWCX'$, $\frac{X'C}{AV} = \frac{X'W}{AW}$. De même dans le papillon $AUVWBX'$, $\frac{X'B}{AU} = \frac{X'W}{AW}$. On obtient en combinant que

$$\frac{X'C}{X'B} = \frac{AV}{AU}$$

D'autre part, le théorème de Thalès dans le papillon $AVZCB$ donne $\frac{AV}{CB} = \frac{AZ}{ZB}$. De même dans le papillon $AUYBC$, on trouve $\frac{AU}{CB} = \frac{AY}{YC}$. On combine ces deux égalités de rapport pour trouver :

$$\frac{X'C}{X'B} = \frac{AV}{AU} = \frac{AV}{BC} \cdot \frac{BC}{AU} = \frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{CY}{AY}$$

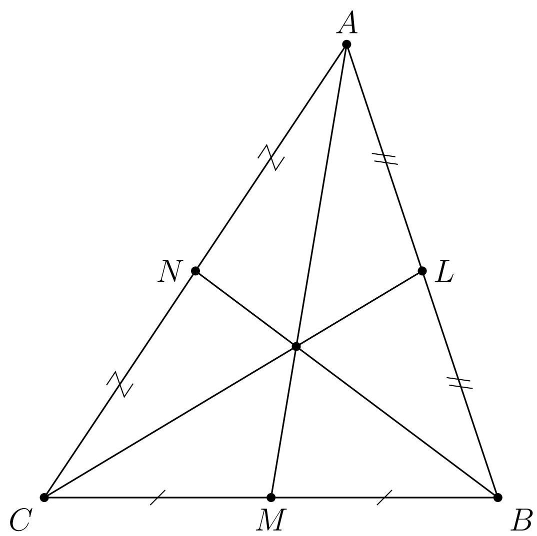
ce qui donne le résultat souhaité.

□

Le théorème de Céva permet de montrer l'existence de nombreux points particuliers.

Exercice 5
Démontrer que les médianes d'un triangle sont concourantes.

Solution de l'exercice 5



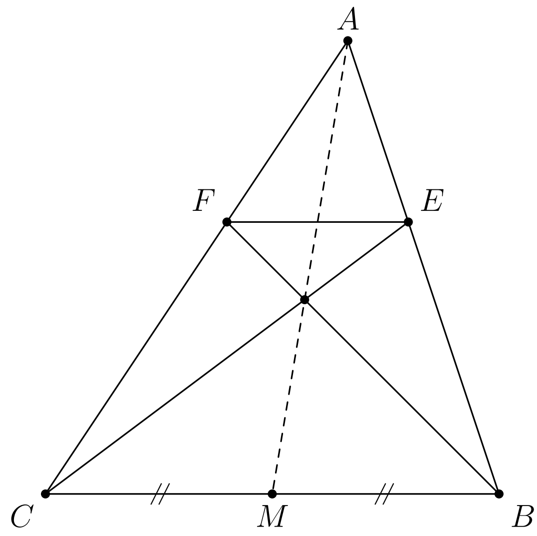
Notons M, L et N les milieux respectifs des segments $[BC], [AB]$ et $[AC]$. On a $AL = BL$, $BM = CM$ et $CN = AN$. Donc

$$\frac{AL}{BL} \cdot \frac{BM}{CM} \cdot \frac{CN}{AN} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

donc d'après le théorème de Céva, les médianes sont concourantes.

Exercice 6
Soit ABC un triangle et d une droite parallèle au côté $[BC]$ coupant le segment $[AB]$ au point E et le segment $[AC]$ au point F. Montrer que le point d'intersection des droites (EC) et (BF) appartient à la médiane issue du sommet A.

Solution de l'exercice 6



Nous allons montrer avec le théorème de Céva que les droites $(AM), (CE)$ et (BF) sont concourantes.

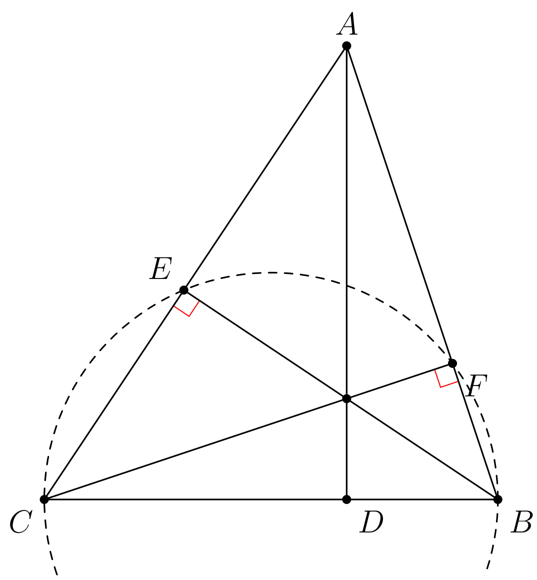
En effet, d'après le théorème de Thalès, on a $\frac{AE}{EC} = \frac{AF}{FB}$. Ainsi

$$\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CM}{MB} \cdot \frac{BF}{AF} = 1$$

et l'on peut conclure avec le théorème de Céva.

Exercice 7
Démontrer que les hauteurs d'un triangle sont concourantes.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u>



On note D, E et F les pieds des hauteurs issues des sommets A, B et C.

Puisque $\widehat{CFB} = \widehat{CEB} = 90°$, les points E, F, B et C sont cocycliques. Par puissance du point A par rapport au cercle découvert, $AE \cdot AC = AF \cdot AB$ donc $\frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC}$.

De même on obtient $\frac{BF}{BD} = \frac{BC}{BA}$ et $\frac{CD}{CE} = \frac{CA}{CB}$. Alors

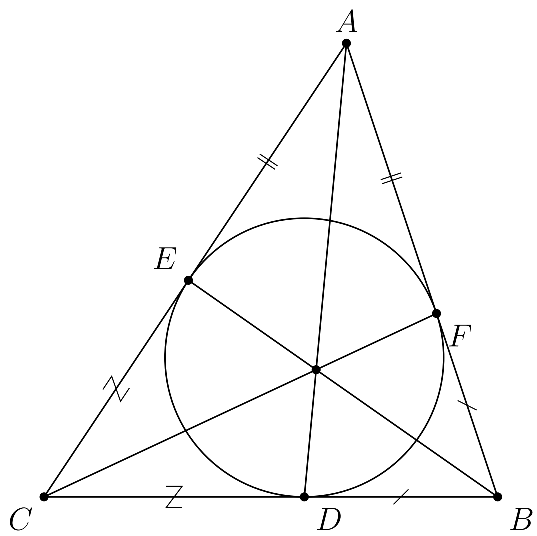
$$\frac{AE}{CE} \cdot \frac{CD}{BD} \cdot \frac{BF}{AF} = \frac{AE}{AF} \cdot \frac{BF}{BD} \cdot \frac{CD}{CE} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{BA} \cdot \frac{CA}{CB} = 1$$

donc d'après le théorème de Céva, les trois hauteurs sont concourantes.

Exercice 8

Soit ABC un triangle et soient D, E et F les points de contact du cercle inscrit avec les côtés $[BC], [CA]$ et $[AB]$. Montrer que les droites $(AD), (BE)$ et (CF) sont concourantes. Le point de concours est appelé point de Gergonne.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u>



Puisque les droites (AE) et (AF) sont tangentes au cercle inscrit aux points E et F, on a $AF = AE$. On a de même $BF = BD$ et $CD = CE$.

Ainsi :

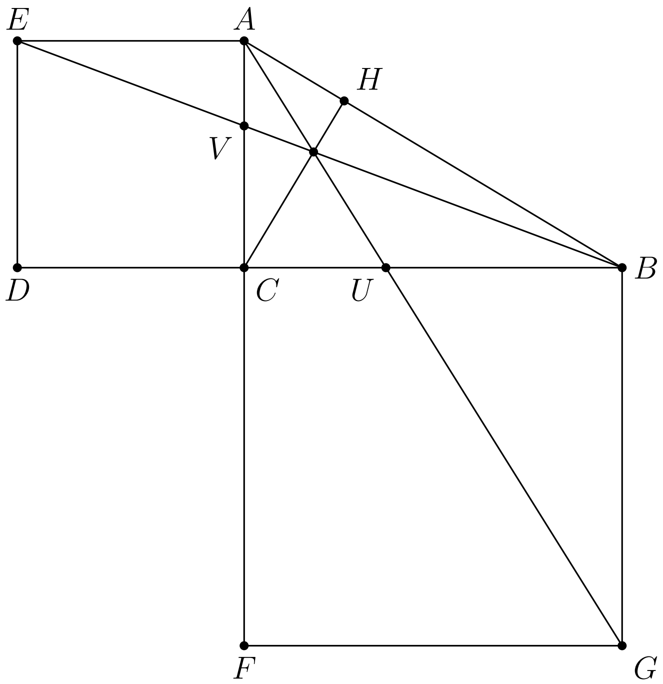
$$\frac{AE}{CE} \cdot \frac{CD}{BD} \cdot \frac{BF}{AF} = \frac{AE}{AF} \cdot \frac{CD}{CE} \cdot \frac{BF}{BD} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

donc d'après le théorème de Céva, les droites $(AD), (BE)$ et (CF) sont concourantes.

Exercice 9

Soit ABC un triangle rectangle en C. On construit un carré $ACDE$ à l'estérieur du triangle ABC. On construit un carré $BCFG$ à l'extérieur du triangle ABC. Soit H le pied de la hautuer issue du sommet C dans le triangle ABC. Montrer que les droites $(CH), (AG)$ et (BE) sont concourantes.

Solution de l'exercice 9



On note U le point d'intersection des droites (BE) et (AC) et V le point d'intersection des droites (BC) et (AG).

D'une part, par le théorème de Thalès dans le papillon $EAVCB$ on a

$$\frac{AV}{VC} = \frac{AE}{BC} = \frac{AC}{BC}$$

D'autre part d'après le théorème de Thalès dans le papillon $ACUBG$ on a

$$\frac{CU}{BU} = \frac{AC}{BG} = \frac{AC}{BC}$$

Enfin, les triangles ACH, CBH et ABC sont semblables. On a donc

$$\frac{BH}{AH} = \frac{BH}{CH} \cdot \frac{CH}{AH} = \frac{BC}{AC} \cdot \frac{BC}{AC}$$

Ainsi

$$\frac{AV}{CV} \cdot \frac{UC}{UB} \cdot \frac{HB}{HA} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BC}{AC} \cdot \frac{BC}{AC} = 1$$

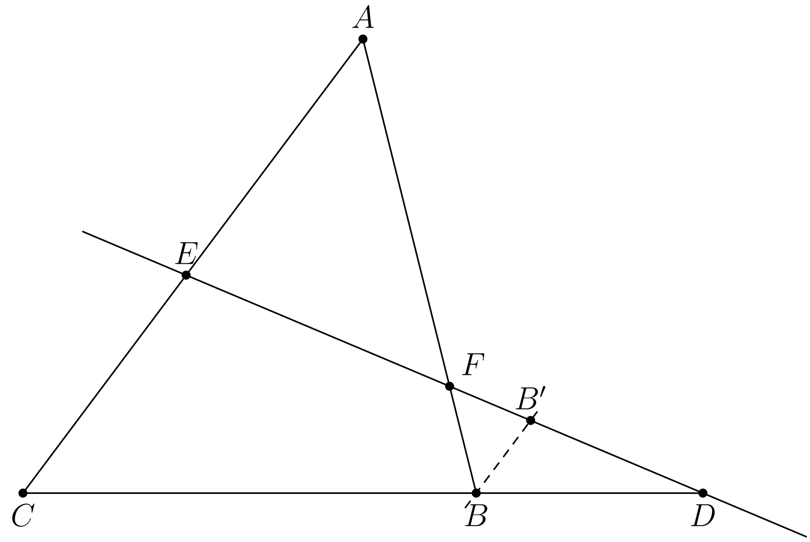
donc d'après le théorème de Céva, les droites (AU), (BV) et (CH) sont concourantes, ce qui donne le résultat voulu.

Le théorème de Ménélaüs

On peut obtenir un théorème dual de celui de Céva. Par dual, on entend que l'on a donné une condition pour que des droites sont concourantes, on cherche désormais une condition pour que des points soient alignés. Voici à cet effet le théorème de Ménélaüs.

Théorème 2. Soit ABC un triangle. Soit D un point de la droite (BC), E un point de la droite (AC) et F un point de la droite (AC). Alors les points D, E et F sont alignés si et seulement si

$$\frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = 1$$



Démonstration.
Une fois de plus, on pose D' le point d'intersection des droites (EF) et (BC) et on montre que le point D' satisfait l'égalité de rapport ci-dessus. Comme les points D, E et F sont alignés si et seulement si $D = D'$, cela fera l'affaire.

On introduit B' le point de la droite (EF) tel que les droites (AC) et (BB') sont parallèles. Alors par le théorème de Thalès dans le papillon $B'BFAE$, on a

$$\frac{FA}{FB} = \frac{EA}{BB'}$$

Dans le triangle $D'BCEB'$, le théorème de Thalès donne

$$\frac{D'B}{D'C} = \frac{BB'}{EC}$$

On obtient donc en multipliant ces deux égalités que

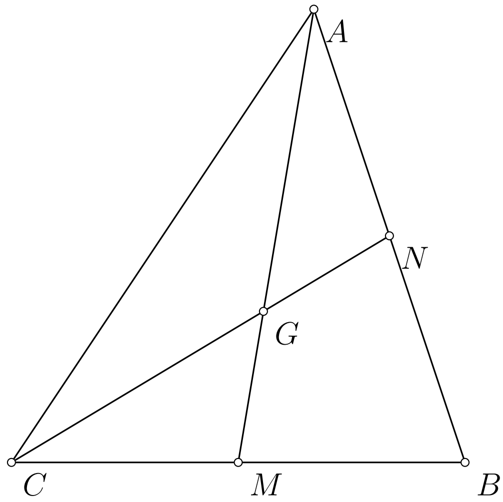
$$\frac{FA}{FB} \cdot \frac{D'B}{D'C} = \frac{EA}{BB'} \cdot \frac{BB'}{EC}$$

donc le point D' satisfait l'égalité de rapport.

$\square$

Exercice 10
Soit ABC un triangle et soit G son centre de gravité. Soit M le milieu du segment $[BC]$. Montrer que la longueur AG vaut $\frac{2}{3}$ de la longueur AM.

Solution de l'exercice 10



Soit N le milieu du segment $[AB]$.
D'après le théorème de Ménélaüs pour le triangle AMB et les points C, G et N :

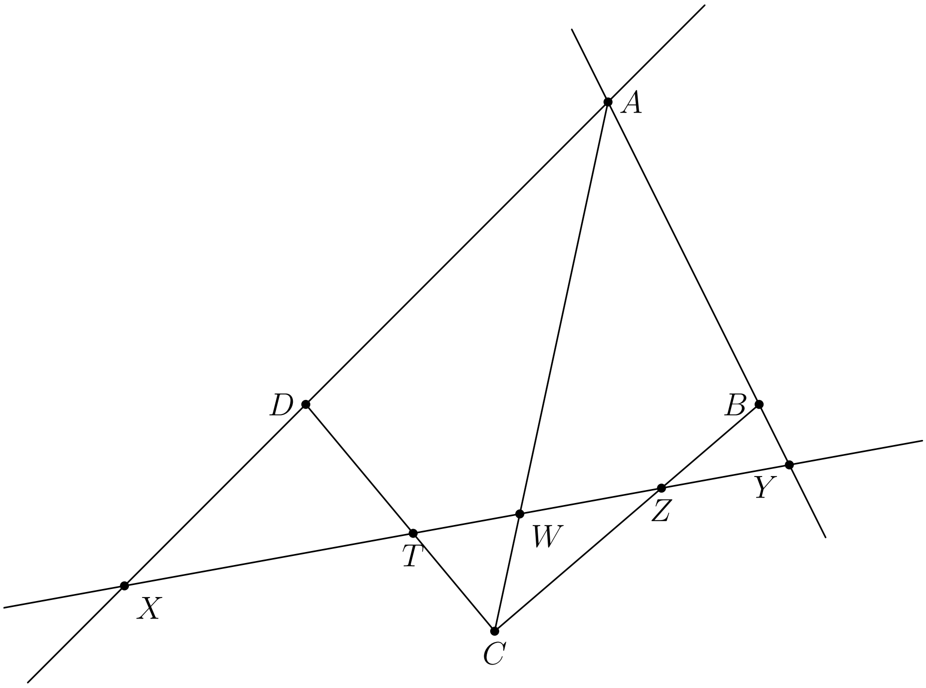
$$1 = \frac{GA}{GM} \cdot \frac{CM}{CB} \cdot \frac{NB}{NA} = \frac{GA}{GM} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1$$

et donc $GA = 2GM$. On a donc bien $GA = \frac{2}{3}AM$.

Exercice 11
Soit $ABCD$ un quadrilatère. Soient X, Y, Z, T des points appartenant respectivement aux droites $(AD), (AB), (BC)$ et (CD). Montrer que si les points X, Y, Z et T sont alignés alors

$$\frac{DX}{AX} \cdot \frac{AY}{BY} \cdot \frac{BZ}{CZ} \cdot \frac{CT}{DT} = 1$$

Solution de l'exercice 11



On introduit le point W d'intersection de la droite (XY) avec la droite (AC). D'après le théorème de Ménélaüs dans le triangle ADC et pour les points X, T et W :

$$\frac{DX}{XA} \cdot \frac{WA}{WC} \cdot \frac{TC}{TD} = 1$$

D'après le théorème de Ménélaüs dans le triangle ABC et pour les points W, Z et Y :

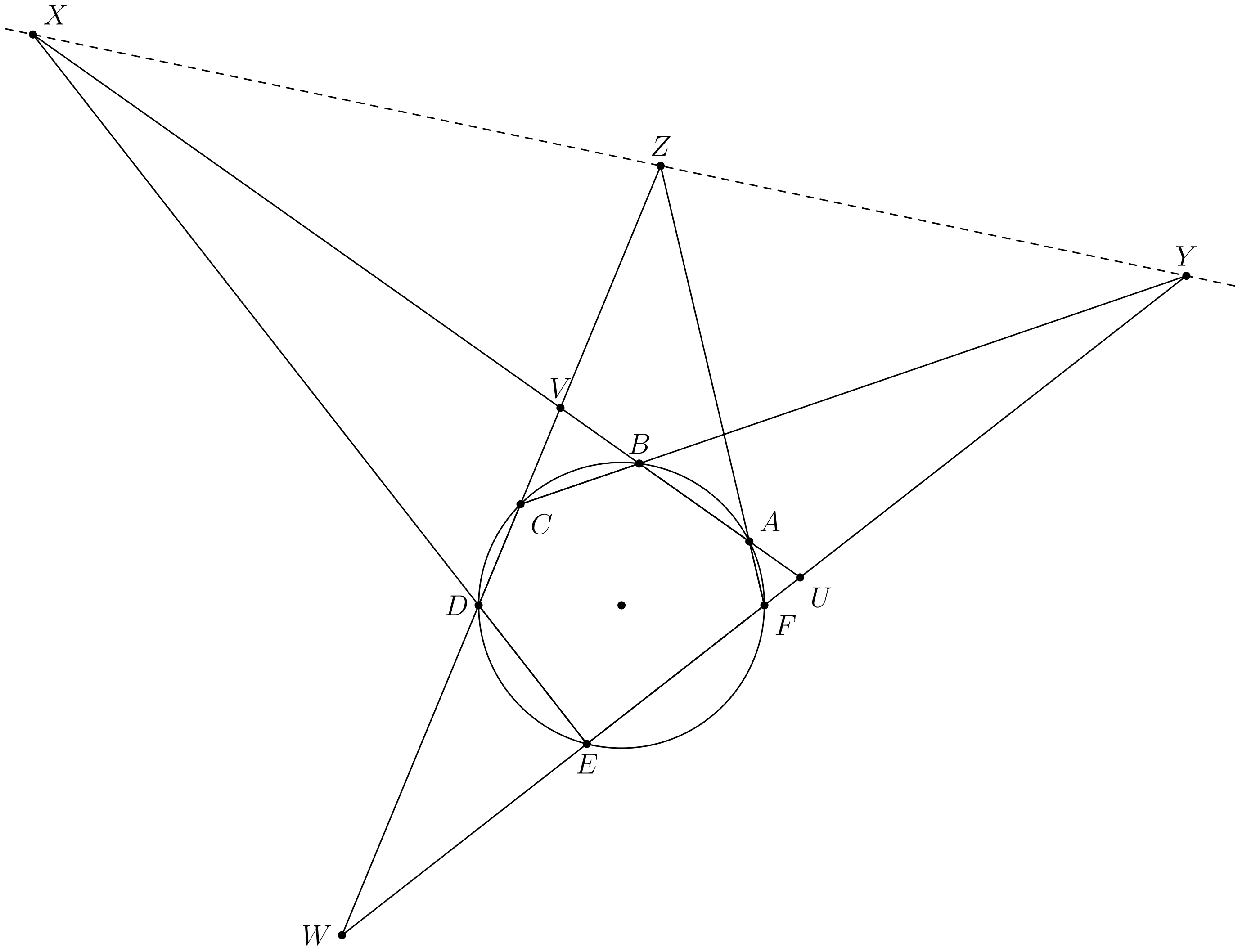
$$\frac{WC}{WA} \cdot \frac{ZC}{ZB} \cdot \frac{YB}{YA} = 1$$

On multiplie ces deux égalités pour obtenir :

$$\frac{DX}{AX} \cdot \frac{AY}{BY} \cdot \frac{BZ}{CZ} \cdot \frac{CT}{DT} = 1$$

Exercice 12
(Théorème de Pascal) Soit $ABCDEF$ un hexagone inscrit dans un cercle. Les droites (AB) et (DE) se coupent en X, les droites (BC) et (EF) se coupent en Y et les droites (CD) et (FA) se coupent en Z. Montrer que les points X, Y et Z sont alignés.

Solution de l'exercice 12



Soit U le point d'intersection des droites (AB) et (EF). Soit V le point d'intersection des droites (DC) et (AB). Soit W le point d'intersection (DC) et (EF). On va appliquer le théorème de Ménélaüs au triangle UVW et aux points X, Y et Z.

Pour cela, on désire montrer que

$$\frac{XV}{XU} \cdot \frac{YU}{YW} \cdot \frac{ZW}{ZV} = 1$$

Pour cela, on va utiliser à volonté le théorème de Ménélaüs et la puissance d'un point par rapport à un cercle.

D'après le théorème de Ménélaüs dans le triangle UVW et pour les points E, D et X, on a

$$\frac{XV}{XU} \cdot \frac{EU}{EW} \cdot \frac{DW}{DV} = 1$$

D'après le théorème de Ménélaüs dans le triangle UVW et pour les points F, A et Z, on a

$$\frac{ZW}{ZV} \cdot \frac{AV}{AU} \cdot \frac{FU}{FW} = 1$$

D'après le théorème de Ménélaüs dans le triangle UVW et pour les points C, B et Y, on a

$$\frac{YU}{YW} \cdot \frac{CW}{CV} \cdot \frac{BV}{BU} = 1$$

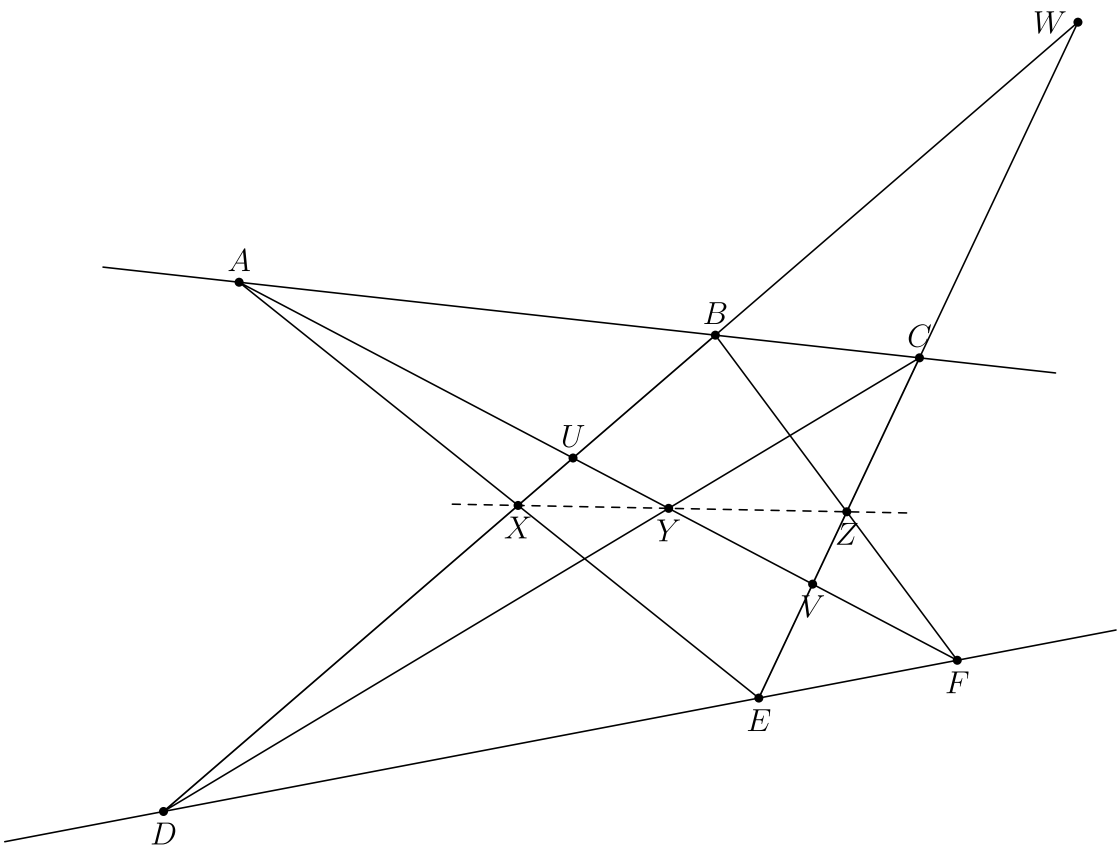
On calcule donc le produit des trois égalités en regroupant les termes

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\frac{XV}{XU} \cdot \frac{EU}{EW} \cdot \frac{DW}{DV}\right) \cdot \left(\frac{ZW}{ZV} \cdot \frac{AV}{AU} \cdot \frac{FU}{FW}\right) \cdot \left(\frac{YU}{YW} \cdot \frac{CW}{CV} \cdot \frac{BV}{BU}\right) \\ &= \left(\frac{XV}{XU} \cdot \frac{YU}{YW} \cdot \frac{ZW}{ZV}\right) \cdot \frac{EU \cdot FU}{AU \cdot BU} \cdot \frac{AV \cdot BV}{CV \cdot DV} \cdot \frac{CW \cdot DW}{EW \cdot FW} \\ &= \frac{XV}{XU} \cdot \frac{YU}{YW} \cdot \frac{ZW}{ZV} \end{aligned}$$

En effet les fractions $\frac{EU \cdot FU}{AU \cdot BU}$, $\frac{AV \cdot BV}{CV \cdot DV}$ et $\frac{CW \cdot DW}{EW \cdot FW}$ vaut 1 par puissance d'un point.
On a obtenu le résultat voulu.

Exercice 13
(Théorème de Pappus) Soit A, B et C des points alignés dans cet ordre sur une droite l_1 et D, E et F des points aligéns dans cet ordre sur une droite l_2. On note $X = (AE) \cap (DB)$, $Y = (AF) \cap (DC)$ et $Z = (BF) \cap (EC)$. Montrer que les points X, Y et Z sont alignés.

Solution de l'exercice 13



Soit U le point d'intersection des droites (AF) et (BD), V le point d'intersection des droites (AF) et (EC) et W le point d'intersection des droites (BD) et (EC).

Nous allons appliquer le théorème de Ménélaüs au triangle UVW et aux trois points X, Y et Z.

D'après le théorème de Ménélaüs appliqué au triangle UVW et aux points A, B et C, on a

$$\frac{AV}{AU} \cdot \frac{BU}{BW} \cdot \frac{CW}{CV} = 1$$

D'après le théorème de Ménélaüs appliqué au triangle UVW et aux points D, E et F, on a

$$\frac{DU}{DW} \cdot \frac{EW}{EV} \cdot \frac{FV}{FU} = 1$$

D'après le théorème de Ménélaüs appliqué au triangle UVW et aux points B, Z et F, on a

$$\frac{ZV}{ZW} \cdot \frac{BW}{BU} \cdot \frac{FU}{FV} = 1$$

D'après le théorème de Ménélaüs appliqué au triangle UVW et aux points C, Y et D, on a

$$\frac{YU}{YV} \cdot \frac{CV}{CW} \cdot \frac{DW}{DU} = 1$$

D'après le théorème de Ménélaüs appliqué au triangle UVW et aux points A, X et E, on a

$$\frac{XW}{XU} \cdot \frac{EV}{EW} \cdot \frac{AU}{AV} = 1$$

En multipliant ces 5 égalités, on obtient

$$\frac{ZV}{ZW} \cdot \frac{YW}{YU} \cdot \frac{XW}{XU} = 1$$

D'après le théorème de Ménélaüs, cela signifie que les points X, Y et Z sont alignés.

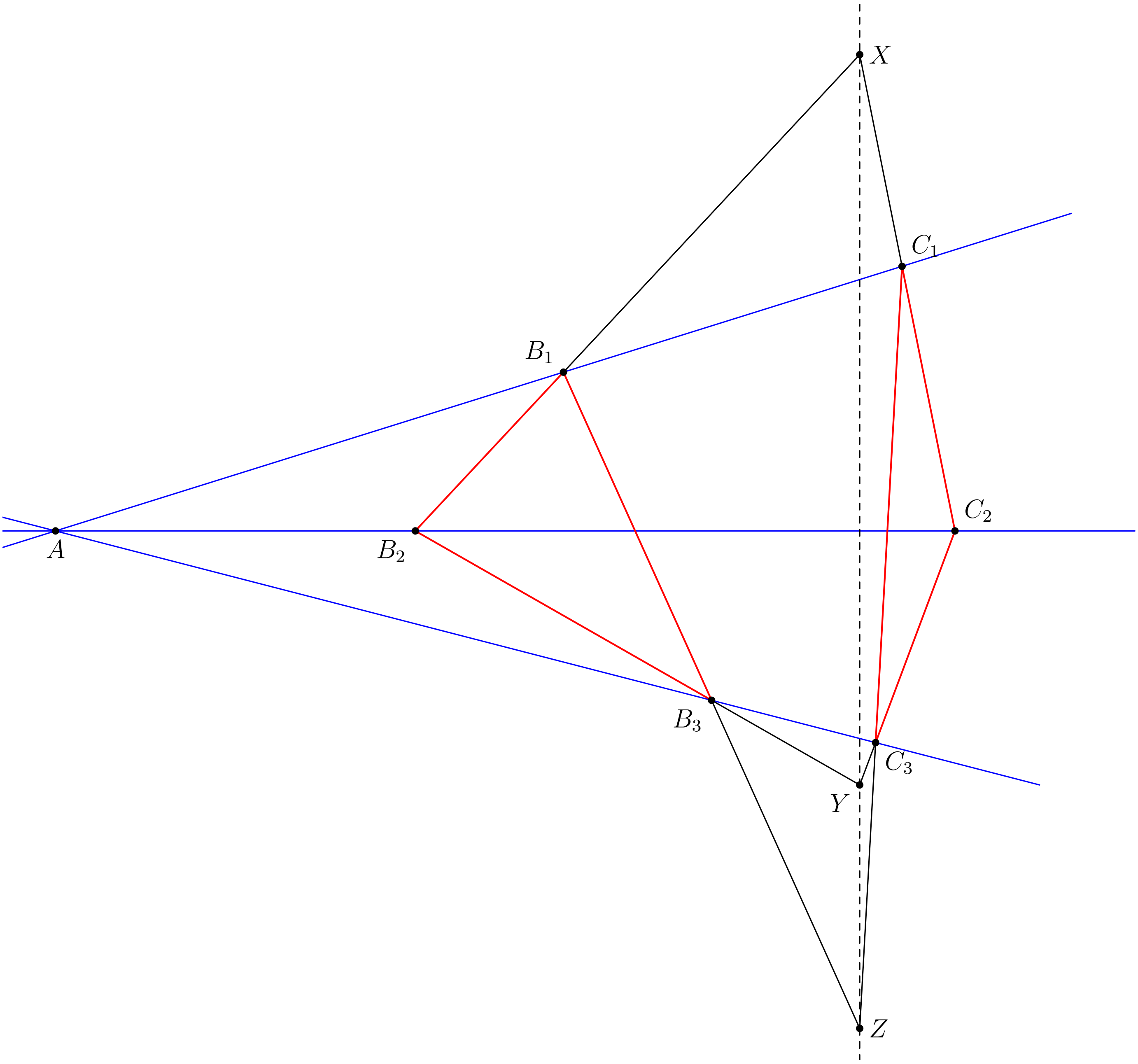
Le théorème de Desargues

Théorème 3. Soit A un point et soient l_1, l_2 et l_3 trois droites passant par le point A. Soient B_1, C_1 deux points sur la droite l_1, B_2, C_2 deux points sur la droite l_2 et soient B_3, C_3 deux points sur la droite l_3. On pose $X = (B_1B_2) \cap (C_1C_2)$,$Y = (B_2B_3) \cap (C_2C_3)$ et $Z = (B_1B_3) \cap (C_1C_3)$. Alors les points X, Y et Z sont alignés.

La suprême beauté de ce théorème tient du fait que l'énoncé n'emploie que des droites. Pas d'angles, pas de cercles, même pas de longueurs, uniquement des droites.

Notons également qu'on peut imaginer le point A comme une source lumineuse et le triangle $C_1C_2C_3$ comme l'ombre du triangle $B_1B_2B_3$.

Démonstration.



Nous allons appliquer le théorème de Ménélaüs au triangle $B_1B_2B_3$ et aux points X, Y et Z. Notre objectif est donc de démontrer que

$$\frac{XB_1}{XB_2} \cdot \frac{YB_2}{YB_3} \cdot \frac{ZB_3}{ZB_1} = 1$$

Pour cela, d'après le théorème de Ménélaüs dans le triangle AB_1B_2 et pour les points C_1, C_2 et X, on a

$$\frac{XB_1}{XB_2} \cdot \frac{C_2B_2}{C_2A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B_1} = 1$$

D'après le théorème de Ménélaüs dans le triangle AB_2B_3 et pour les points C_2, C_3 et Y, on a

$$\frac{YB_2}{YB_3} \cdot \frac{C_3B_3}{C_3A} \cdot \frac{C_2A}{C_2B_2} = 1$$

D'après le théorème de Ménélaüs dans le triangle AB_3B_1 et pour les points C_1, C_3 et Z, on a

$$\frac{ZB_3}{ZB_1} \cdot \frac{C_1B_1}{C_1A} \cdot \frac{C_3A}{C_3B_3} = 1$$

On multiplie toutes ces égalités pour obtenir :

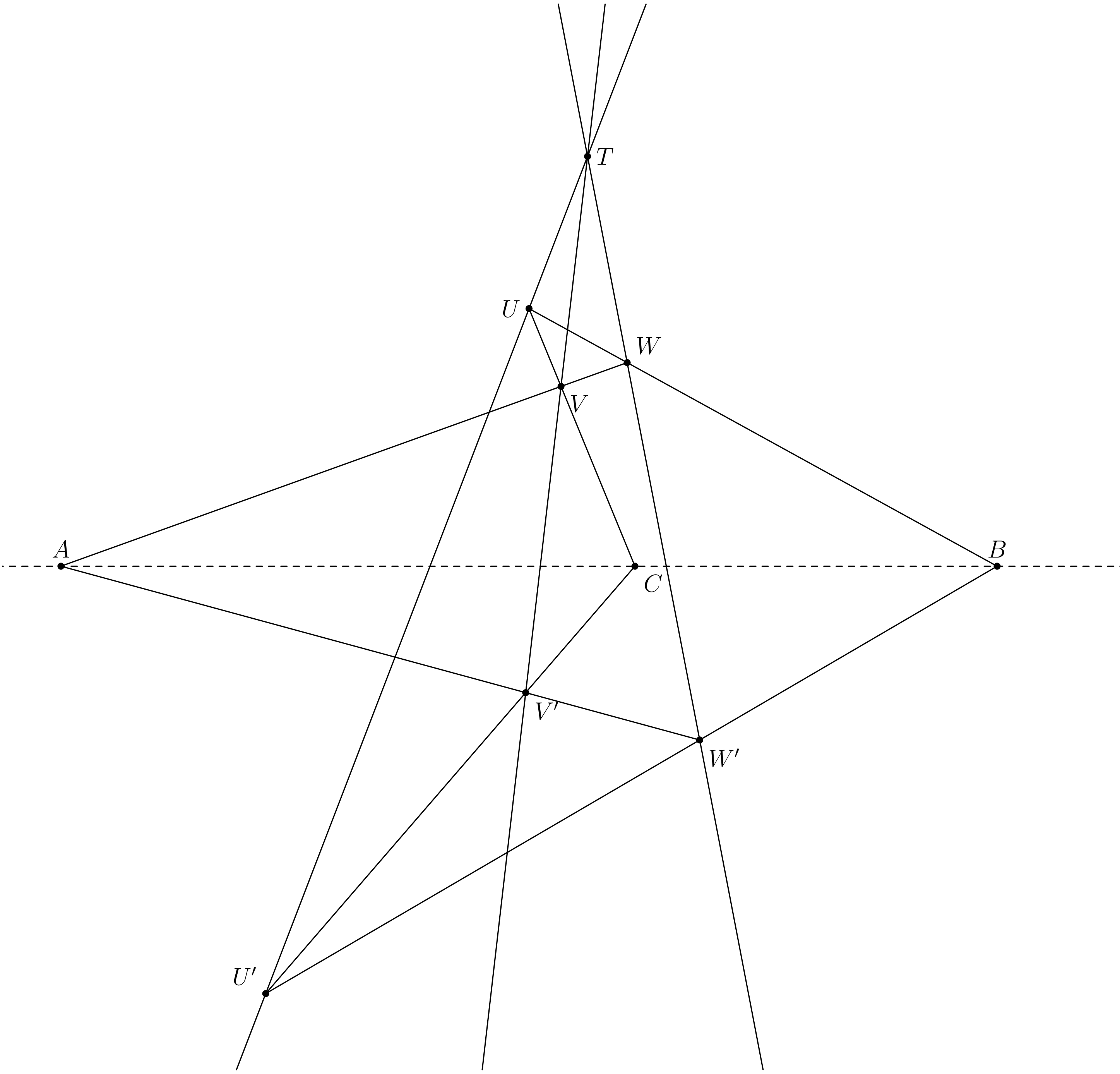
$$\begin{aligned}
\frac{XB_1}{XB_2} \cdot \frac{YB_2}{YB_3} \cdot \frac{ZB_3}{ZB_1} &= \left(\frac{XB_1}{XB_2} \cdot \frac{C_2B_2}{C_2A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B_1}\right) \cdot \left(\frac{YB_2}{YB_3} \cdot \frac{C_3B_3}{C_3A} \cdot \frac{C_2A}{C_2B_2}\right) \cdot \left(\frac{ZB_3}{ZB_1} \cdot \frac{C_1B_1}{C_1A} \cdot \frac{C_3A}{C_3B_3}\right) \\
&= 1 \cdot 1 \cdot 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. □

Résolution du problème initial

Exercice 14
Etant donné deux points A et B du plan, comment tracer le segment $[AB]$ avec une règle de longueur strictement plus courte que la longueur AB ?

Solution de l'exercice 14



La solution peut se comprendre uniquement avec le dessin ci-dessus, en voici cependant une explication détaillée.

Quitte à réitérer le processus, on va supposer que notre règle est juste trop courte, c'est-à-dire qu'on ne peut pas tracer le segment $[AB]$ mais qu'on peut tracer tout segment de longueur strictement inférieure au segment $[AB]$.

L'idée est de créer un troisième point C aligné avec les points A et B et situé strictement entre les points A et B. On pourra alors tracer le segment $[AC]$ et le segment $[CB]$, ce qui conclura.

Pour tracer le point C, on va utiliser le théorème de Desargues, de telle sorte que les points A, B et C soient les points X, Y et Z dans l'énoncé du théorème.

On choisit donc un point T dans le plan, de préférence de telle sorte que sa projection sur la droite (AB) appartienne au segment $[AB]$.

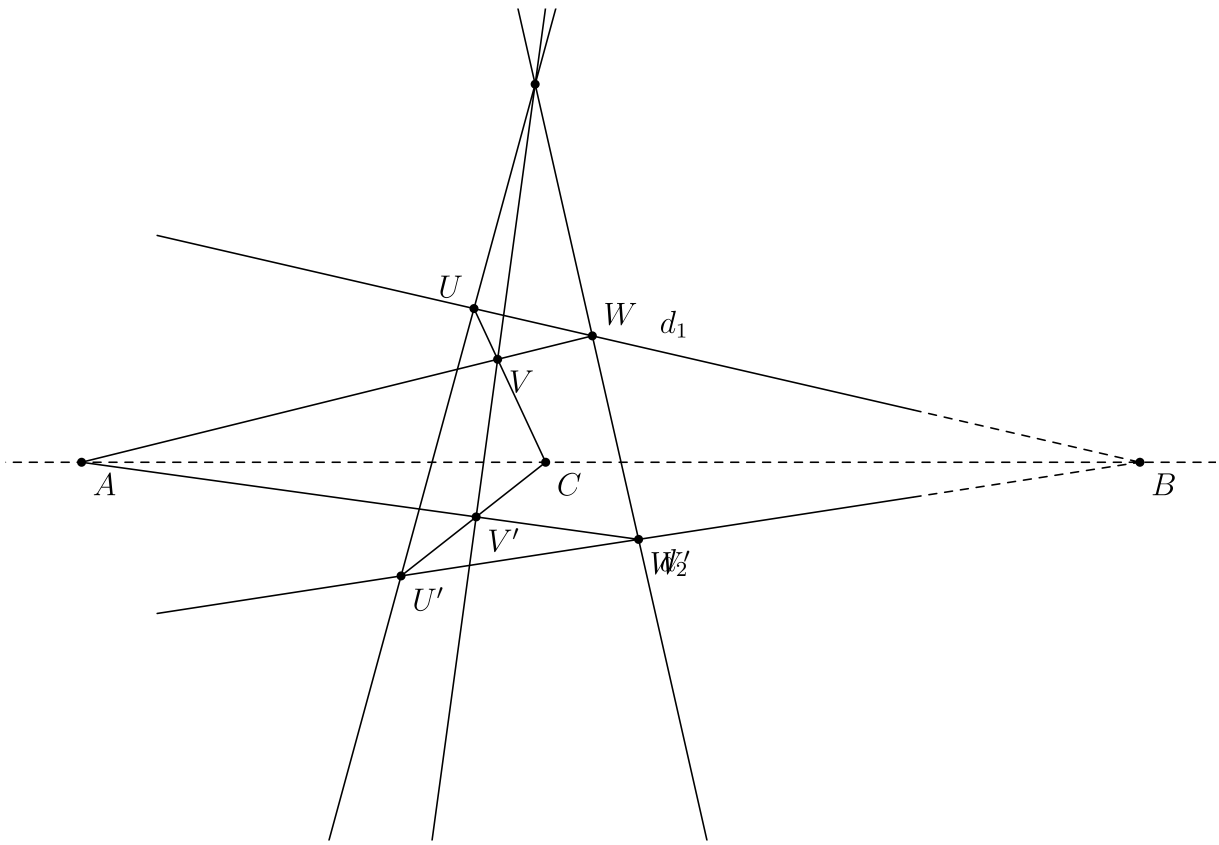
On trace trois droites issues du point T, que l'on note d_1, d_2 et d_3. Maintenant, on doit créer les deux triangles appartenant au faisceau. Pour cela on trace deux droites quelconques partant du point B et coupant la droite d_1 en deux points U et U' et la droite d_3 en deux points W et W'.

On trace alors les segments $[AW]$ et $[AW']$ qui recoupent la droite d_2 en V et V'. On a construit nos triangles UVW et $U'V'W'$.

On pose alors C le point d'intersection des droites (UV) et $(U'V')$. Les points A, B et C sont alignés par le théorème de Desargues et on peut tracer le segment $[AC]$ et le segment $[BC]$ et résoudre le problème.

Exercice 15

Solution de l'exercice 15



Comme dans la solution précédente, l'idée est de construire un point C appartenant à la droite (AB). On trace alors la droite (AC). (Evidemment, on s'arrange pour que le point C soit sur notre feuille de papier et non en dehors, sinon on recommence l'opération).

On va construire le point C à l'aide du théorème de Desargues.

On trace un faisceau de trois droites D_1, D_2 et D_3. Les points d'intersection des droites d_1 et d_2 avec les droites D_1 et D_3 sont notés U, U', W et W'.

Pour finir de construire les deux triangles en perspective, on note V et V' les points d'intersection des droites (AW) et (AW') avec la droite D_2. Alors par le théorème de Desargues, le point C d'intersection des droites (UV) et $(U'V')$ est aligné avec les points A et B, ce qui permet de tracer la droite (AB).

V. Groupe C

Contenu de cette partie

1 Première partie : Arithmétique & Géométrie

1 Fermat et ordre (Vincent)

Petit théorème de Fermat : énoncé et démonstrations

Ce cours est centré sur la démonstration et l'utilisation du résultat suivant :

Théorème 1 (Petit théorème de Fermat)**.**
Pour tout nombre premier p et tout entier a, le nombre p divise $a^p - a$.

Nous allons voir plusieurs démonstrations de ce théorème. Dans tous les cas, puisque le résultat demandé ne dépend que de la congruence de a modulo p, et puisqu'il est immédiat pour $a = 0$, on pourra supposer sans perte de généralité que $0 \leqslant a$, voire que $1 \leqslant a \leqslant p-1$ si cela nous arrange.

Démonstration (par récurrence sur a). On note $\mathcal{P}_a$ la propriété selon laquelle $a^p \equiv a \pmod p$. La propriété $\mathcal{P}_0$ est immédiate, et l'on va désormais démontrer que, si l'on dispose d'un entier a pour lequel $\mathcal{P}_a$ est vraie, la propriété $\mathcal{P}_{a+1}$ est vraie également.

En effet, si $\mathcal{P}_a$ est vraie, le binôme de Newton nous permet de développer $(a+1)^p$ sous la forme

$$(a+1)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^k 1^{p-k}.$$

Or, lorsque $1 \leqslant k \leqslant p-1$, le nombre premier p divise $p!$ mais ne divise ni $k!$ ni $(p-k)!$, de sorte qu'il divise nécessairement le quotient

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}.$$

On en déduit comme prévu, grâce à $\mathcal{P}_a$, que

$$(a+1)^p \equiv \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^k \equiv \binom{p}{0} a^0 + \binom{p}{p} a^p \equiv a^p + 1 \equiv a + 1 \pmod p,$$

ce qui démontre $\mathcal{P}_{a+1}$ et conclut la récurrence. □

Démonstration (par bijection et factorielle). On suppose ici que $1 \leqslant a \leqslant p-1$, et on note E l'ensemble des entiers $1, 2, \ldots, p-1$. Puis, pour tout entier $k \in E$, on note $f(k)$ le reste de la division de ak par p. Puisque le nombre premier p ne divise ni a ni k, il ne divise pas leur produit ak non plus, donc $f(k) \in E$. En outre, si k et ℓ sont deux éléments de E pour lesquels $f(k) = f(\ell)$, on sait que p divise

$$(ak - f(k)) - (a\ell - f(\ell)) = a(k - \ell),$$

et puisque p ne divise pas a, c'est qu'il divise $k - \ell$, donc que $k = \ell$. Ainsi, la fonction f est injective, et elle est même bijective.

On en conclut que

$$(p-1)! \equiv \prod_{k=1}^{p-1} k \equiv \prod_{k=1}^{p-1} f(k) \equiv \prod_{k=1}^{p-1} (ak) \equiv a^{p-1} \prod_{k=1}^{p-1} k = a^{p-1}(p-1)! \pmod p.$$

Ainsi, p divise $(a^{p-1}-1)(p-1)!$, et puisque p ne divise pas $(p-1)!$, c'est donc que p divise $a^{p-1}-1$, et même $a^p - a$. $\square$

On découvrira très bientôt deux nouvelles preuves du petit théorème de Fermat. En attendant, et en lieu et place du théorème précédent, on pourra bien sûr invoquer le résultat ci-dessous, qui lui est manifestement équivalent, et que l'on pourra donc lui aussi appeler « petit théorème de Fermat » :

Théorème 2 (Petit théorème de Fermat)**.**
Pour tout nombre premier p et tout entier a non divisible par p, le nombre p divise $a^{p-1}-1$.

Nous allons maintenant donner deux nouvelles preuves du petit théorème de Fermat. Ces deux preuves s'appuient sur les notions de *permutation* d'un ensemble fini, de partition d'un tel ensemble en *orbites* deux à deux disjointes, et d'*ordre* d'un élément pour une telle permutation.

Définition 3.
Soit X un ensemble fini et π une bijection de X dans lui-même. On dit que π est une *permutation* de X. En outre, pour tout élément x de X, on note $\mathcal{O}_\pi(x)$ l'ensemble des éléments $x, \pi(x), \pi^2(x), \ldots$ de X ; cet ensemble est appelé *orbite* de π engendrée par x. Enfin, la taille de cette orbite est appelée l'*ordre* de x pour la permutation π, et notée $\omega_\pi(x)$.

Lemme 4.
Les orbites de π forment une permutation de X : deux orbites de π sont soit égales, soit disjointes. En outre, pour tout élément x de X et tout entier $k \geqslant 0$, on a $\pi^k(x) = x$ si et seulement si $\omega(x)$ divise k.

Démonstration. Par principe des tiroirs, il existe deux entiers k et ℓ tels que $0 \leqslant k < \ell \leqslant \omega(x)$ et $\pi^k(x) = \pi^\ell(x)$. Si $1 \leqslant k$, l'injectivité de π montre alors que $\pi^{k-1}(x) = \pi^{\ell-1}(x)$, et une récurrence immédiate indique dès lors que $x = \pi^{\ell-k}(x)$. On suppose donc sans perte de généralité que $k = 0$.

Une nouvelle récurrence indique cette fois que $\pi^i(x) = \pi^{i+\ell}(x)$ pour tout entier $i \geqslant 0$. Cela signifie déjà que $\mathcal{O}_\pi(x) = \{x, \pi(x), \pi^2(x), \ldots, \pi^{\ell-1}(x)\}$, de sorte que $\omega(x) \leqslant \ell$ et donc que $\omega(x) = \ell$. On en déduit en outre que $\pi^k(x) = x$ si et seulement si $\omega(x) = \ell$ divise k.

Enfin, pour tout $y \in \mathcal{O}_\pi(x)$, si l'on pose $y = \pi^k(x)$, on sait que $x = \pi^{k\omega(x)}(x) \in \mathcal{O}_\pi(y)$, donc que $\mathcal{O}_\pi(x) \subseteq \mathcal{O}_\pi(y)$, et même que $\mathcal{O}_\pi(x) = \mathcal{O}_\pi(y)$. Par conséquent, pour tout $z \in X$, si les orbites $\mathcal{O}_\pi(x)$ et $\mathcal{O}_\pi(z)$ ont un élément y commun, on en conclut que $\mathcal{O}_\pi(x) = \mathcal{O}_\pi(y) = \mathcal{O}_\pi(z)$.
$\square$

Munis de ces deux résultats auxiliaires sur les permutations, les orbites et les ordres, on peut désormais proposer deux nouvelles démonstrations du petit théorème de Fermat.

Démonstration (par partition en orbites). On suppose toujours que $1 \leqslant a \leqslant p-1$, et on note de nouveau E l'ensemble des entiers $1, 2, \ldots, p-1$. Comme vu précédemment, la fonction f qui envoie chaque entier k sur le reste de la division de ak par p est une permutation de E.

Soit ω l'ordre de 1 pour cette permutation. Pour tout $x \in E$ et tout entier $k \geqslant 0$, on sait que $f^k(x) = x$ si et seulement si p divise $(a^k-1)x$. Puisque p est premier et ne divise pas x, cela revient à dire que p divise $a^k - 1$, c'est-à-dire que $f^k(1) = 1$, ou encore que ω divise k. Ainsi, chaque élément de E est d'ordre ω, et f partitionne les $p-1$ éléments de E en orbites de taille ω.

On en conclut que ω divise $p-1$, donc que p divise $a^{p-1}-1$. $\square$

Démonstration (par partition en orbites). On suppose ici encore que $1 \leqslant a$ et, cette fois, on note F l'ensemble des entiers $0, 1, \ldots, a-1$, puis F^p l'ensemble des p-uplets $(x_0, x_1, \ldots, x_{p-1})$ d'éléments de F. Pour tout p-uplet $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_{p-1})$, on note $r(\mathbf{x})$ le p-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, x_0)$ obtenu en décalant toutes les coordonnées d'un cran vers la gauche (sauf la première coordonnée, qui se retrouve tout à droite).

Puisque $r^p(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ pour tout $\mathbf{x} \in F^p$, la fonction r est une bijection de F^p, et l'ordre de $\mathbf{x}$ divise p. Or, $\omega_r(\mathbf{x}) = 1$ si et seulement si $\mathbf{x} = r(\mathbf{x})$, c'est-à-dire si le p-uplet $\mathbf{x}$ est constant. Il existe a tels p-uplets, et les $a^p - a$ autres p-uplets dans F sont d'ordre p. Ces derniers sont donc regroupés dans des orbites de taille p, de sorte que p divise $a^p - a$. $\square$

Ordre multiplicatif : énoncé et démonstrations

On peut en fait généraliser le petit théorème de Fermat comme suit.

Théorème 5 (Ordre multiplicatif)**.**
Soit n un entier naturel non nul. On note $\varphi(n)$ le nombre d'entiers k premiers avec n et tels que $1 \leqslant k \leqslant n$. Ce nombre est appelé *indicatrice d'Euler* de n. Pour tout entier a premier avec n, il existe un entier $\omega_n(a)$, appelé *ordre de a modulo n*, tel que :

1. $\omega_n(a)$ divise $\varphi(n)$;
2. les entiers k pour lesquels n divise $a^k - 1$ sont les multiples de $\omega_n(a)$.

Démonstration. Soit G l'ensemble des entiers k premiers avec n et tels que $1 \leqslant k \leqslant n$, et soit f la fonction qui envoie tout entier k sur le reste de la division de ak par n. Comme vu précédemment, et puisque n est premier avec a, il s'agit d'une permutation de l'ensemble G.

En outre, si l'on note $\omega_n(a)$ l'ordre de 1 pour la permutation f, on constate une fois encore que toutes les orbites de f sont de taille $\omega_n(a)$. On en conclut que les entiers k pour lesquels n divise $a^k - 1$ sont effectivement les multiples de $\omega_n(a)$, et que $\omega_n(a)$ divise le nombre d'éléments de G, c'est-à-dire $\varphi(n)$. $\square$

Attention !

1. Ce théorème ne fonctionne que si a est premier avec n. Par exemple, si $n = 12$ et $a = 15$, il ne fonctionne évidemment pas.
2. Il n'y a aucune raison pour que $\omega_n(a)$ soit égal à $\varphi(n)$, ni pour que deux entiers a et b soient d'ordres égaux l'un à l'autre. Par exemple, si $a = 1$, $b = 7$ et $n = 8$, on a $\omega_n(a) = 1$, $\omega_n(b) = 2$ et $\varphi(n) = 4$.

Remarquons que, lorsque p est un nombre premier, on a bien $\varphi(p) = p - 1$, ce qui nous permet de retrouver le petit théorème de Fermat. Par ailleurs, il existe en fait une manière simple de calculer $\varphi(n)$ dans le cas où n est un entier quelconque. C'est l'objet du résultat ci-dessous, dont la démonstration utilise le *théorème des restes chinois* que vous verrez demain.

Théorème 6 (Indicatrice d'Euler)**.**
Soit n un entier naturel non nul dont la décomposition en tant que produit de facteurs premiers est

$$n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}.$$

L'indicatrice d'Euler de n est alors égale au produit

$$\varphi(n) = \prod_{i=1}^{k} (p_i - 1) p_i^{\alpha_i - 1}.$$

Par ailleurs, pour la culture, on peut également énoncer le résultat suivant, dont la démonstration dépasse assez largement le cadre de ce cours.

Théorème 7.
Soit n un entier naturel non nul. Il existe un élément a dont l'ordre modulo n est égal à $\varphi(n)$ si et seulement si l'on est dans un des deux cas suivants :

1. n est une puissance de nombre premier impair ;
2. n est le double d'une puissance de nombre premier impair.

Exercices

Exercice 1
Démontrer que 13 divise $8^{60} - 3^{24}$.

Exercice 2
Démontrer, pour tout entier $n \geqslant 0$, que 7 divise $3^{12n+1} + 2^{6n+2}$.

Exercice 3
Démontrer, pour tout entier $n \geqslant 1$ impair, que n divise $2^{n!} - 1$.

Exercice 4
Soit n un entier naturel premier avec 10. Démontrer que n admet un multiple dont tous les chiffres sont des 1.

Exercice 5
Soit n un entier naturel non nul. Démontrer que tout facteur de $(2n)^{2^n} + 1$ est congru à 1 modulo 2^{n+1}.

Exercice 6
Soit n un entier naturel. Démontrer que n divise $2^{2n!} - 2^{n!}$.

Exercice 7
Soit $k \geqslant 1$ un entier premier avec 6. Démontrer qu'il existe un entier $n \geqslant 0$ pour lequel k divise $2^n + 3^n + 6^n - 1$.

Exercice 8
Soit $n \geqslant 2$ un entier. Démontrer que n est premier si et seulement si n divise $(n-1)! + 1$.

Solutions des exercices

Solution de l'exercice 1
Le petit théorème de Fermat indique directement que

$$8^{60} - 3^{24} \equiv 8^{12\times 5} - 3^{12\times 2} \equiv (8^{12})^5 - (3^{12})^2 \equiv 1^5 - 1^2 \equiv 0 \pmod{13}.$$

Solution de l'exercice 2
Le petit théorème de Fermat indique directement que

$$3^{12n+1} + 2^{6n+2} \equiv 3 \times (3^6)^{2n} + 4 \times (2^6)^n \equiv 3 \times 1^{2n} + 4 \times 1^n \equiv 3 + 4 \equiv 0 \pmod 7.$$

Solution de l'exercice 3
Puisque 2 est premier avec n, soit ω l'ordre de 2 modulo n. Par définition, on sait que $\varphi(n) \leqslant n$, donc que $\varphi(n)$ divise $n!$. Ainsi, puisque ω divise $\varphi(n)$, il divise $n!$ également. Ainsi, si l'on pose $k = n!/\omega$, et puisque n est premier avec 2, on constate que

$$2^{n!} - 1 \equiv (2^\omega)^k - 1 \equiv 1^k - 1 \equiv 0 \pmod n.$$

Solution de l'exercice 4
Puisque 10 est premier avec n, soit ω l'ordre de 10 modulo n. On constate alors que

$$\sum_{k=0}^{n\omega-1} 10^k \equiv \sum_{k=0}^{\omega-1}\sum_{\ell=0}^{n-1} 10^{k+\ell\omega} \equiv \sum_{k=0}^{\omega-1}\sum_{\ell=0}^{n-1} 10^k \equiv n \sum_{k=0}^{\omega-1} n \times 10^k \equiv 0 \pmod n.$$

Solution de l'exercice 5
Soit p un facteur premier de $(2n)^{2^n}+1$ et soit ω l'ordre de n modulo p. Or, $(2n)^{2^n}+1$ est impair, donc p est impair et $p \geqslant 3$. Ainsi, $(2n)^{2^n} \equiv -1 \not\equiv 1 \pmod p$ et $(2n)^{2^{n+1}} \equiv (-1)^2 \equiv 1 \pmod p$, donc ω divise 2^{n+1} mais pas 2^n. On en déduit que $\omega = 2^{n+1}$.

Puisque ω divise $p-1$, cela signifie comme prévu que $p \equiv 1 \pmod{2^{n+1}}$. Ainsi, tout facteur premier de $(2n)^{2^n}+1$ est congru à 1 modulo 2^{n+1}, et tout autre facteur de $(2n)^{2^n}+1$ est un produit de tels facteurs premiers, donc est également congru à 1 modulo 2^{n+1}.

Solution de l'exercice 6
Le résultat est immédiat si $n = 0$, et on suppose donc n non nul. Soit α la valuation 2-adique de n, et m l'entier impair tel que $n = 2^\alpha m$.

Puisque n compte $\alpha + 1$ puissances de 2 parmi ses diviseurs, on sait que $\alpha \leqslant n$. Ainsi, $2n! \geqslant n! \geqslant n \geqslant \alpha$, donc 2^α divise à la fois $2^{2n!}$ et $2^{n!}$, et divise également leur différence.

Par ailleurs, on a vu à l'exercice 3 que $2^{m!} \equiv 1 \pmod m$. Puisque m divise $n!$ et $2n!$, on en déduit également que $2^{2n!} \equiv 2^{n!} \equiv 1 \pmod m$.

En conclusion, la différence $2^{2n!} - 2^{n!}$ est divisible simultanément par 2^α et par m, qui sont premiers entre eux, donc elle est également divisible par leur produit $2^\alpha m = n$.

Solution de l'exercice 7
L'idée est de remarquer que $1/6 + 1/3 + 1/2 = 1$. Idéalement, on souhaiterait donc choisir $n = -1$, mais on ne peut pas procéder brutalement ainsi. À la place, on va simplement considérer l'entier $n = \varphi(k) - 1$ puis agit proprement. En effet, on constate alors que

$$6(2^n + 3^n + 6^n - 1) \equiv 3 \times 2^{\varphi(k)} + 2 \times 3^{\varphi(k)} + 6^{\varphi(k)} - 6 \equiv 3 + 2 + 1 - 6 \equiv 0 \pmod n,$$

et puisque k est premier avec 6, on en conclut que k divise bien $2^n + 3^n + 6^n - 1$.

Solution de l'exercice 8
Si n est composé, soit p un facteur premier de n. Puisque $p \leqslant n-1$, on sait que p divise $(n-1)!$, donc ne divise pas $(n-1)! + 1$, de sorte que n ne divise pas $(n-1)! + 1$ non plus.

Réciproquement, si p est premier, soit E l'ensemble des entiers $1, 2, \ldots, p-1$. On regroupe chaque élément x de E avec son inverse $\overline{x}$ modulo p, c'est-à-dire avec le reste de la division de x^{p-2} par p. Pour tout x, on a bien $x\overline{x} \equiv x^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, donc $x = \overline{\overline{x}}$, et notre regroupement constitue une partition de E en ensemble de taille 1 ou 2. En outre, $x = \overline{x}$ si et seulement si $x^2 \equiv 1 \pmod p$, c'est-à-dire si p divise $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$.

Ainsi, $x = 1$ et $x = p - 1$ se retrouvent dans des parties de E de taille 1, et tous les autres éléments de E se retrouvent dans des parties de E de taille 2. Si l'on note F l'ensemble des entiers $x \in E$ tels que $x < \overline{x}$, on en conclut que

$$(p-1)! \equiv 1 \times (p-1) \times \prod_{x \in F} (x \times \overline{x}) \equiv 1 \times (-1) \times \prod_{x \in F} 1 \equiv -1 \pmod p,$$

ce qui conclut.

2 Puissance d'un point et axe radical (Antoine)

La partie cours était essentiellement la même que https://www.mathraining.be/chapters/27?type=10.

En ce qui concerne les exercices :

Puissance d'un point

Exercice 1
(Résultat à considérer comme du cours) Montrer que s'il existe A tel que $AB \cdot AC = AD \cdot AE$ avec A, B, C et A, D, E alignés, alors B, C, D, E cocycliques.

Exercice 2
Soit ABC un triangle, on note H_A le pied de la hauteur issue de A sur $[BC]$. On note P et Q les projections orthogonales de H_A sur les côtés $[AB]$ et $[AC]$. Montrer que les quatre points B, P, Q et C sont sur un même cercle.

Exercice 3
On considère K et L deux points d'un cercle Γ de centre O. Soit A un point de la droite (KL) en dehors du cercle. On note P et Q les points de contact des tangentes à Γ issues de A. Soit M le milieu de $[PQ]$. Montrer que $\widehat{MKO} = \widehat{MLO}$.

Exercice 4
Soit ABC un triangle, H son orthocentre et Γ son cercle circonscrit.
Montrer que $\mathcal{P}_\Gamma(H) = 8R^2\cos(\alpha)\cos(\beta)\cos(\gamma)$, où R est le rayon du cercle circonscrit et α, β, γ sont les angles du triangle.

Exercice 5
Soit ABC un triangle et O le centre de son cercle circonscrit (de rayon R), et I le centre de son cercle inscrit (de rayon r).
Montrer la relation d'Euler : $OI^2 = R(R-2r)$. (En particulier $R \geq 2r$.)

Axes radicaux

Exercice 6
(Résultat à considérer comme du cours)
Soient A, B, C, D, E, F tels que A, B, C, D cycliques et C, D, E, F cycliques.
Mq A, B, E, F cycliques ssi $(AB), (CD), (EF)$ concourantes

Exercice 7
Soient ω_1 et ω_2 deux cercles, t et t' deux tangentes aux cercles. On note T_1 et T_2 les points de tangence de t avec ω_1 et ω_2 respectivement et T_1' et T_2' les points de tangence avec t', M le milieu de $[T_1T_2]$, P_1 et P_2 les intersections respectives de (MT_1') et (MT_2') avec ω_1 et ω_2. Montrer que le quadrilatère $P_1P_2T_1'T_2'$ est cyclique.

Exercice 8
Soient ABC, un triangle avec ω son cercle circonscrit. Soit S, le milieu de l'arc BC ne contenant pas A. Soient $X \in AB$ et $Y \in AC$ tq $XY//BC$. On prend P (resp. Q),la seconde intersection de SX (resp. SY) avec ω et $R = PQ \cap XY$. Montrer que AR est tangent à ω.

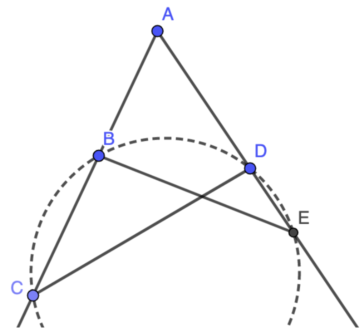
Exercice 9
Soit ABC un triangle, et $P \in [AB], Q \in [AC]$ tels que $AP = AQ$. Soient R, S des points distincts de $[BC]$ tels que $S \in [BR]$ et tels que $\widehat{BPS} = \widehat{PRS}$, et $\widehat{CQR} = \widehat{QSR}$.
Montrer que P, Q, R, S sont cocycliques.

Solutions

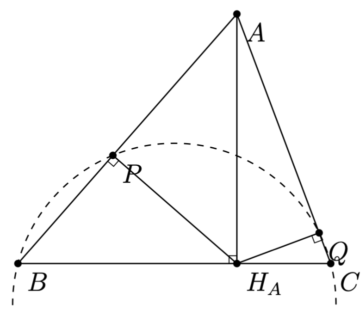
Solution de l'exercice 1
On montre que ABE et ADC sont semblables.
En effet, on a $\widehat{EAB} = \widehat{CAD}$, et de plus, l'égalité donne $\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AC}$, d'où la similitude des triangles. Ainsi,

$$\widehat{ECD} = 180 - \widehat{ACD} = 180 - \widehat{ABE} = \widehat{EBD}$$

d'où la cocyclicité. (Les cas où les points ne sont pas alignés dans cet ordre se résolvent similairement.)



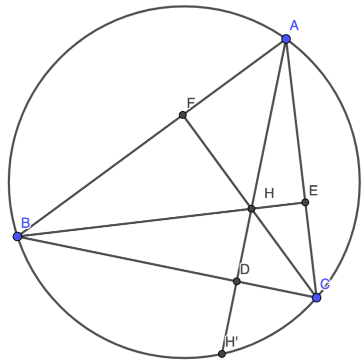
Solution de l'exercice 2
Les triangles APH_A et AH_AB ont tous les deux un angle droit et un angle égal à $\widehat{BAH_A}$, ils sont donc semblables. Notamment, $\frac{AP}{AH_A} = \frac{AH_A}{AB}$ soit $AP \cdot AB = A_H^2$. De même, $AQ \cdot AC = A_H^2$.
Donc, $AP \cdot AB = AQ \cdot AC$ ce qui conclut par puissance du point A (exercice 1).



Solution de l'exercice 3
O, M, P sont alignés car M et O appartiennent à la bissectrice de $\widehat{PAQ}$. Comme $\widehat{AMP} = \widehat{APO} = 90$, on a $AMP \sim APO$ et donc $AM \cdot AO = AP^2 = P_\Gamma(A) = AK \cdot AL$, $KLOM$ est cocyclique et $\widehat{MKO} = \widehat{MLO}$.

Solution de l'exercice 4
Soit H' le symétrique de H par rapport à BC. Il est connu (ou montrable par chasse aux

angles) que $H' \in \Gamma$. Ainsi, $\mathcal{P}_\Gamma(H) = AH \cdot HH' = 2AH \cdot HD$, où D est le pied de la hauteur issue de A. Maintenant un peu de trigonométrie.
On a $\frac{AE}{AH} = \cos(\widehat{EAH}) = \cos(90 - \widehat{ACB}) = \sin(\gamma)$.
Aussi, $\frac{AE}{AB} = \cos(\alpha)$. Finalement, par loi des sinus, $AB = 2R\sin(\gamma)$, ce qui donne $AH = 2R\cos(\alpha)$.
De même, $BH = 2R\cos(\beta)$, et $\frac{HD}{BH} = \sin(\widehat{HBD}) = \cos(\gamma)$.
Ainsi, $\mathcal{P}_\Gamma(H) = 2AH \cdot HD = 2 \cdot 2R\cos(\alpha) \cdot 2R\cos(\beta)\cos(\gamma) = 8R^2\cos(\alpha)\cos(\beta)\cos(\gamma)$.



Solution de l'exercice 5
Voir https://www.mathraining.be/chapters/32?type=1&which=113.

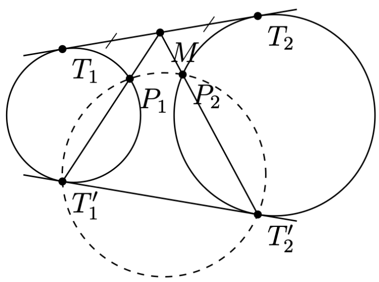
Solution de l'exercice 6
Si A, B, E, F sont cocycliques, ces droites sont les axes radicaux de deux des trois cercles, et concourent donc en le centre radical des trois cercles.

Si les trois droites concourent, mettons en X, par puissance d'un point, on obtient

$$XA \cdot XB = XC \cdot XD = XE \cdot XF.$$

Comme X, A, B et X, E, F sont alignés, par puissance d'un point (Exercice 1), on obtient bien que A, B, E, F sont cocycliques.

Solution de l'exercice 7
M est sur l'axe radical de ω_1 et ω_2 car $P_{\omega_1}(M) = MT_1^2 = MT_2^2 = P_{\omega_2}(M)$. Donc $MP_1 \cdot MT_1' = P_{\omega_1}(M) = P_{\omega_2}(M) = MP_2 \cdot MT_2'$, ce qui conclut par puissance du point M (exercice 1).

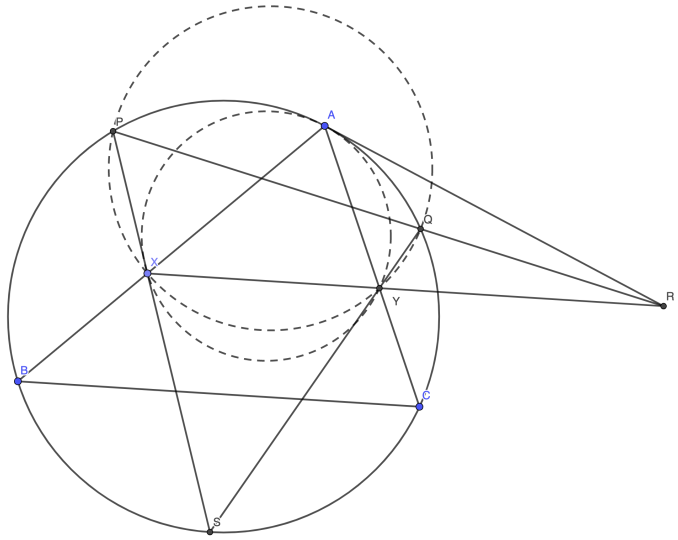


Solution de l'exercice 8
Montrons que PQ, XY et la tangente en A à ω, sont les axes radicaux de trois cercles, le

premier est ω, le deuxième le cercle circonscrit à AXY et le troisième celui à $PQYX$. Ce quadrilatère est bien cocyclique car par chasse aux angles comme $\widehat{BOS} = \widehat{CBS}$, on a

$$\widehat{PQY} = \widehat{PQB} + \widehat{QBS} = \widehat{PSB} + \widehat{BCS} = \widehat{PSB} + \widehat{CBS} = 180 - \widehat{PXY}.$$

Comme $\widehat{AYX} = \widehat{ACB}$, la tangente en A à ω est la même que celle au cercle circonscrit à AXY, donc celle-ci est l'axe radical. Finalement les trois axes radicaux s'intersectent en un point, donc on obtient le résultat voulu.

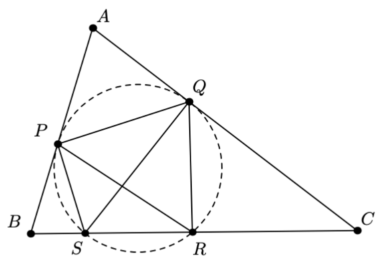


Solution de l'exercice 9

Le plus dur ici est certainement de savoir quoi faire avec la condition d'angles. En fait, celle-ci peut nous rappeler une relation d'angle tangentiel, et c'est justement le cas : la condition $\widehat{BPS} = \widehat{PRS}$ revient à dire que AB est tangent au cercle circonscrit à PRS (qu'on note ω_1). De même, AC est tangent au cercle circonscrit à QRS (qu'on note ω_2). L'énoncé nous demande de prouver que ces deux cercles sont confondus. Et là vient la magie :
Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors on peut considérer leur axe radical. Comme S et R appartiennent tous deux à ω_1 et à ω_2, $(SR) = (BC)$ est ledit axe radical. Mais comme

$$\mathcal{P}_{\omega_1}(A) = AP^2 = AQ^2 = \mathcal{P}_{\omega_2}(A)$$

par notre observation de tangence initiale, $A \in (BC)$, contradiction.
Ainsi, $\omega_1 = \omega_2$, et P, Q, R, S sont cocycliques.



3 Transformations du plan (Thomas)

Similitudes directes

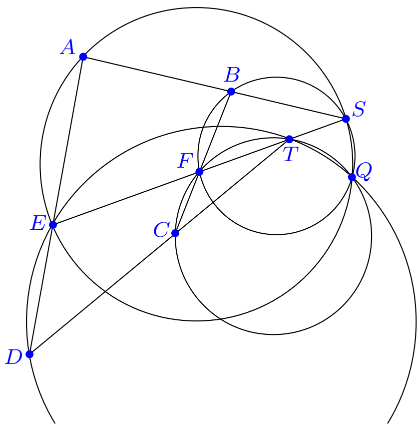
Nous avons principalement parlé de similitudes directes. Le cours est essentiellement la partie 4 du cours sur les transformations géométriques, disponible sur le site de la POFM : http://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2017/09/geom_transfos.pdf.

Voici les exercices traités en cours.

Exercice 1
Soit $ABCD$ un quadrilatère, E et F sur $[AD]$ et $[BC]$ respectivement tels que $AE/ED = BF/FC$. Soit $S = (EF) \cap (AB)$ et $T = (EF) \cap (CD)$.

Montrer que les cercles circonscrits aux triangles SAE, SBF, TCF et TDE sont concourants.

Solution de l'exercice 1

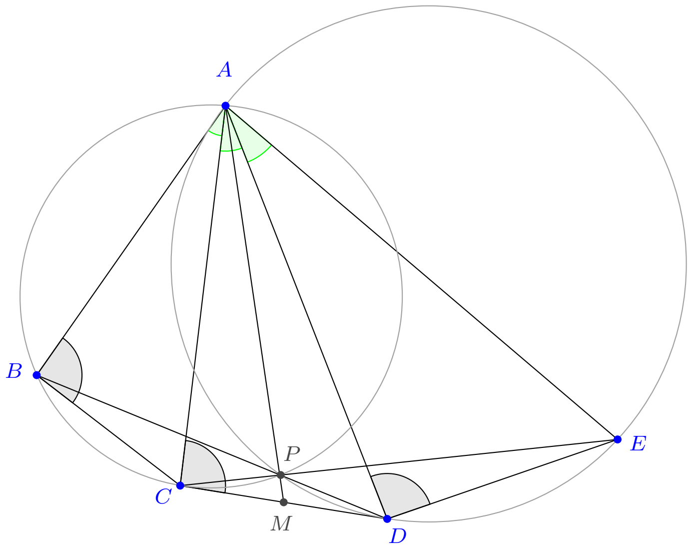


D'après l'égalité sur les rapports de longueur, la similitude directe envoyant A sur B et D sur C envoie également E sur F. En utilisant la construction habituelle pour les couples de points $(E, D) \mapsto (F, C)$, on obtient que son centre est sur les cercles circonscrits à TCF et TDE. En l'utilisant sur les couples de points $(A, E) \mapsto (B, F)$, ce centre est également sur les cercles circonscrits à SAE et SBF. D'où la conclusion.

Exercice 2
Soit $ABCDE$ un pentagone convexe vérifiant les relations $\widehat{BAC} = \widehat{CAD} = \widehat{DAE}$ et $\widehat{CBA} = \widehat{DCA} = \widehat{EDA}$. Soit $P = (BD) \cap (CE)$.

Montrer que la droite (AP) coupe le segment $[CD]$ en son milieu.

Solution de l'exercice 2



On se rend immédiatement compte qu'il existe une similitude de centre A qui envoie B sur C, C sur D et D sur E.

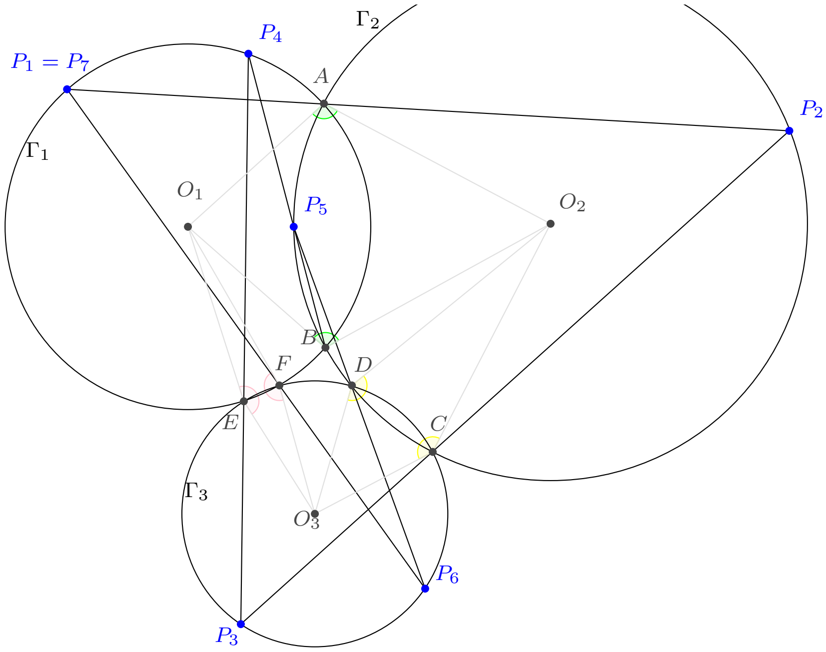
Donc, d'après la construction du center d'une similitude appliquée au couple de point $(B, D) \mapsto (C, E)$, A est sur le cercle circonscrit Γ_1 à PBC et Γ_2 à PDE. Ici, l'exercice commence à avoir bien la tête d'un exercice utilisant la puissance d'un point. On essaye donc de montrer que Γ_1 est tangent à (CD). Or c'est vrai d'après la réciproque du théorème de l'angle inscrit comme $\widehat{ABC} = \widehat{DCA}$. De même, comme $\widehat{DEA} = 180° - \widehat{EAD} - \widehat{EDA} = 180° - \widehat{CAD} - \widehat{ACD} = \widehat{CDA}$, le cercle Γ_2 est également tangent à (CD).

Finalement, en notant $M = (AP) \cap (CD)$, M est sur l'axe radical de Γ_1 et Γ_2 et on peut donc écrire $MC^2 = \mathcal{P}_{\Gamma_1}(M) = \mathcal{P}_{\Gamma_2}(M) = MD^2$ et la conclusion.

Exercice 3
Soit Γ_1, Γ_2 et Γ_3 trois cercles avec $\{A, B\} = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$, $\{C, D\} = \Gamma_2 \cap \Gamma_3$ et $\{E, F\} = \Gamma_3 \cap \Gamma_1$. On considère P_1 sur Γ_1 et on note P_2 le deuxième point d'intersection de (P_1A) et Γ_2, P_3 le deuxième d'intersection de (P_3C) et Γ_3, P_4 le deuxième point d'intersection de (P_3E) et Γ_1, P_5 le deuxième point d'intersection de (P_4B) et Γ_2, P_6 le deuxième point d'intersection de (P_5D) et Γ_3 et enfin P_7 le deuxième point d'intersection de (P_6F) et Γ_1.

Montrer que $P_7 = P_1$.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u>



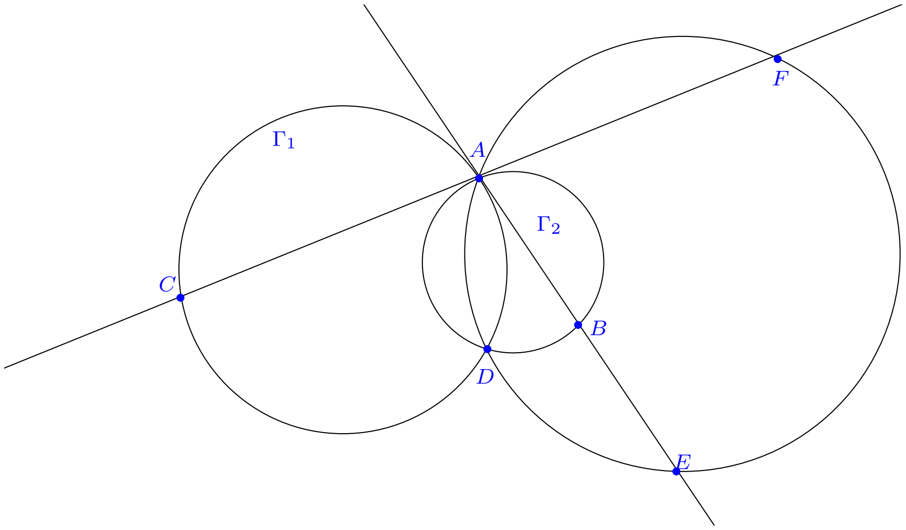
On considère ϕ_B la similitude de centre B qui envoie P_1 sur P_2 et Γ_1 sur Γ_2. De même, on considère ϕ_D la similitude de centre D qui envoie P_2 sur P_3 et Γ_2 sur Γ_3. on définit de manière similaire ϕ_F, ϕ_A, ϕ_C et ϕ_E.

On note $\Phi = \phi_F \circ \phi_D \circ \phi_B \circ \phi_E \circ \phi_C \circ \phi_A$. On a alors $P_7 = \Phi(P_1)$. Or, l'angle de rotation de Φ vaut $(AO_1, AO_2) + (CO_2, CO_3) + (EO_3, EO_1) + (BO_1, BO_2) + (DO_2, DO_3) + (FO_3, FO_1) = 0$ en éliminant les termes correspondants (voir figure). De même, le facteur de dilatation de Φ vaut $r_2/r_1 \cdot r_3/r_2 \cdot r_1/r_3 \cdot r_2/r_1 \cdot r_3/r_2 \cdot r_1/r_3 = 1$.

Φ est donc une translation qui envoie Γ_1 sur lui-même, donc est l'identité, d'où la conclusion.

Exercice 4
Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles qui se coupent en deux points A et D. La tangente à Γ_1 en A recoupe Γ_2 en B, et la tangente à Γ_2 en A recoupe Γ_1 en C. Soit $E \in [AB)$ tel que $BE = AB$, et F la deuxième intersection de $[AC)$ avec le cercle circonscrit Ω à ADE. Montrer que $AC = AF$.

Solution de l'exercice 4



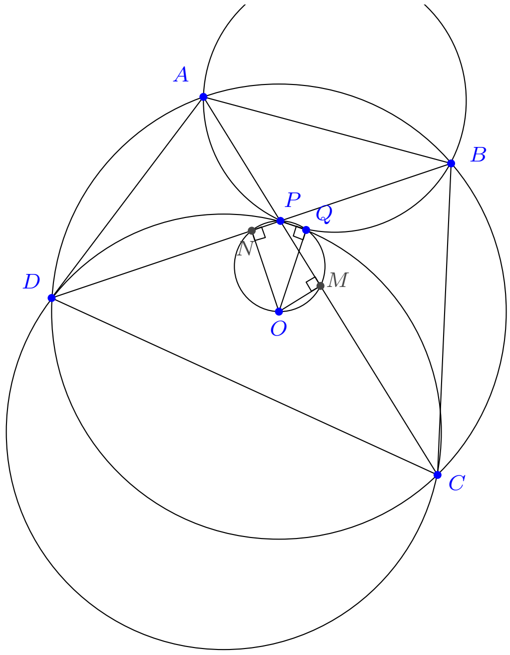
D'après la construction du centre d'une similitude appliquée aux cercles Γ_1 et Γ_2, D est le centre de la similitude directe s_1 qui envoie C sur A et A sur B. En regardant les cercles Γ_1 et Ω, D est le centre de la similitude directe qui envoie C sur F et A sur E, donc le centre de la similitude directe s_2 qui envoie C sur A et F sur E.

Or, comme il existe une unique similitude directe de centre D qui envoie C sur A (car le rapport est forcément $\frac{DA}{DC}$ et l'angle forcément $\widehat{ADC}$), on a $s_1 = s_2$, donc on a une similitude qui envoie C sur A, A sur B et F sur E. Comme B est le milieu de $[AE]$, on en déduit que A est le milieu de $[CF]$.

Exercice 5
Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle de centre O, P le point d'intersection des diagonales et Q le deuxième point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles APD et BPC.

Montrer que $\widehat{OQP} = 90°$.

Solution de l'exercice 5



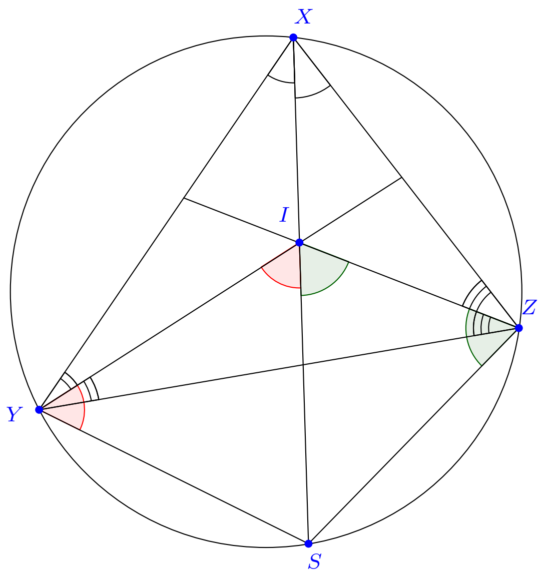
Il est naturel pour obtenir des angles droits de considérer les milieux M et N de $[AC]$ et $[BD]$. On considère la similitude de centre Q qui envoie A sur B et C sur D. Elle envoie le segment $[AC]$ sur le segment $[BD]$ et en particulier M sur N. En utilisant la construction du centre d'une similitude avec les couples $(A, M) \mapsto (B, N)$, M, N, P et Q sont cocycliques. Or, en utilisant l'angle droit des médiatrices, il et clair que M, N, P et O sont cocycliques.

D'où finalement M, N, P, Q et O cocycliques et $\widehat{OQP} = 90°$ par le théorème de l'angle inscrit.

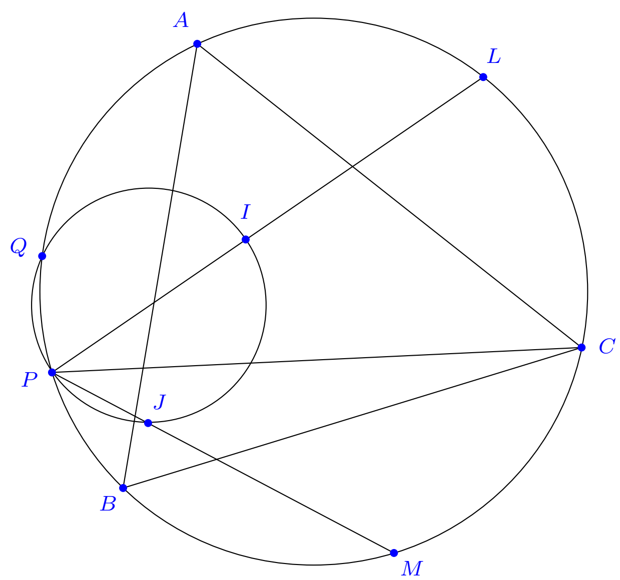
Exercice 6
Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle Γ, P un point variable sur le l'arc AB qui ne contient pas C. Soient I et J les centres des cercles inscrits des triangles ACP et BCP respectivement. On considère Q le point d'intersection de Γ et du cercle circonscrit au triangle PIJ.

Montrer que Q reste fixe quand P varie.

Solution de l'exercice 6
On rappelle le théorème du pôle Sud, visiblement pertinent dans cet exercice et démontrable grâce à une chasse aux angles élementaire (exercice !).



Si XYZ est un triangle inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$, I son centre du cercle inscrit et S le deuxième point d'intersection de (XI) avec $\mathcal{C}$. Alors, S est le milieu de l'arc YZ et, plus précisément, $SY = SI = SZ$.



On est dans la situation classique avec deux cercles qui s'intersectent, on connaît bien un des points d'intersection et c'est l'autre qui nous intésse. On cherche donc à compléter le quadrilatère. De manière naturelle, on introduit donc les points fixes L et M, milieux respectifs des petits arcs AC et BC. D'après le théorème du pôle Sud, P, I et L ainsi que P, J et M sont alignés.

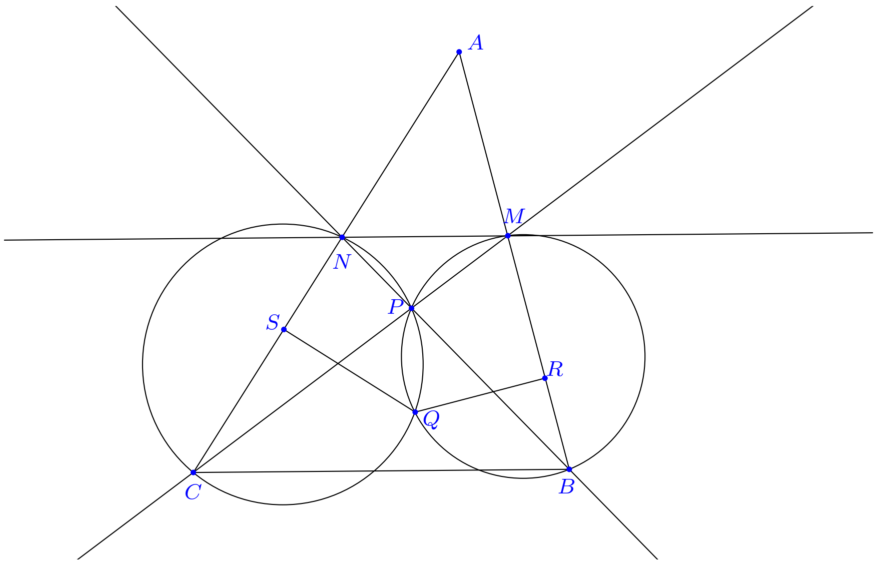
On sait alors que Q est le centre de la similitude S envoyant I sur J et L sur M. (Comme toujours se pose la question de quelle similitude choisir : pourquoi pas celle envoyant I sur

L et J sur M ? Et comme souvent la réponse sera qu'on connaît mieux la première similitude parce que l'on maîtrise bien les longueurs impliquées.) Cette similitude envoyant le point fixe L sur le point fixe M, pour prouver qu'elle est fixe (et donc Q également), il suffit de montrer que son angle de rotation et son rapport de dilatation sont fixes (un petit dessin convaincra le lecteur sceptique...). Or, l'angle vaut $\widehat{LQM}$ qui est fixe d'après le théorème de l'angle inscrit et le rapport de dilatation vaut JM/IL qui vaut CM/CL d'après le théorème du pôle Sud, d'où la conclusion.

Exercice 7
(BMO 2009) Soit ABC un triangle. Une droite parallèle à (BC) coupe $[AB]$ en M et $[AC]$ en N. Soit P le point d'intersection de (BN) et (CM). Les cercles circonscrits à BMP et CNP se recoupent en Q.

Montrer que $\widehat{PAB} = \widehat{QAC}$.

Solution de l'exercice 7



Commençons par nous occuper de P : d'après le théorème de Ceva et celui de Thalès, (AP) est une médiane de ABC, ce qui signifie que $\widehat{PAB}$ ne pourra pas s'exprimer de manière simple. On va donc utiliser de la trigonométrie.

On remarque que Q est le centre de la similitude directe s qui envoie B sur N et M sur C. Pour pouvoir faire des calculs trigonométriques sur $\widehat{QAB}$ et $\widehat{QAC}$, on introduit les projetés orthogonaux R et S de Q sur (AB) et (AC). On a $s(R) = S$ donc $\frac{QS}{QR}$ est égal au rapport de s, soit $\frac{NC}{BM} = \frac{AC}{AB}$ par Thalès. On en déduit $\frac{\sin \widehat{QAC}}{\sin \widehat{QAB}} = \frac{QS/QA}{QR/QA} = \frac{AC}{AB}$.

D'un autre côté, si M est le milieu de $[BC]$, on a en utilisant plusieurs fois la loi des sinus :

$$\frac{\sin \widehat{PAB}}{\sin \widehat{PAC}} = \frac{\sin \widehat{MAB}}{\sin \widehat{MAC}} = \frac{\frac{BM}{AM} \sin \widehat{ABM}}{\frac{CM}{AM} \sin \widehat{ACM}} = \frac{\sin \widehat{ABC}}{\sin \widehat{ACB}} = \frac{AC}{AB} = \frac{\sin \widehat{QAC}}{\sin \widehat{QAB}}$$

Autrement dit, $f(\widehat{PAB}) = f(\widehat{QAC})$ avec $f(x) = \frac{\sin x}{\sin (\widehat{BAC} - x)}$. On peut vérifier que cette fonction est strictement croissante, par exemple en la dérivant (exercice), d'où $\widehat{PAB} = \widehat{QAC}$.

Remarque 1.
La trigonométrie est une méthode très puissante. Pour passer de formules sur des rapports de sinus (obtenues grâce à la loi des sinus et au théorème de Ceva trigonométrique) à des égalités d'angles, le fait que f soit strictement croissante est très utile et à retenir !

4 Restes chinois (Issam)

Théorème des restes chinois

(Inspiré du cours d'Evan Chen)

Le théorème des restes chinois est un théorème assez général. Ici, on se préoccupera principalement de deux versions présentées ici. Commençons d'abord par la motivation historique :

Motivation historique :

On dit que Sun Zi, un général chinois, pouvait compter son armée en les ordonnant par rangés de plusieurs nombres différents et en notant le nombre de ceux présents dans la dernière ligne.

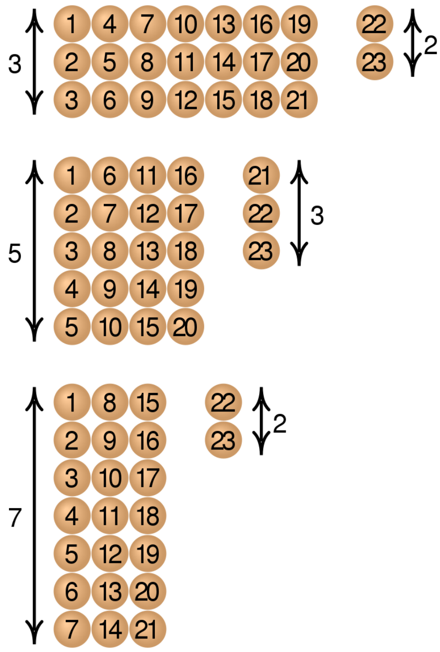


FIGURE 1 – Photo gracieusement prise de Wikipedia

La figure ci-haut montre par exemple que 23 donne un reste de 2 modulo 3, de 3 modulo 5 et de 2 modulo 7.
Ce qu'on verra par la suite est que ceci permet de déterminer le nombre de soldats à $3 \times 5 \times 7 = 105$ près.
En d'autres mots, si on sait que notre armée contient au plus 104 soldats alors on a le nombre exact.

Présentons désormais le théorème :

Théorème 1.
Soit $n_1, \dots, n_k \geqslant 2$ deux à deux premiers entre eux et $a_1, \dots, a_k$ des entiers quelconques. Alors le système de congruences d'inconnu x suivant :

$$E : \begin{cases} x \equiv a_1 \ [n_1] \\ \quad \vdots \\ x \equiv a_k \ [n_k] \end{cases}$$

Possède une unique solution modulo le produit $n_1 \dots n_k$.
En d'autre mots, si on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions du système E, alors il existe $x_0 \in \mathbb{Z}$ (qui dépend des a_i et n_i) tel que $x \in \mathcal{S} \iff x \equiv x_0[n_1 \dots n_k]$

Avant de le démontrer, faisons plusieurs remarques :

- **Existence :** Le plus intéressant point est celui-ci. En effet, on part de k congruence simultanées qui, grâce au théorème, peuvent être satisfaites en même temps. Ceci est utile aussi bien lorsque l'énnoncé nous impose ces contraintes que lorsqu'on veut, nous-même, considérer un entier vérifiant plusieurs propriétés simultanément.
- **Unicité :** Si un autre entier vérifie le même système alors nos deux solutions sont égales au produit près.
  En d'autres mots, si le produit est assez grand, alors on peut coder des nombres relativement grands avec ces congruences simultanées.
  Où est l'intérêt ? plusieurs points :
  - Cela requiert en général moins de mémoire.
  - L'addition et la multiplication se font directement sur chacune des congruences et donc prennent moins de temps vu qu'on manie des nombres plus petits. Ceci en plus de pouvoir se faire en parallèle dans nos machines.
  - Quoique naïf (au sens qu'il y a des algorithmes bien plus efficaces) mais on pourrait coder un mot de passe avec k congruences dont chacune n'est connue que d'une seule personne.
    Ceci permet de s'assurer que le code ne peut être connu que si tout le groupe est réuni.
- **En pratique :** Le théorème est surtout utilisé pour imposer des conditions sur des nombres successifs ($x, x+1, x+2$ etc) ou en décomposant une congruence modulo n en des congruences modulo les puissances de ses facteur premiers i.e. avec $n_i = p_i^{\alpha_i}$ où les $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$ et les p_i sont des premiers distincts.

Bien entendu, certaines de ces remarques ne sont valides que puisque reconstruire la solution des congruences est algorithmiquement faisable, pas trop gourmand en ressources et même, mieux, dépendant principalement uniquement des n_i (en complexité).
Plus précisément, il fait et suffit de résoudre les systèmes simplifiés $(E_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ avec

$$E_i : \begin{cases} \forall j \neq i \ x \equiv 0 \ [n_j] \\ x \equiv 1 \ [n_i] \end{cases}$$

En effet, si on note y_i une solution du système E_i, alors il est aisé de se convaincre que $x = a_1 y_1 + \dots + a_k y_k$ est une solution de E (chacun des termes contribue de 0 à la congruence modulo n_i sauf $a_i y_i$ qui donc contribue de a_i).
La question donc est de résoudre E_i, qu'on fera pas étapes :

1. Une solution y_i de E_i vérifie $\forall j \neq i \ y_i \equiv 0 \ [n_j]$ i.e. $\forall j \neq i \ n_j | y_i$
   Les n_j étant premiers entre eux on a, par Gauß, que $\widehat{n_i} | y_i$ où $\widehat{n_i} = \dfrac{n_1 \dots n_k}{n_i} = \prod_{j \neq i} n_j$. On écrira donc $y_i = c\widehat{n_i}$
2. La seule congruence qu'il reste à gérer est $y_i \equiv 1 \ [n_i]$. Pour cela remarquer que, les n_j étant premiers entre eux, $\widehat{n_i} \wedge n_i = 1$ et donc $\widehat{n_i}$ est inversible modulo n_i, disons d'inverse $[\widehat{n_i}]_{n_i}^{-1} \in \mathbb{Z}$.
   On a alors $c\widehat{n_i} \equiv 1 \ [n_i]$ ce qui donne que $c \cdot 1 \equiv c\widehat{n_i}[\widehat{n_i}]_{n_i}^{-1} \equiv [\widehat{n_i}]_{n_i}^{-1} \mod n_i$
   Ainsi, une solution recherchée est $y_i = [\widehat{n_i}]_{n_i}^{-1}\widehat{n_i}$ (la vérification réciproque est immédiate)

Ainsi, avec nos notations, $x_0 = a_1[\widehat{n_1}]_{n_1}^{-1}\widehat{n_1} + \dots + a_k[\widehat{n_k}]_{n_k}^{-1}\widehat{n_k}$ et une solution de E (et de même pour tout entier qui lui est congru modulo le produit $n_1 \dots n_k$).
En pratique on n'utilise quasi-jamais cette formule dans les problèmes olympiques. Le raisonnement fait pour la retrouver est par contre à retenir.
Faisons maintenant la démonstration du théorème, qui découle de notre discussions ici :
Démonstration.

Posons $x_0 = a_1[\widehat{n_1}]_{n_1}^{-1}\widehat{n_1} + \dots + a_k[\widehat{n_k}]_{n_k}^{-1}\widehat{n_k}$. La discussion antérieur permet d'affirmer la véracité du sens réciproque avec ce x_0 (i.e. que le système possède une solution).
Pour l'unicité (sens direct), remarquer que si x est solution, alors $x - x_0$ est solution du système avec seconds membres nuls i.e. $\forall i \ x - x_0 \equiv 0 \ [n_i]$.
Les n_i étant premiers entre eux, on a donc, par Gauß, que $n_1 \dots n_k | x - x_0$, ce qui est le résultat voulu. □

Avec un vocabulaire de théorie des groupes pour ceux qui la connaissent, le théorème a la forme suivante :

Théorème 2. Soit $n_1, \dots, n_k \geqslant 2$ premiers entre eux. Alors l'application

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{Z}/n_1 \dots n_k\mathbb{Z} & \to \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z} \\ \overline{x} & \mapsto (\overline{x}, \dots, \overline{x}) \end{cases}$$

est un isomorphisme de groupes.

Une question qui peut se poser est : que faire si les n_i ne sont pas premiers entre eux ?
La réponse est que le théorème reste vrai, avec le ppcm au lieu du produit, si les équations sont "compatibles"
Que veut dire "compatible" ? Prenons un exemple d'un système incompatible :

$$x \equiv 1 \ [6] \text{ et } x \equiv 4 \ [8]$$

est un exemple de système incompatible.
En effet, la première équation affirme en particulier que x est impair tandis que la seconde affirme que x est pair. Ici on a donc incompatibilité car $1 \not\equiv 4 \ [2]$. Le 2 ici vient comme facteur commun de 6 et 8
Plus généralement on a la version ci dessous :

Théorème 3.
Soit $n_1, \dots, n_k \geqslant 2$ et $a_1, \dots, a_k$ des entiers. Alors le système :

$$E : \begin{cases} x \equiv a_1 \ [n_1] \\ \quad \vdots \\ x \equiv a_k \ [n_k] \end{cases}$$

admet une solution si et seulement si les congruences sont compatibles, au sens que $\forall i \neq j\ a_i \equiv a_j\ [n_i \wedge n_j]$.
Dans ce cas, la solution est unique modulo le ppcm $a_1 \vee \cdots \vee a_k$ i.e. si les congruences sont compatibles alors il existe $x_0 \in \mathbb{Z}$ tel que x est solution de E si et seulement si $x \equiv x_0\ [n_1 \vee \cdots \vee n_k]$

Présentons désormais deux applications directes de la première version du théorème des restes chinois :

Exemple 4.
Notons pour tout $n \geqslant 2\ I_n = \{1 \leqslant k \leqslant n,\ k \wedge n = 1\}$ et $\varphi(n) = |I_n|$ l'indicatrice d'Euler. Prenons $a, b \geqslant 2$ premiers entre eux, alors $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.
Preuve :
Pour ceux qui connaissent la théorie des groupes il existe une solution bien plus rapide. On se contentera ici d'une solution élémentaire.
Posons
$$\phi : \begin{cases} I_{ab} & \rightarrow I_a \times I_b \\ x & \mapsto (x\%a, x\%b) \end{cases}$$
où $\%$ désigne le reste de la division euclidienne.

1. Cette application est bien définie car :
   — Le reste de cette division est dans $[0, a-1]$ (resp. $[0, b-1]$) et ne peut pas être 0 car sinon $a|x$ ou $b|x$ ce qui est impossible vu que $a, b \geqslant 2$ et que $x \wedge ab = 1$
   — Si $x \wedge ab = 1$ alors $x \wedge a = x \wedge b = 1$
2. ϕ est injective vu que le théorème des restes chinois affirme que si $x, y \in I_{ab}$ vérifient $x\%a = y\%a$ et $x\%b = y\%b$ alors $x \equiv b\ [ab]$ i.e. $x = y$ ici
3. ϕ est surjective vu que si on prend $(a', b') \in I_a \times I_b$ alors on dispose, par le théorème des restes chinois, de $x \in [0, ab-1]$ tel que $x\%a = a'$ et $x\%b = b'$.
   Clairement $x \neq 0$ (car $0 \notin I_a$ par exemple) et $x \wedge ab = 1$ par Gauß.

Bref, ϕ est bijective d'où l'égalité.

Exemple 5.
énumérons $p_1, p_2 \ldots$ la liste croissante des premiers. On a par exemple $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5$ et $p_4 = 7$. Alors $\forall M \in \mathbb{N}^*\ \exists i \in \mathbb{N}^*\ p_{i+1} - p_i \geqslant M$.
Preuve :
Avec le théorème des restes chinois il suffit de prendre une solution $x \geqslant 2$ du système de congruences
$$E : \begin{cases} x + 1 \equiv 0\ [p_1^2] \\ \quad\vdots \\ x + M \equiv 0\ [p_M^2] \end{cases}$$
(les modulos sont bien deux à deux premiers entre eux).
En effet, si on note i l'unique indice tel que $p_i \leqslant x < p_{i+1}$. Alors, vu que $x+1, x+2, \ldots, x+M$ sont tous non premiers vu que chacun est divisible par le carré d'un nombre premier, on a forcément $p_{i+1} \geqslant x + M + 1$ et donc $p_{i+1} - p_i \geqslant M + 1$
Une autre solution consiste à prendre une grande factorielle, par exemple $x = (M+1)! + 1$, et de remarquer que $\forall i \in [1, M]\ i+1 | x+i$ et $x + i \neq i + 1$. Ceci permet de conclure similairement en prenant l'indice i tel que $p_i \leqslant x < p_{i+1}$.

Ajoutons une dernière version du théorème des restes chinois, qui cette fois concerne les polynômes, rapidement vue dans le cours et un peu plus détaillée ici :

Théorème 6.
Fixons $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit $P_1, \ldots, P_k$ des polynômes non constants à coefficients dans $\mathbb{K}$ deux à deux premiers entre eux et $Q_1, \ldots, Q_k$ des polynômes quelconques (aussi à coefficients dans $\mathbb{K}$). Alors le système de congruences d'inconnu P suivant :

$$E : \begin{cases} P \equiv Q_1 \ [P_1] \\ \quad \vdots \\ P \equiv Q_k \ [P_k] \end{cases}$$

Possède une unique solution modulo le produit $P_1 \ldots P_k$.
En d'autre mots, si on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions du système E, alors il existe P_0 polynôme à coefficient dans $\mathbb{K}$ (qui dépend des P_i et Q_i) tel que $P \in \mathcal{S} \iff P \equiv P_0 \ [P_1 \ldots P_k]$

Remarques :
Comme dans la version avant où on pouvait avoir une unique solution dans $[0, a_1 \ldots a_k - 1]$, ici, par division euclidienne, on a une unique solution de degré strictement inférieur au degré de $P_1 \ldots P_k$ i.e. de degré strictement inférieur à $\deg(P_1) + \cdots + \deg(P_k)$.
L'exemple typique d'utilisation de ce théorème est le suivant :

Exemple 7.
Fixons $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit $a_1, \ldots, a_k$ des éléments distincts dans $\mathbb{K}$ et $b_1, \ldots, b_k$ des éléments quelconques de $\mathbb{K}$. Alors il existe un unique polynôme de degré au plus $k - 1$ tel que $\forall i \ P(a_i) = b_i$
En effet, il suffit d'appliquer le théorème des restes chinois à $P_i = X - a_i$ et $Q_i = b_i$
Pour ceux intéressés, l'algorithme précédemment montré pour trouver la solution reste valable et fournit la solution suivante :

$$P_0 = b_1 L_1 + \ldots b_k L_k \text{ où } L_i = \prod_{j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$

Ces polynômes sont appelés les interpolateurs de Lagrange (associés à nos a_i et b_i).

Passons désormais aux exercices :

Exercice 1
USAMO 2008/01 :
Montrer que $\forall n \geqslant 1 \ \exists k_0, \ldots, k_n > 1$ deux à deux premiers entre eux tel que $k_0 \ldots k_n - 1$ soit égal au produit de deux entiers consécutifs.

Exercice 2
IMO 1989
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ il existe n entiers consécutifs strictement positifs tel qu'aucun ne soit une puissance d'un nombre premier (i.e. aucun ne soit de la forme p^a pour un certain p premier et $a \geqslant 1$).

Exercice 3
IMO 1998 Shortlist
Trouver tous les $n \geqslant 1$ tel qu'il existe $m \geqslant 1$ qui vérifier $2^n - 1 | m^2 + 9$

Ajoutons un exercice bonus qui a failli figurer dans l'entraînement de mi-stage

Exercice 4
APMO 2009/04
Montrer que $\forall k \geqslant 1$ il existe une suite arithmétique à valeurs dans $\mathbb{Q}_*^+$ $x_1, \ldots, x_k$ tel que, lorsqu'on écrit sous forme irréductible $x_i = \frac{a_i}{b_i}$ avec $a_i, b_i \geqslant 1$ et $a_i \wedge b_i = 1$, alors les $2k$ entiers $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k$ sont distincts.

Dernier exercice fait un peu rapidement à la fin :

Exercice 5
TSTST 2012/3
Soit $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ une application qui vérifie :

1. Si $m \wedge n = 1$ alors $f(m) \wedge f(n) = 1$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $n \leqslant f(n) \leqslant n + 2012$

Montrer que $\forall p$ premier et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ si $p | f(n)$ alors $p | n$

Corrections :

Solution de l'exercice 1

— Simplifions d'abord l'énoncé : un nombre qui s'écrit $k_0 \dots k_n$ avec les $k_i > 1$ deux à deux premiers entre eux est exactement un nombre qui a au moins $n+1$ facteurs premiers (distincts) qui le divisent.
En effet, chaque k_i est divisible par un nombre premier p_i qui ne divise aucun des autres ce qui fait que $k_0 \dots k_n$ possède au moins $n+1$ facteurs premiers (distincts) dans sa décomposition.
Réciproquement, si $n = p_0^{\alpha_0} \dots p_r^{\alpha_r}$ avec les p_i premiers distincts, les $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$ et $r \geqslant n$ alors on a $n = p_0 \dots p_r$ en posant $\forall i < n \; k_i = p_i^{\alpha_i}$ et $k_n = p_n^{\alpha_n} \dots p_r^{\alpha_r}$.
La question est donc équivalente à montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \; \exists a \in \mathbb{N}^* \; a(a+1)+1$ ait au moins n facteurs premiers (distincts).

— Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ et posons $P(X) = X(X+1)+1 = X^2+X+1$. On cherche donc à trouver $p_1, \dots, p_n$ des nombres premiers distincts tel qu'il existe $x \in \mathbb{N}^*$ qui vérifie $p_1 \dots p_n | P(x)$ où, ce qui lui est équivalente, $\exists x \in \mathbb{N}^* \; \forall i \; P(x) \equiv 0 \; [p_i]$.
Si on possède des connaissances sur les résidus quadratiques, on peut conclure de la façon suivante (voir plus bas pour une méthode plus élémentaire) :
  — $p_i = 2$ est impossible vu que $\forall x \in \mathbb{Z} \; P(x)$ est impair
  — Ainsi, p_i est un premier impair. On a alors

$$P(x) \equiv 0 \; [p_i] \iff x^2+x+1 \equiv 0 \; [p_i] \iff x^2 - (p_i-1)x + 1 \equiv 0 \; [p_i]$$

$$\iff \left(x - \frac{p_i-1}{2}\right)^2 \equiv -1 + \left(\frac{p_i-1}{2}\right)^2 \; [p_i]$$

  Ceci veut dire qu'on a (au moins) une solution (pour cette congruence), qui est forcément modulo p_i, que si et seulement si

$$-1 + \left(\frac{p_i-1}{2}\right)^2 \equiv \frac{-4+p_i^2-2p_i+1}{4} \equiv (2^{-1})^2 \cdot (-3)[p_i]$$

  est un carré parfait modulo p_i et donc il (faut et) suffit de prouver que (-3) est un carré parfait modulo une infinité de nombres premiers impaires, par exemple en utilisant la réciprocité quadratique des symboles de Legendre.
  — Une fois ceci montré, si on prend maintenant $p_1, \dots, p_n$ de tels premiers distincts et $x_1, \dots, x_n$ des solutions associées à ces premiers respectifs, on peut alors conclure par le théorème des restes chinois.
  En effet, ce dernier donne l'existence d'un x qui vérifie $\forall 1 \leqslant i \leqslant n \; x \equiv x_i \; [p_i]$ et x peut être pris dans $\mathbb{N}^*$.

Faisons désormais sans résidus quadratiques
  — Si notre problème est vrai, alors forcément $I = \{p \text{ premier}, \; \exists x \in \mathbb{N}^* \; p | P(x)\}$ est infini.
  Ceci est vrai car clairement pour $M \in \mathbb{N}^*$ assez grand $P(M!) = M!(M!+1)+1$ est premier avec $M!$ et donc tous ses facteurs premiers sans strictement plus grand que M

— Si on examine de plus près la solution ci-haut, on remarque que tout ce dont on avait besoin est l'infinitude de I. Réécrivons l'argument avec ceci en tête :

1. I est infini donc on peut prendre $p_1, \ldots, p_n$ des premiers distincts dans I. Chacun d'eux possède, par définition de I, un $x_i \in \mathbb{N}^*$ (non forcément unique) qui lui est associé au sens que $p_i|P(x_i)$
2. Remarquons que P est polynomial. Ceci veut dire que si $x \equiv x_i\ [p_i]$ alors $P(x) \equiv P(x_i) \equiv 0\ [p_i]$ et donc il suffit d'imposer $x \equiv x_i\ [p_i]$ pour assurer que $P(x) \equiv 0\ [p_i]$
3. On procède comme avant : considérons le système

$$E : \begin{cases} x \equiv x_1\ [p_1] \\ \quad\vdots \\ x \equiv x_k\ [p_n] \end{cases}$$

Un $x \in \mathbb{N}^*$ qui vérifie E vérifie $p_1 \ldots p_n | P(x)$. On conclue quant à l'existence d'un tel x par le théorème des restes chinois.

Solution de l'exercice 2

Dire qu'un entier $a \geqslant 2$ n'est pas une puissance d'un nombre premier est équivalent à dire que a est divisible par deux premiers distincts. Imposons simplement ceci.

Prenons $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$ $2n$ nombres premiers distincts. Posons le système

$$E : \begin{cases} x+1 \equiv 0\ [p_1 q_1] \\ \quad\vdots \\ x+n \equiv 0\ [p_n q_n] \end{cases}$$

Et prenons $x \in \mathbb{N}^*$ une solution de E, qui existe par le théorème des restes chinois.

Il est alors clair qu'aucun des $x+1, \ldots, x+n$ ne peut être une puissance d'un nombre premier et donc on conclue.

Autre solution

Une autre solution consiste à forcer les choses par des factorielles.

Plus précisément, considérons $M = (2n+2)!$.

On a alors $\forall 2 \leqslant i \leqslant n+1,\ i|M+i = i\left(\dfrac{(2n+2)!}{i} + 1\right)$

Si $M+i$ était une puissance d'un nombre premier alors forcement tous deux de ses diviseurs positifs différents de 1 ne sont pas premiers entre eux.

Ceci est clairement refuté ici vu que

$$i \geqslant 2,\ \frac{(2n+2)!}{i} + 1 \geqslant 2 \text{ et } i \wedge \left(\frac{(2n+2)!}{i} + 1\right) = 1$$

vu que $i^2|((n+1)!)^2|(2n+2)!$ (on rappelle que $\binom{2n+2}{n+1} = \dfrac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}$ est un coefficient binomial et est donc entier)

Solution de l'exercice 3

Des tests sur des nombres assez petits donnent $n = 1, 2$ et 4. Une prédiction possible est qu'il

s'agit des puissances de 2 (1 est considéré comme puissance de 2 dans cet exercice), testons ceci :
Supposons n n'est pas une puissance de 2, alors $n = qr$ avec $q \geqslant 3$ un premier impair.
En se rappelant que $2^q - 1 | 2^n - 1$ (car $a^n - 1 = (a^q - 1)(1 + a^q + \cdots + a^{q(r-1)})$), cela revient à dire que le problème admet une solution première impaire $q \geqslant 3$.
On se retrouve alors avec $m^2 \equiv -9 \ [2^q - 1]$. Ceci nous fait penser à utiliser l'ordre et le théorème de petit Fermat et donc nous pousse à voir deux choses :

1. Considérer un premier p qui divise $2^q - 1$
2. Voir si -9 est inversible modulo p ou, équivalent, si 3 est inversible modulo p

Prenons alors p un premier qui divise $2^q - 1$.
Pour le second point, remarquons que $2^q - 1 \equiv (-1)^q - 1 \underset{q \text{ impair}}{\equiv} -1 - 1 \ [3]$ et donc 3 est bien inversible modulo $2^q - 1$ (et donc modulo p).
Revenons à notre p : il faut tout de même que ce premier p reflète des propriétés que possède $2^q - 1$, sinon on ne déduira pas grand chose.
Une idée classique ici est de remarquer que $2^q - 1 \equiv -1 \ [4]$ et que donc au moins un des premiers qui le divisent est aussi congru à -1 modulo 4. Imposons à p cette condition (i.e. $p \equiv -1 \ [4]$).
Cette condition peut sembler un peu arbitraire mais elle ne l'est pas vraiment si on connaît un peu les résidus quadratiques (ou plus exactement que l'équation $x^2 + 1$ modulo p est fortement liée p modulo 4).
Bref, la congruence devient $m^2 \equiv -3^2 \ [p]$. Ici, il est naturel de penser au théorème de petit Fermat/l'ordre. Ceci donne finalement (en se rappelant que -9 et 3 sont inversibles modulo p)

$$(m^2)^{\frac{p-1}{2}} \equiv m^{p-1} \equiv 1 \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} 3^{p-1} \underset{\frac{p-1}{2} \text{ impair}}{\equiv} -1$$

Ce qui est une claire contradiction.
Ainsi, si n est solution alors c'est une puissance de 2. A-t-on la réciproque ? Essayons de voir :

— Commençons par noter $F_k = 2^{2^k} - 1 = 2^n - 1$ avec $n = 2^k$ et $k \geqslant 2$. Remarquons les propriétés suivantes :
   1. En utilisant plusieurs fois que $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$, on obtient $F_k = 2^n - 1 = (2+1)(2^2+1)\dots(2^{\frac{n}{2}}+1)$
   2. $3 | F_k$ et donc si on veut $F_k | m^2 + 9$ il faut que $3 | m^2$ i.e. que $3 | m$.
   La division devient $(2^2+1)\dots(2^{\frac{n}{2}}+1) | (m'^2 + 1)$ où $m' = \dfrac{m}{3}$ (on rappelle que 3 ne divise aucun des termes à gauche vu que chacun est congru à 2 modulo 3 et donc peut être enlevé par Gauß).
   Ainsi l'exercice est équivalent à essayer de trouver (ou prouver la non-existence de) $m' \in \mathbb{N}^*$ qui vérifie la division ci-haut.
   3. Un m' solution vérifie en particulier le système E

$$E : \begin{cases} x^2 + 1 \equiv 0 \ [2^2 + 1] \\ \quad \vdots \\ x^2 + 1 \equiv 0 \ [2^{\frac{n}{2}} + 1] \end{cases}$$

— Un tel système fait penser au théorème des restes chinois. Sauf que deux problèmes se posent à présent :
  1. Le système n'est pas linéaire mais quadratique
  2. Ce n'est pas une équivalence sauf si les modulos sont 2 à 2 premiers entre eux
  3. Même si on résout le premier point, l'existence d'une solution ne peut être fournie par le théorème des restes chinois que si les modulos sont 2 à 2 premiers entre eux (ou qu'on vérifie que les équations sont "compatibles"). On rejoint donc le second point.

Essayons de résoudre ces 3 (en fait 2) problèmes :

1. Chacune des congruence possède une solution évidente, à savoir $x = \pm 2^{\frac{l}{2}}$ vérifie $x^2 + 1 \equiv 0\ [2^l + 1]$. On peut donc changer le système quadratique en un système linéaire qui l'impliquerait. Par exemple
$$E' : \begin{cases} x \equiv 2^1\ [2^2+1] \\ \quad \vdots \\ x \equiv 2^{\frac{n}{4}}\ [2^{\frac{n}{2}}+1] \end{cases}$$
2. Essayons de voir les facteurs communs à nos modulos (s'il en existe). Soit c un premier qui divise $2^l + 1$ et $2^{l'} + 1$ (s'il existe) avec $l' > l$ des puissances de 2. Il est clair que c est impair.
On a de plus que
$$2^l \equiv -1\ [c] \Longrightarrow (2^l)^{\frac{l'}{l}} \equiv (-1)^{\frac{l'}{l}} \underset{2 \mid \frac{l'}{l}}{\equiv} 1 \equiv -1\ [c]$$
ce qui est impossible vu que c est impair.

Ainsi nos modulos sont bien 2 à 2 premiers entre eux et donc notre système admet bien une solution $m' \in \mathbb{N}^*$ par le théorème des restes chinois.
Cette solution vérifie aussi le système E et est donc bien solution
Conclusion : $\{2^k,\ k \in \mathbb{N}\}$ est l'ensemble des n cherchés.

Solution de l'exercice 4
Vu que l'exercice a failli être posé dans l'entraînement de mi-parcours, il sera rédigé comme un brouillon au début (pour expliquer d'où viennent les idées) avant de rentrer dans le vif de la démonstration.
Commençons par quelques remarques :

— Vu que l'ordre ne change rien, on peut supposer notre suite croissante et écrire $x_k = \dfrac{a+kb}{M}$ avec $a, b, M \in \mathbb{N}^*$.
Travaillons au début avec $b = 1$ afin de simplifier nos raisonnements. Si on bloque à un moment on reprendra b comme paramètre.

— Imposer qu'aucun numérateur no soit égal à un dénominateur est relativement simple vu qu'il suffira d'ajouter un entier assez grand afin de s'assurer que notre plus petit numérateur soit plus grand que notre plus grand dénominateur.
Plus concrètement, l'égalité entre deux numérateurs ou deux dénominateurs dans $x_1, \ldots, x_k$ est équivalente à celle dans $x_1 + C, \ldots, x_k + C$ où $C \in \mathbb{N}^*$. Ce qui change

par contre est la possibilité d'avoir un numérateur égal à un dénominateur. Pour ne nous préoccuper que du premier cas et être sûr de ne pas avoir de numérateur égal à un dénominateur, on pourrait ajouter une très grande constante à notre suite.
Plus exactement, si on impose que $\frac{a}{M} > M$ alors c'est bon vu que le plus grand dénominateur possible est M tandis que le plus petit numérateur possible est minoré par $\frac{a+1}{M}$.
Ainsi, il suffit de trouver une telle suite $x_1, \dots, x_M$ où l'égalité ne peut pas intervenir dans des membres du même type (i.e. tous deux numérateurs ou tous deux dénominateurs)

— à chaque étape (i.e. passer de x_k à x_{k+1}), M doit se simplifier de manière différente pour ne pas retomber sur le même dénominateur.
Ceci veut dire, si les facteurs premiers de M sont pris assez grands, qu'à chaque étape on a (au moins) un nouveau nombre premier qui se simplifie dans M (et qui donc ne se simplifiait pas dans les étapes précédentes). Par assez grands on veut simplement forcer p à ne diviser qu'un des $a+k$ et donc $p \geqslant n$ fait l'affaire.
Le lecteur attentif remarquera qu'il existe un cas un peu spécial pas pris en compte ici qui est qu'aucune simplification ne se fasse à une certaine étape k mais qu'à chaque autre étape il y ait simplification (après tout, on peut avoir M une fois). Vu qu'on est juste en train de voir le comportement global/général pour le moment, on négligera ce cas spécifique.

— Cette simplification à chaque étape fait penser à quelque chose de la forme $x+k \equiv 0\ [p_k]$. Pour le dénominateurs, on pourrait commencer par voir celui le plus simple possible : sans exposants (on rappelle au passage qu'on peut contrôler la valuation $p-$adique par des congruences. Notamment $x \equiv p^a\ [p^{a+1}]$ impose que la valuation soit a par exemple)

— Finalement, pour garantir aussi que les numérateurs soient distincts, il suffit qu'on divise par des nombres de plus en plus petit pour avoir $\frac{x+i}{p_i}$ qui croit strictement.
Ceci fait penser à $p_1 > \cdots > p_n$.

Trêve de remarques, commençons par voir ou elle aboutissent :

— $M = p_1 \dots p_n$ avec les $p_1 > p_2 > \cdots > p_n$ n premiers distincts assez grands, disons $\forall i\ p_i \geqslant n$

— a vérifie un système de la forme

$$\begin{cases} a+1 \equiv 0\ [p_1] \\ \quad\vdots \\ a+n \equiv 0\ [p_n] \end{cases}$$

tout en étant assez grand pour éviter des égalités numérateur avec dénominateur, disons $a \geqslant M^2+1$

— Le système précédent possède une solution par le théorème des restes chinois. Vérifions que notre suite marche bien :

1. On ne peut pas avoir d'égalité numérateur dénominateur vu que le plus petit numérateur possible est minoré par $\frac{a+1}{M}$ qui est strictement plus grand que le plus grand dénominateur possible qui est majoré par M

2. $a+i$ est divisible par p_i mais par aucun des autres p_j. Ainsi l'écriture irréductible de x_i pour $i \in [1,n]$ est $x_i = \dfrac{\frac{a+i}{p_i}}{\frac{M}{p_i}}$
3. Les dénominateurs sont clairement deux à deux différents
Les numérateurs aussi sont distincts vu que $\dfrac{a+i+1}{p_{i+1}} > \dfrac{a+i}{p_{i+1}} > \dfrac{a+i}{p_i}$ (on rappelle que $p_i > p_{i+1}$)

<u>*Solution de l'exercice 5*</u>
Dans cet exercice on essayera, comme dans l'exercice 3, de procéder étape par étape à la solution (comme dans un brouillon, après tout c'est cette réflexion qui est à acquérir et pas vraiment la solution).
Par absurde, prenons p premier et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $p \nmid n$ mais $p|f(n)$.
Nous voulons passer de $p|f(n)$ à $p|n$. Ceci pousse à reformuler l'hypothèse 1 de cette façon :
Si $f(m) \wedge f(n) \neq 1$ alors $m \wedge n \neq 1$.
Sachant qu'on a que $p \wedge f(n) \neq 1$ mais $p \wedge n = 1$, il semble logique de chercher à trouver un N tel que $p|f(N)$ tout en ayant $f(N) \wedge n = 1$. Ceci permettrait d'avoir $f(N) \wedge f(n) \neq 1$ et $N \wedge n = 1$.
La condition $N \wedge n = 1$ est simple, il suffit par exemple d'imposer $\underline{N \equiv 1\ [n]\ (Co1)}$
Regardons maintenant nos 2 conditions de manière intuitive :

— Condition 2 : $f(N)$ ne peut pas trop s'éloigner de N
— Condition 1 : une condition de divisibilité qui lie N et $f(N)$. Si nos facteurs sont assez grands on a l'impression, vu la condition 1, au moins intuitivement, qu'on peut forcer $f(N) = N$.
Ceci nous est bien entendu très intéressant car :
  1. il suffira d'imposer $\underline{N \equiv 0\ [p]\ (Co2)}$ pour forcer $p|f(N)$
  2. $p \wedge n = 1$, les deux congruences $(Co1)$ et $(Co2)$ sont donc compatibles

Si on arrive à effectivement trouver un tel N on aura notre contradiction.
Il reste à voir si effectivement f se comporte comme l'identité pour pour certains N comme notre intuition semble suggérer.
Revoyons nos conditions : la deuxième nous informe que si $f(N) \neq N$ alors $f(N) = N + i$ pour un certain $1 \leqslant i \leqslant 2012$. Ce i état arbitraire tant qu'on a pas fixé N, qu'on veut à son tour fixer de sorte à contredire ce i, on tournera en rond sauf si on gère simultanément tous les i. Il faut donc essayer d'imposer des conditions sur tous les $N + i$.
Lesdits conditions doivent entrer en conflit avec la seule autre règle i.e. il faut trouver un M tel que $M \wedge N = 1$ (toujours facilement imposable avec $\underline{M \equiv 1\ [N]\ (Co3)}$. Ceci force par contre à définir M après N) mais $f(M) \wedge f(N) \neq 1$ i.e. $\forall i \in [1, 2012]\ f(M) \wedge N + i \neq 1$
Encore une fois, on tournera en rond sauf si on impose des conditions sur toutes les valeurs possibles de $f(M)$
En d'autres mots, on cherche à trouver M tel que $(Co3)$ et $\forall (i,j) \in [1, 2012] \times [0, 2012]\ (M + j) \wedge (N + i) \neq 1$.
Imposer cette dernière condition n'est pas compliqué : il suffit de prendre $(q_{i,j})_{i,j}$ des premiers distincts tel que $\underline{\forall (i,j) \in [1, 2012] \times [0, 2012]\ q_{i,j}|(M + j) \text{ et } q_{i,j}|(N + i)\ (Co4)}$
Il faut garder en tête que toutes nos congruences doivent être compatibles. Forçons ceci :
On a pour définir N :

— $(Co1)$ et $(Co2)$ sont toujours compatibles

— $(Co1)$ et $(Co4)$ et $(Co2)$ et $(Co4)$ sont compatibles si nos $q_{i,j}$ ne divisent pas n et sont différents de p, disons en imposant $q_{i,j} > n + p + 1$

Pour définir M on a :

— $(Co3)$ et $(Co4)$ sont compatibles si les $q_{i,j}$ ne divisent pas N. Vu qu'ils divisent des $N + i$ avec $i \in [1, 2012]$, il suffit de les prendre assez grand, par exemple $q_{i,j} > 2013$

Conclusion : il suffit de prendre $q_{i,j} > 2014 + n + p$
écrivons ceci un peu plus proprement :
Solution propre :
Ci dessous une solution sans idées parasites. Il est conseillé de voir le brouillon ci-haut pour voir d'où chaque idée vient et de s'approprier la réflexion faite.
Noter que certaines justifications, relativement faciles et surtout faites dans le brouillon ci-haut, ne sont pas rejustifiées plus bas.
Par absurde, prenons p premier et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $p \nmid n$ mais $p|f(n)$.
Prenons $(q_{i,j})_{\substack{i\in[1,2012]\\ j\in[0,2012]}}$ une familles de nombres premiers distincts tel que chacun vérifie $q_{i,j} > 2014 + n + p$
Considérons $N \in \mathbb{N}^*$ solution des congruences simultanées suivantes, par le théorème des restes chinois (il est aisé de vérifier que les modulos sont premiers entre eux, voir le brouillon plus haut si on est pas convaincu) :

1. $N \equiv 1\ [n]\ (Co1)$
2. $N \equiv 0\ [p]\ (Co2)$
3. $\forall (i, j) \in [1, 2012] \times [0, 2012]\ N + i \equiv 0\ [q_{i,j}]\ (Co4)$

Considérons ensuite $M \in \mathbb{N}^*$ solution des congruences simultanées suivantes, par le théorème des restes chinois (encore une fois, il est aisé de vérifier que les modulos sont premiers entre eux, voir le brouillon plus haut si on est pas convaincu) :

1. $M \equiv 1\ [N]\ (Co3)$
2. $\forall (i, j) \in [1, 2012] \times [0, 2012]\ M + j \equiv 0\ [q_{i,j}]\ (Co4)$

Les congruences modulo les $q_{i,j}$ sont résumées dans le tableau suivant :

	M	$\dots$	$M + 2012$
$N + 1$	$q_{1,0}$	$\dots$	$q_{1,2012}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$N + 2012$	$q_{2012,0}$	$\dots$	$q_{2012,2012}$

Bref, on a clairement $N \wedge M = 1$ et donc $f(N) \wedge f(M) = 1$.
Vu le tableau ci-haut, $\forall (i, j) \in [1, 2012] \times [0, 2012]\ (N + i) \wedge (M + j) \neq 1$ ce qui impose, vu que $N \leqslant f(N) \leqslant N + 2012$ et $M \leqslant f(M) \leqslant M + 2012$, que forcément $f(N) = N$.
On obtient maintenant notre contradiction en remarquant que $N \wedge n = 1$ mais que $f(N) \wedge f(n) = N \wedge f(n) \neq 1$ vu que $p|N$ et $p|f(n)$

5 Encadrements en arithmétique (Matthieu Bo. et Auguste)

Idées importantes

Le but du TD est d'utiliser des arguments algébriques pour résoudre des problèmes d'arithmétique. On s'appuie notamment sur quelques idées relativement simples :

– Entre deux carrés consécutifs, il n'y a pas de carrés parfaits. Plus généralement, entre deux puissances k-ièmes consécutives, il n'y en a pas d'autre.

– L'écart entre deux puissances k-ièmes consécutives devient de plus en plus grand quand ces nombres grandissent.

– Pour des entiers positifs a et b, si $a \mid b$, alors $b = 0$ ou $a \leq b$ (ou encore $b = 0$ ou $a = b$ ou $b \geq 2a$).

– Pour des entiers quelconques a et b, si $a > b$, alors $a \geq b + 1$. Les exercices les plus difficiles alternent des arguments arithmétiques (par exemple regarder la valuation p-adique pour p premier) et algébriques (inégalités, pas nécessairement très fines, pour gérer la taille des factoriels par exemple).

Exercices

Exercice 1
Trouver tous les couples (x, y) d'entiers positifs tels que $x^2 = y^2 + 7y + 6$.

Exercice 2
A quelle condition sur $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ l'entier $(x + y)^2 + 3x + y + 1$ est-il un carré parfait ?

Exercice 3
Trouver tous les entiers $x, y \in \mathbb{N}$ tels que $y^6 + 2y^3 - y^2 + 1 = x^3$.

Exercice 4
Les entiers a et b ont la propriété suivante : pour tout entier naturel n, l'entier $2^n a + b$ est un carré parfait. Montrer que a est nul.

Exercice 5
Trouver tous les entiers positifs $a \geqslant b \geqslant c$ tels que $a^2 + 3b,\ b^2 + 3c,\ c^2 + 3a$ sont tous des carrés parfaits.

Exercice 6
Déterminer le plus petit entier $n \geqslant 2$ tel qu'il existe des entiers strictement positifs $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ vérifiant :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \mid \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)^2 - 1$$

Exercice 7
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^* \longmapsto \mathbb{N}^*$ telles que $\forall m, n \in \mathbb{N}^*,\ m^2 + f(n) \mid mf(m) + n$.

Exercice 8
Déterminer les entiers $a, b \geqslant 3$ tels que $ab^2 + b + 7 \mid a^2 b + a + b$

Exercice 9
(IMO SL 2021, N1) Déterminer tous les entiers $n \geqslant 1$ tels qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{N}$ vérifiant qu'aucun cube d'un nombre premier ne divise $a^2 + b + 3$ et :

$$\frac{ab + 3b + 8}{a^2 + b + 3} = n$$

Exercice 10
(IMO 2019, P4) Trouver tous les couples d'entiers strictement positifs (n, k) tels que :

$$(2^n - 2^0)(2^n - 2^1)(2^n - 2^2) \dots (2^n - 2^{n-1}) = k!$$

Exercice 11
(Très difficile : IMO 2022, P5) Trouver tous les triplets d'entiers strictements positifs (a, b, p) tels que p est premier et $a^p = b! + p$.

Solutions

Solution de l'exercice 1
Soit (x, y) une éventuelle solution. Pour $y > 3$, on a :

$$(y+3)^2 = y^2+6y+9 < y^2+7y+6 = x^2 < y^2+8y+16 = (y+4)^2 \text{ donc } y+3 < x < y+4, \text{ absurde!}$$

Donc $y \in \{0; 1; 2.3\}$. En testant les trois cas, seul $y = 3$ donne un carré parfait ($x = 6$).
La seule solution est donc $(6, 3)$.

Solution de l'exercice 2
Pour $x, y \in \mathbb{N}$ on remarque que :

$$(x + y)^2 < (x + y)^2 + 3x + y + 1 < (x + y)^2 + 4(x + y) + 4 = (x + y + 2)^2$$

Donc $(x+y)^2+3x+y+1$ est un carré parfait si et seulement si $(x+y)^2+3x+y+1 = (x+y+1)^2$.
On résout alors l'équation :

$$(x+y)^2+3x+y+1 = (x+y+1)^2 \iff (x+y)^2+3x+y+1 = (x+y)^2+2(x+y)+1 \iff x = y$$

La condition recherchée est donc $x = y$.

Solution de l'exercice 3
On remarque qu pour $y \geq 0$, on a $y^4 \geq y^3 \geq y^2$ donc

$$\left(y^2\right)^3 < y^6 + y^3 + (y^3 - y^2) + 1 = x^3 \leq y^6 + y^4 + 2y^4 + 3y^2 + 1 = (y^2 + 1)^3$$

Nécessairement, $y^6 + 2y^3 - y^2 + 1 = y^6 + 3y^4 + 3y^2 + 1$ donc $2y^3 = 3y^4 + 4y^2$ donc si $y > 0$, alors $0 = 3y^2 - 2y + 4 = 2y^2 + (y - 1)^2 + 3 > 0$, absurde.

Ainsi, $y = 0$ et on vérifie que $(1, 0)$ fournit effectivement une solution.

Solution alternative : Considérons un éventuel couple de solutions $(x, y) \in \mathbb{N}^2$. On a alors en factorisant : $(y^3 + y + 1)(y^3 - y + 1) = x^3$. Or, $(y^3 + y + 1) \wedge (y^3 - y + 1) = (y^3 + y + 1) \wedge 2y = (y^3 + y + 1) \wedge y = 1$ car $y^3 + y + 1$ est impair.

Ainsi, $y^3+y+1=a^3$ et y^3-y+1 sont tous deux des cubes. Or, $y^3<y^3+y+1\leqslant(y+1)^3$. L'inégalité est une égalité uniquement quand $y=0$, on a alors $(x,y)=(1,0)$. Sinon : $y^3<a^3<(y+1)^3$ absurde !

La seule solution est donc $(x,y)=(1,0)$.

Solution de l'exercice 4
Pour tout $n\in\mathbb{N}$ on écrit $x_n^2=2^na+b$ avec $x_n\in\mathbb{N}$. Alors $x_{n+2}^2=2^{n+2}a+b$ et $(2x_n)^2=4\cdot(2^na+b)=2^{n+2}a+4b$ sont des carrés parfaits et on a : $(2x_n)^2-x_{n+2}^2=3b$.

Mais dès que $(2x_n)>2|b|$ la distance entre deux carrés consécutifs (donc entre $(2x_n)^2$ et tout autre carré) vaut au moins $4|b|+1>3b$.

Ainsi, lorsque $b\neq 0$, $(x_n)_{n\geq 0}$ est bornée (par $|b|$) donc $(2^na+b)_{n\geq 0}$ est bornée : $a=0$.

Si au contraire $b=0$, on a $x_1^2=2x_0^2$ soit $x_1=x_0\sqrt{2}$. Comme $\sqrt{2}$ est irrationnel, on a donc $a=x_0^2=0$.

Solution de l'exercice 5
Soit (a,b,c) une éventuelle solution. On remarque que :

$$a^2<a^2+3b\leq a^2+3a<a^2+4a+4=(a+2)^2 \text{ et } b^2<b^2+3c\leq b^2+3b<b^2+4b+4=(b+2)^2$$

Nécessairement, $a^2+3b=(a+1)^2=a^2+2a+1$ et $b^2+3c=(b+1)^2=b^2+2b+1$ donc $2a+1=3b$ et $2b+1=3c$. En combinant, on obtient $a=\frac{9c-5}{4}$ et on sait que $c^2+3a=c^2+\frac{27c-15}{4}$ est un carré parfait.

Mais on sait que :

$$c^2<c^2+\frac{27-15}{4}\leq c^2+\frac{27c-15}{4}<c^2+8c+16=(c+4)^2 \text{ car } 27c-15<32c+64=4(8c+16)$$

Donc $c^2+\frac{27c-15}{4}\in\{(c+1)^2;(c+2)^2;(c+3)^2\}$.

En testant chacun de ces cas, on obtient $c=1,\ c=\frac{31}{11}$ (impossible) ou $c=17$.

Cela conduit aux deux solutions $(1,1,1)$ et $(37,25,17)$ (que l'on obtient et vérifie en réinjectant dans les expressions de a et b les valeurs entières de c possibles).

Solution de l'exercice 6
On peut trouver la solution à l'adresse suivante page 14 : https://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2020/04/corrig%C3%A9-comment%C3%A9-envoi-5.pdf

Solution de l'exercice 7
L'identité est clairement solution, montrons que c'est la seule. Pour cela, nous donnons trois solutions différentes à partir de celles trouvées par les élèves pendant le cours.
Solution alternative 1 : Soit f une éventuelle solution : pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a la relation $f(n)^2+f(n)\mid f(n)f(f(n))+n$ (avec la substitution "$m=f(n)$"), donc $f(n)\mid f(n)f(f(n))+n$ puis $f(n)\mid n$ donc $f(n)\leq n$. En particulier, $f(1)\leq 1$ donc $f(1)=1$.

De plus (avec "$m=n$") on a $n^2+f(n)\mid nf(n)+n$ donc $n^2+f(n)\leq nf(n)+n$ donc en simplifiant $n\leq f(n)$ pour $n\geq 2$.

Finalement, $f(n)=n$ quel que soit $n\in\mathbb{N}^*$ donc $f=id_{\mathbb{N}^*}$: l'identité est finalement l'unique solution.
Solution alternative 2 : On remarque que $4+f(2)\mid 2f(2)+2$ donc $4+f(2)\mid 2f(2)+2-(f(2)+4)=f(2)-2$. Comme $f(2)-2<f(2)+4$ et $2-f(2)<2<4+f(2)$, nécessairement $f(2)=2$.

En substituant $n = 2$ dans la relation définissant la fonction, on obtient : $m^2+2 \mid mf(m)+2$ donc $m^2 + 2 \leq mf(m) + 2$ puis $f(m) \geq m$ pour tout $m \geq 1$. En substituant $n = 2$, on obtient $4 + f(n) \mid n + 4$ donc $f(n) + 4 \leq n + 4$ soit $f(n) \leq n$ pour tout $n \geq 1$.

Finalement, $f(n) = n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$ donc $f = id_{\mathbb{N}^*}$: l'identité est finalement l'unique solution.

Solution alternative 3 : Avec la substitution "$m = n$" on a $n^2 + f(n) \mid nf(n) + n$ donc $n^2 + f(n) \leq nf(n) + n$ donc en simplifiant $n \leq f(n)$ pour $n \geq 2$.

Avec la substitution "$m = 1$" on a $f(n) + 1 \mid n + f(1)$. Si $\frac{n+f(1)}{f(n)+1} \geq 2$, alors $n + f(1) \geq 2f(n) + 2 \geq 2n + 2$ donc pour $n \geq f(1)$, c'est impossible. Donc pour tout $n \geq f(1)$, on a $n + f(1) = f(n) + 1$.

On en déduit que pour tous $m, n \geq f(1)$ on a :

$$m^2 + n + f(1) - 1 \mid n + m^2 + m(f(1) - 1) \text{ donc } m^2 + n + f(1) - 1 \mid (m - 1)(f(1) - 1)$$

En particulier, avec $m = n = f(1)$, on a $f(1) + f(1)^2 + f(1) - 1 > (f(1) - 1)^2$ donc $f(1) = 1$.

Finalement, $f(n) = n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$ donc $f = id_{\mathbb{N}^*}$: l'identité est finalement l'unique solution.

Solution de l'exercice 8

On a :

$$\begin{aligned} ab^2 + b + 7 &\mid a^2b^2 + ab + b^2 \\ ab^2 + b + 7 &\mid a^2b^2 + ab + 7a \end{aligned}$$

Il suit : $ab^2 + b + 7 \mid b^2 - 7a$. Or, comme $a, b \geqslant 3$: $b^2 - 7a < b^2 < ab^2 + b + 7$ et $7a - b^2 < 7a < ab^2 + b + 7$. Donc, $b^2 - 7a = 0$. Il suit $b = 7k$ et $a = 7k^2$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.

Vérifions maintenant les solutions de la forme $(a, b) = (7k^2, 7k)$: on a $a^2b + a + b = 7^3k^5 + 7k^2 + 7k = k(7k^2 \cdot (7k)^2 + 7k + 7) = k(ab^2 + b + 7)$.

Ainsi, les solutions sont exactement de la forme $(a, b) = (7k^2, 7k)$ avec $k \in \mathbb{N}^*$

Solution de l'exercice 9

On peut trouver la solution sur le lien `https://www.imo-official.org/problems/IMO2021SL.pdf` page 68.

Solution de l'exercice 10

Soit $(n, k) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2$ une éventuelle solution. Au vu de la forme du membre de gauche, il semble naturel de commencer par comparer les valuations 2-adique.

- A gauche, elle vaut $0 + 1 + 2 + \ldots + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2}$.
- A droite, par la formule de Legendre, elle vaut $\displaystyle\sum_{p\geq 1} \lfloor \frac{k}{2^p} \rfloor < \sum_{p\geq 1} \frac{k}{2^p} = k$.

Ainsi, $k \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2}$ donc $k! \geq \left(1 + \frac{n(n-1)}{2}\right)!$: mais on se rend compte que $\left(1 + \frac{n(n-1)}{2}\right)!$ est en général bien plus grand que le terme de gauche : en effet, pour $n \geq 4$ on a :

$$\begin{aligned} 2^{n^2} = \prod_{i=0}^{n-1} 2^n \geq \prod_{i=0}^{n-1} (2^n - 2^i) \text{ et } \left(\frac{n(n-1)}{2} + 1\right)! \\ = 5! \cdot \prod_{i=6}^{1+\frac{n(n-1)}{2}} i \geq 120 \cdot 6^{\frac{n(n-1)}{2}-4} = 20 \cdot 6^{\frac{n(n-1)}{2}-3} = 20\left(\sqrt{6}\right)^{n^2-n-6} \end{aligned}$$

Donc le terme de gauche de l'équation est plutôt "de l'ordre de 2^{n^2}" tandis que $\frac{n(n-1)}{2}$ est "au moins de l'ordre de $\left(\sqrt{6}\right)^{n^2}$" et on sait que $\sqrt{6} > 2$.

• Il s'agit à présent de démontrer rigoureusement cette intuition. Si on connaît la fonction $\ln$ c'est assez rapide : il suffit pour mettre en défaut l'inégalité que n soit à l'extérieur des racines du trinôme :

$$\ln\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)X^2 - \ln\left(\sqrt{6}\right)X - 6\ln\left(\sqrt{6}\right) + \ln(20)$$

L'une des racines est négative vu que $\left(\sqrt{6}\right)^6 = 6^3 > 6^2 = 36 > 20$.

De plus, $\frac{20(\sqrt{6})^{49-7-6}}{2^{49}} = \frac{5\cdot 3^{18}}{2^{29}} = \frac{5}{4} \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^9 > 1$ donc en évaluant en 7 et en passant à l'exponentielle, le trinôme a une valeur strictement supérieure à 1, on en déduit que sa plus grande racine est strictement inférieure à 7. En particulier, pour tout $n \geq 7$, l'inégalité est mise en défaut.

• Sinon, c'est un peu plus long mais comme la factorielle croît "plus vite" que la puissance de 2 ici, on montre que leur rapport est croissant en remarquant que pour tout $m \geq 4$ on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\left(1 + \frac{(m+1)\cdot m}{2}\right)!}{2^{(m+1)^2}} &= \frac{\left(1 + \frac{m(m-1)}{2}\right)!}{2^{m^2}} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m}\left(i + 1 + \frac{m(m-1)}{2}\right)}{2^{2m+1}} \\
&= \frac{\left(1 + \frac{m(m-1)}{2}\right)!}{2^{m^2}} \cdot \prod_{i=1}^{m-1} \frac{\left(i + 1 + \frac{m(m-1)}{2}\right)}{2^2} \cdot \frac{\left(1 + \frac{m(m+1)}{2}\right)}{2^3} \\
&\geq \frac{\left(1 + \frac{m(m-1)}{2}\right)!}{2^{m^2}} \cdot \prod_{i=1}^{m-1} \frac{2+6}{4} \cdot \frac{11}{8} > \frac{\left(1 + \frac{m(m-1)}{2}\right)!}{2^{m^2}}
\end{aligned}$$

Mais comme pour $m = 5$, on a $\frac{m(m-1)}{2} = 11$ et $v_2(11!) = 5 + 2 + 1 = 8$ et $v_3(11!) = 3 + 1 = 4$ et $v_5(11!) = 2$ par la formule de Legendre, on a :

$$\frac{11!}{2^{25}} = \frac{2^8 \cdot 11 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7}{2^{25}} = \frac{33 \cdot 135 \cdot 35}{2^{17}} > \frac{2^5 \cdot 2^7 \cdot 2^5}{2^{17}} > 1$$

Ainsi, pour tout $m \geq 5$ on a $\dfrac{\left(1 + \frac{m(m-1)}{2}\right)!}{\prod_{i=0}^{m-1}(2^m - 2^i)} > \dfrac{\left(1 + \frac{m(m-1)}{2}\right)!}{2^{m^2}} > 1$: nécessairement $n < 5$.

Il ne reste donc plus qu'à traiter les 4 cas restants :

• Pour $n = 1$, on a nécessairement $k = 1$, ce qui fournit effectivement un couple solution.

• Pour $n = 2$, on a nécessairement $k = 3$, ce qui fournit également un couple solution.

• Pour $n = 3$, on a $k! = 7 \cdot 6 \cdot 4 = 168$, absurde car $120 = 5! < k! < 6! = 720$.

• Pour $n = 4$, on a $k! = 15 \cdot 14 \cdot 12 \cdot 8 = 7 \cdot 5 \cdot 3^2 \cdot 2^6 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 4 = 4 \cdot 7!$, absurde car $7! < k! < 8!$.

Si jamais on a fait la solution (rapide) avec le $\ln$, on doit encore tester $n = 5$ et $n = 6$:

• Pour $n = 5$, on a $31 = 2^n - 1 \mid k!$ donc $k \geq 31$. C'est absurde car $31 \cdot 30 \cdot 28 \cdot 24 \cdot 16 < 31!$.

• Si $n = 6$, on a $31 = \frac{2^n - 2}{2} \mid k!$ donc $k \geq 31$, impossible car $k! \geq 31! > 31\cdot 30\cdot 28\cdot 24\cdot 21\cdot 16\cdot 12\cdot 8$ vu que $63\cdot 62\cdot 60\cdot 56\cdot 48\cdot 32 = (3\cdot 21)\cdot(2\cdot 31)\cdot(2\cdot 30)\cdot(2\cdot 28)\cdot(2\cdot 24)\cdot(2\cdot 16) = 31\cdot 30\cdot 28\cdot 24\cdot 21\cdot 16\cdot 12\cdot 8$.

Finalement, les deux solutions sont donc $(1, 1)$ et $(2, 3)$.

On peut également trouver une solution sur le lien https://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2019/08/PolycopieV1-1.pdf#subsection.4.1.1. La solution officielle se trouve sur le lien https://www.imo-official.org/problems/IMO2019SL.pdf page 84.

Solution de l'exercice 11
Soit $(a,b,p) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^3$ une éventuelle solution.

Comme $p \geq 2$, on a $a^p > 1$ donc $a > 1$. Soit q un diviseur premier de a.

On a la propriété suivante : si $q \leq b$, alors $q \mid a^p - b! = p$ donc $q = p$.

On en déduit que si $b < p$, alors nécessairement $q > b$. Mais alors, comme $q \mid a$, on a $a \geq q > b$ donc en développant à l'aide du binôme de Newton, comme $p \geq 2$:

$$b! + p = a^p \geq (b+1)^p > b^p + pb^{p-1} \geq b^b + p \text{ donc } \prod_{k=1}^{b} b = b^b < b! = \prod_{k=1}^{b} k \leq \prod_{k=1}^{b} b, \text{ absurde !}$$

On peut donc conclure que $b \geq p$. En particulier, tout diviseur premier de a est supérieur ou égal à p. De plus, $p \mid b! + p = a^p$ donc $p \mid a$.

Si $b \geq 2p$, alors $(2p)! \mid b!$ donc $p^2 \mid a^p - b! = p$, contradiction ! Ainsi, $b < 2p$.

Par l'inégalité arithmético-géométrique, on a donc (avec la convention que le produit vide vaut 0 si $p = 2$) :

$$\begin{aligned} a^p = b! + p \leq p + (2p-1)! &= p\big(1 + (p+1)(p-1)\prod_{k=1}^{p-2} k(2p-k)\big) \\ &\leq p\big(1 + (p^2-1)\prod_{k=1}^{p-2} p^2\big) \leq p \cdot p^2 \prod_{k=1}^{p-2} p^2 = p^{2p-1} < p^{2p} \end{aligned}$$

Donc $a < p^2$. Ainsi, l'entier $\frac{a}{p}$ vérifie $\frac{a}{p} < p$. Comme tous ses diviseurs premiers éventuels seraient des diviseurs premiers de a donc seraient supérieurs ou égaux à p, nécessairement $\frac{a}{p} = 1$ soit $a = p$.

Ainsi, $b! = p^p - p = p\big(p^{p-1} - 1\big)$. On remarque que $p = 2$ fournit la solution $(2,2,2)$. Supposons désormais p impair et notons $c = v_2(p-1)$. Par LTE, on a $v_2(b!) = v_2\big(p^{p-1} - 1\big) = v_2(p^2 - 1) + v_2\big(\frac{p-1}{2}\big)$.

Preuve de LTE : Pour démontrer ce résultat on factorise et on obtient :

$$v_2\big(p^{p-1}-1\big)=v_2\Big(\big(p^{\frac{p-1}{2^{c-1}}}-1\big)\prod_{k=1}^{c-1}\big(p^{\frac{p-1}{2^k}}+1\big)\Big)=v_2\big(p^{\frac{p-1}{2^c}}-1\big)+v_2\big(p^{\frac{p-1}{2^c}}+1\big)+c-1$$

En effet, pour tout $1\leq k<c$, on a $p^{\frac{p-1}{2^k}}+1=\big(p^{\frac{p-1}{2^{k+1}}}\big)^2+1\equiv 1+1\equiv 2[4]$ car p est impair.
Supposons $p\equiv 1[4]$ (on traite de même le cas $p\equiv -1[4]$).
On a $p^{\frac{p-1}{2^c}}+1\equiv(-1)^{\frac{p-1}{2^c}}+1\equiv 2[4]$ (respectivement $p^{\frac{p-1}{2^c}}-1\equiv(-1)^{\frac{p-1}{2^c}}-1\equiv -2[4]$).
De plus, $p^{\frac{p-1}{2^c}}+1=(p+1)\displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2^c}-1}(-1)^kp^{\frac{p-1}{2^c}-1-k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2^c}-1}(-1)^kp^{\frac{p-1}{2^c}-1-k}\equiv\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2^c}-1}1\equiv\frac{p-1}{2^c}\neq 0[2]$.
(Respectivement $p^{\frac{p-1}{2^c}}-1=(p-1)\displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2^c}-1}p^k$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2^c}-1}p^k\equiv\sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2^c}-1}1\equiv\frac{p-1}{2^c}\neq 0[2]$.)
Ainsi, on a bien $v_2\big(p^{p-1}-1\big)=v_2(p\pm 1)+1+c-1=v_2(p\pm 1)+v_2(p\mp 1)+v_2(p-1)-1=v_2(p^2-1)+v_2\big(\frac{p-1}{2}\big)$.

Si $p\geq 11$, alors $2<4<\frac{p-1}{2}<\frac{p+1}{2}<p-1$ donc comme $b\geq p$ donc $p!\mid b!$, on a :

$$\begin{aligned}v_2(p+1)+v_2(p-1)+v_2\big(\frac{p-1}{2}\big)&=v_2(b!)\geq v_2(p!)=\sum_{k=1}^{p}v_2(k)\\&\geq v_2(p-1)+v_2\big(\frac{p+1}{2}\big)+v_2\big(\frac{p-1}{2}\big)+v_2(4)+v_2(2)\end{aligned}$$

C'est absurde car $v_2(4)>0$.
Il ne reste donc plus qu'à tester si $p\in\{3;5;7\}$ conduisent à des solutions :
• Si $p=3$, on obtient $b=4$, ce qui fournit bien une solution.
• Si $p=5$, on obtient $b!=3120$ donc $6!=720<b!<5040=7!$, impossible.
• Si $p=7$, on obtient $b!=7^7-7=7(7^3-1)(7^3+1)=7\cdot 342\cdot 344$ qui n'est pas divisible par 5, c'est impossible car on sait que $b\geq p=7\geq 5$.
Finalement, les solutions du problème sont les triplets $(2,2,2)$ et $(3,4,3)$.

6 Chasse aux rapports (Martin)

Le but de ce TD est de se familiariser avec la méthode dite de la chasse aux rapports. Tout comme la chasse aux angles, la chasse aux rapports consiste à combiner plusieurs égalités de rapports pour en obtenir de nouvelles.

On rappelle les théorèmes produisant ou produits par des égalités de rapports :

- Le théorème de Thalès qui donne une équivalence entre une égalité de rapport et des droites parallèles.
- La puissance d'un point qui donne une équivalence entre une égalité de rapport et des points cocycliques.
- La réciproque du théorème de Thalès qui permet, à partir d'une égalité de rapports, d'obtenir un parallélisme ou même (et ça on y pense moins) un alignement de trois points.

Exercices

Les exercices aui suivent utilisent le uniquement le théorème de Thalès, la notion de triangle semblable et la puissance d'un point par rapport à un cercle.

Exercice 1
(Sharygin 2011) Soit $ABCD$ un trapèze dans lequel (AD) et (BC) sont parallèles. Soit O le point d'intersection des diagonales (AC) et (BD). Soit M un point du segment $[CD]$. La parallèle à (BD) passant par M coupe le segment $[BC]$ en P. La parallèle à (AC) passant par M coupe le segment $[AD]$ en Q. Montrer que les points P, O et Q sont alignés.

Exercice 2
(Iran MO 2018 Round 3) Soit ABC un triangle et soient D, E et F les points de contact du cercle inscrit respectivement avec les côtés $[BC], [CA]$ et $[AB]$. Soit P un point tel que $PF = FB$, les droites (FP) et (AC) sont parallèles et les points P et C sont dans le même demi-plan délimité par la droite (AB). Soit Q un point tel que $QE = EC$, les droites (EQ) et (AB) sont parallèles et les points Q et B sont dans le même demi-plan délimité par la droite (AC). Montrer que les points P, D et Q sont alignés.

Exercice 3
(British MO 2011 round 2) Soit ABC un triangle et X un point situé à l'intérieur du triangle ABC. Les droites $(AX), (BX)$ et (CX) recoupent le cercle circonscrit au triangle ABC respectivement en les points P, Q et R. Soit U un point appartenant au segment $[PX]$. Les parallèles aux droites $(AB), (AC)$ passant par U coupent respectivement les droites (XQ) et (XR) en les points V et W. Montrer que les points R, W, V et Q sont cocycliques.

Exercice 4
(British MO 2012/2013 Round 1) Soit ABC un triangle. Soit $\mathcal{C}_B$ le cercle passant par B et tangent au segment $[AC]$ en A et soit $\mathcal{C}_C$ le cercle passant par C et tangent au segment $[AB]$ en A. Les cercles $\mathcal{C}_B$ et $\mathcal{C}_C$ se recoupent au point D. La droite (AD) recoupe le cercle circonscrit au triangle ABC au point E. Montrer que D est le milieu du segment $[AE]$.

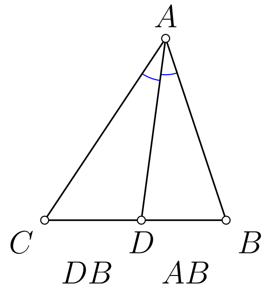
Exercice 5
Soit $ABCD$ un quadrilatère inscrit dans un cercle Γ. La parallèle à (BC) passant par D coupe (AC) en P, (AB) en Q et recoupe Γ en R. La parallèle à (AB) passant par D coupe (AC) en S, (BC) en T et recoupe Γ en U. Montrer que $\dfrac{ST}{TU} = \dfrac{QR}{PQ}$.

Exercice 6
(Iran MO 2015 Round 3) Soit $ABCD$ un trapèze dans lequel les droites (AB) et (CD) sont parallèles. Soit E un point appartenant au segment $[AC]$. La parallèle à la droite (BE) passant par C coupe la droite (BD) en F. Montrer que le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles ABF et BED appartient à la droite (AC).

Exercice 7
(RMM SL 2017 G1) Soit $ABCD$ un trapèze dans lequel les droites (AD) et (BC) sont parallèles. Soient E un point sur le segment $[AB]$ et F un point sur le segment $[DC]$. Soit A_1 le point d'intersection, autre que A, de la droite (AD) avec le cercle circonscrit au triangle AEF. Soit C_1 le point d'intersection, autre que C, de la droite (BC) avec le cercle circonscrit au triangle CEF. Montrer que les droites $(BD), (EF)$ et (A_1C_1) sont concourantes.

Les exercices suivant utilisent le théorème de la bissectrice, qui s'énoncé comme suit :

Théorème 1. Soit ABC un triangle et D le pied de la bissectrice issue de l'angle en A. Alors $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BD}{CD}$.



$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

Exercice 8
Soit ABC un triangle et D le pied de la bissectrice issue du sommet A. Le cercle circonscrit au triangle ACD recoupe le segment $[AB]$ en E et le cercle circonscrit au triangle ABD recoupe le segment $[AC]$ en F. Montrer que $EB = CF$.

Exercice 9
Soit ABC un triangle et I le centre du cercle inscrit. Soient D, E et F les points de contact du cercle inscrit respectivement avec les segments $[BC], [CA]$ et $[AB]$. Soit X le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangle ABC et AEF. Montrer que $\widehat{BXD} = \widehat{CXD}$.

Exercice 10
(British MO 2016/2017 round 2) Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique dans lequel $AB < CD$, P le point d'intersection des diagonales (AC) et (BD) et Q le point d'intersection des droites (AD) et (BC). La bissectrice de l'angle $\widehat{AQB}$ coupe $[AC]$ en R et la bissectrice de l'angle $\widehat{APD}$ coupe (AD) en S. Montrer que les droites (RS) et (CD) sont parallèles.

Exercice 11
(France TST 2021/2022) Soit $ABCD$ un parallélogramme. La bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{BAC}$ coupe le segment $[BC]$ en E tandis que sa bissectrice extérieure coupe la droite (CD) en F. Soit M le milieu du segment $[AE]$. Montrer que les droites (EF) et (BM) sont parallèles.

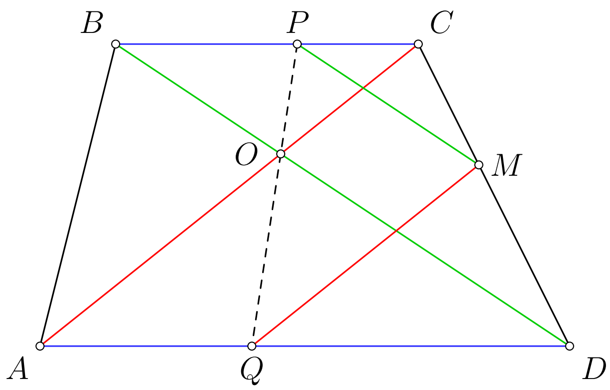
Exercice 12
Soit ABC un triangle, soit D un point du segment $[AC]$ tel que $BD = DC$. Une droite parallèle à la droite (BD) coupe le segment $[BC]$ en le point E et coupe la droite (AB) en le point F. Soit G le point d'intersection des droites (AE) et (BD). Montrer que les angles $\widehat{BCG}$ et $\widehat{BCF}$ ont même amplitude.

Exercice 13
(IMO 2003 P4) Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique. Les projetés orthogonaux de D sur les droites $(BC), (CA)$ et (AB) sont notés respectivement P, Q et R. Montrer que $PQ = QR$ si et seulement si les bissectrices des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$ se coupent sur le segment $[AC]$.

Solutions

Exercice 1
(Sharygin 2011) Soit $ABCD$ un trapèze dans lequel (AD) et (BC) sont parallèles. Soit O le point d'intersection des diagonales (AC) et (BD). Soit M un point du segment $[CD]$. La parallèle à (BD) passant par M coupe le segment $[BC]$ en P. La parallèle à (AC) passant par M coupe le segment $[AD]$ en Q. Montrer que les points P, O et Q sont alignés.

Solution de l'exercice 1



Il suffit de montrer que $\frac{AQ}{AO} = \frac{CP}{CO}$.

On a trois paires de droites parallèles, dont on écrit les égalités de rapports de Thalès :

$$\frac{CM}{CP} = \frac{CD}{CB}$$

$$\frac{AQ}{CM} = \frac{AD}{CD}$$

$$\frac{BC}{AD} = \frac{CO}{AO}$$

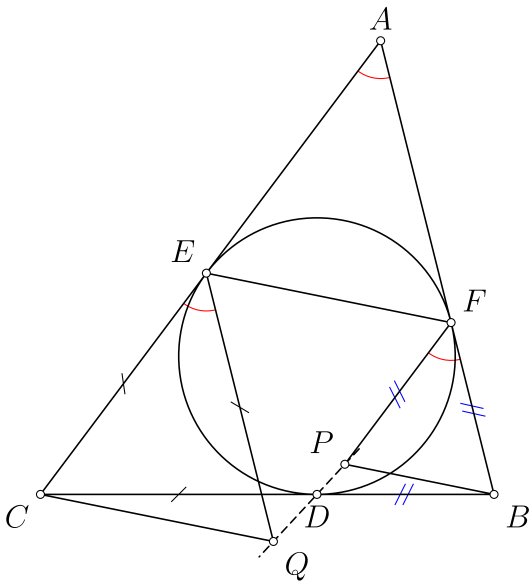
En combinant ces trois égalités, on obtient :

$$\frac{AQ}{CP} = \frac{AQ}{CM} \cdot \frac{CM}{CP} = \frac{AD}{CD} \cdot \frac{CD}{BC} = \frac{AD}{BC} = \frac{AO}{CO}$$

ce qui est l'égalité voulue.

Exercice 2
(Iran MO 2018 Round 3) Soit ABC un triangle et soient D, E et F les points de contact du cercle inscrit respectivement avec les côtés $[BC], [CA]$ et $[AB]$. Soit P un point tel que $PF = FB$, les droites (FP) et (AC) sont parallèles et les points P et C sont dans le même demi-plan délimité par la droite (AB). Soit Q un point tel que $QE = EC$, les droites (EQ) et (AB) sont parallèles et les points Q et B sont dans le même demi-plan délimité par la droite (AC). Montrer que les points P, D et Q sont alignés.

Solution de l'exercice 2



Le triangle PFB est isocèle en F et $\widehat{PFB} = \widehat{EAF}$ car les droites (FP) et (AC) sont parallèles. Donc les triangles AEF et PFB sont semblables. De même, on trouve que les triangles QEC, EAF et FPB sont semblables. On déduit que $\widehat{PBF} = 90° - \frac{1}{2}\widehat{BAC} = \widehat{QCE}$

Passons maintenant à l'exercice. Il n'y a pas d'angles en vue pour relier les points P, D et Q, on va donc procéder à l'aide de la réciproque du théorème de Thalès. Pour cela, il nous faut des droites parallèles. Les droites (BP) et (CQ) semblent de bonnes candidates pour cela.

Par chasse aux angles, on a en effet :

$$\widehat{PBC} = \widehat{CBA} - \widehat{PBF} = \widehat{CBA} - 90° + \frac{1}{2}\widehat{BAC} = -\widehat{BCA} + 90° - \frac{1}{2}\widehat{BAC} = \widehat{QCE} - \widehat{BCA} = \widehat{QCB}$$

donc les droites (PB) et (CQ) sont parallèles. Pour conclure, il nous faudrait montrer que $\frac{PB}{CQ} = \frac{BD}{CD}$, puisque cela implique bien, par la réciproque du théorème de Thalès, que les points P, D et Q sont alignés.

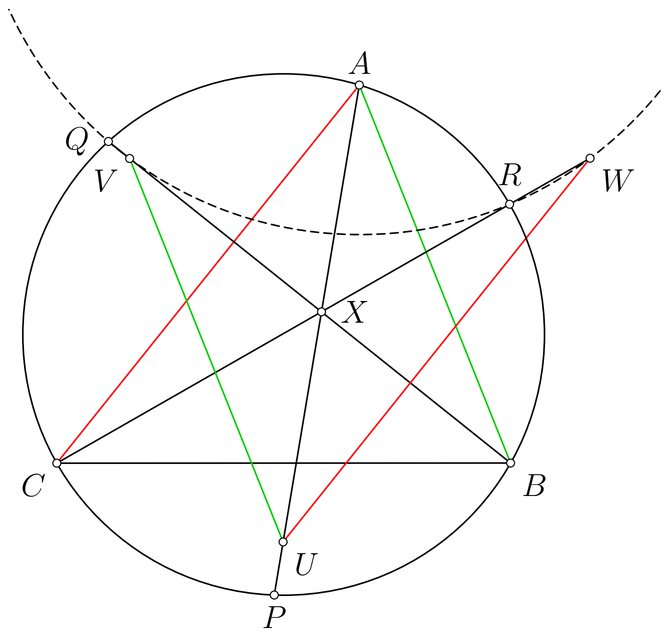
Or on a

$$\frac{PB}{CQ} \underset{\Delta PBF \simeq \Delta QCE}{=} \frac{BF}{CE} \underset{BF=BD}{=} \frac{BD}{CE} \underset{CE=CD}{=} \frac{BD}{CD}$$

où, dans les deux dernières égalités, on a utilisé les propriétés des points de contact du cercle inscrit avec les côtés de ABC. On a l'égalité de rapport voulue, donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, les points P, Q et D sont bien alignés.

Exercice 3
(British MO 2011 round 2) Soit ABC un triangle et X un point situé à l'intérieur du triangle ABC. Les droites $(AX), (BX)$ et (CX) recoupent le cercle circonscrit au triangle ABC respectivement en les points P, Q et R. Soit U un point appartenant au segment $[PX]$. Les parallèles aux droites $(AB), (AC)$ passant par U coupent respectivement les droites (XQ) et (XR) en les points V et W. Montrer que les points R, W, V et Q sont cocycliques.

Solution de l'exercice 3



Nous allons traduire les diverses hypothèses de l'énoncé en terme d'égalité de rapports ou d'égalités entre produits de longueurs, dans le but d'établir que $XQ \cdot XV = XR \cdot XW$, ce qui est équivalent par puissance d'un point au résultat voulu.

Tout d'abord, d'après le théorème de Thalès pour les paires de droites (AB) et (UV) puis (AC) et (UW), on a les égalités de rapports suivantes :

$$\frac{XV}{XB} = \frac{XU}{XA} = \frac{UV}{AB} \text{ et } \frac{XW}{XC} = \frac{XU}{XA} = \frac{UW}{AC}$$

On peut déjà en déduire que $\frac{XV}{XB} = \frac{XU}{XA} = \frac{XW}{XC}$, ce qui signifie que les droites (VW) et (BC) sont parallèles, d'après la réciproque du théorème de Thalès.

Il faut désormais "attraper" des relations sur les longueurs XQ et XR. Pour cela, on utilise la puissance d'un point pour obtenir que $XB \cdot XQ = XC \cdot XR$.

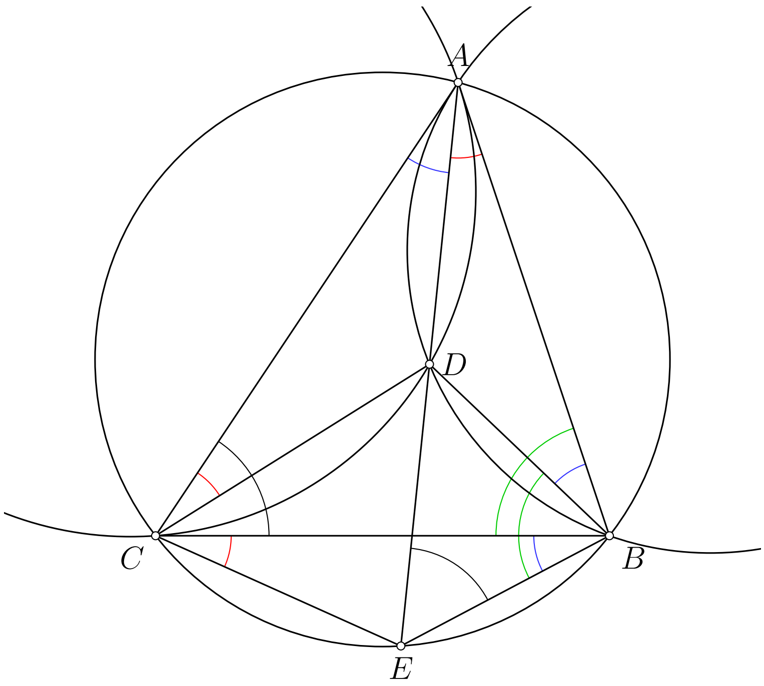
On peut désormais conclure. En effet :

$$XQ \cdot XV = \frac{XC \cdot XR}{XB} \cdot XV = XR \cdot \frac{XC}{XB} \cdot XV = XR \cdot XW$$

ce qui est l'égalité voulue.

Exercice 4
(British MO 2012/2013 Round 1) Soit ABC un triangle. Soit $\mathcal{C}_B$ le cercle passant par B et tangent au segment $[AC]$ en A et soit $\mathcal{C}_C$ le cercle passant par C et tangent au segment $[AB]$ en A. Les cercles $\mathcal{C}_B$ et $\mathcal{C}_C$ se recoupent au point D. La droite (AD) recoupe le cercle circonscrit au triangle ABC au point E. Montrer que D est le milieu du segment $[AE]$.

Solution de l'exercice 4



On traduit les hypothèses sous formes d'égalités d'angles. Ainsi, on observe que, par angle tangentiel pour $\mathcal{C}_B$ puis par angle inscrit dans le cercle (ABC) :

$$\widehat{DBA} = \widehat{CAD} = \widehat{CAE} = \widehat{CBE}$$

De même on obtient que $\widehat{BCE} = \widehat{DCA}$. Ainsi on a

$$\Delta DBA \simeq \Delta DAC \simeq EBC$$

D'autre part, puisque $\widehat{DBA} = \widehat{CBE}$, on a

$$\widehat{DBE} = \widehat{DBC} + \widehat{CBE} = \widehat{DBC} + \widehat{DBA} = \widehat{CBA}$$

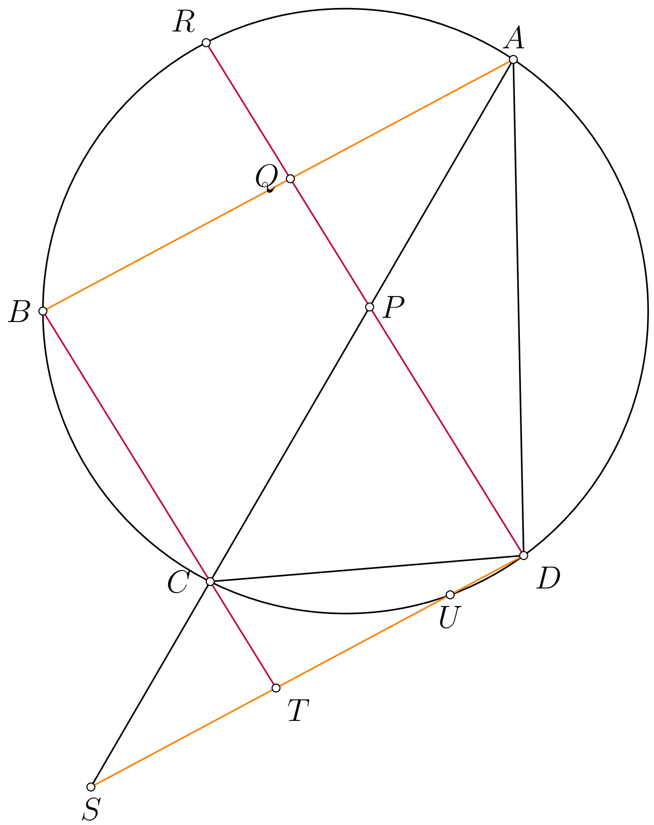
et par angle inscrit $\widehat{DEB} = \widehat{AEB} = \widehat{BCA}$. Ainsi on a $\Delta DBE \simeq \Delta ABC$. On a alors toutes les égalités de rapports qu'il faut pour conclure :

$$DA \underset{\Delta DBA \simeq \Delta DAC}{=} DB \cdot \frac{AB}{AC} \underset{\Delta DBE \simeq \Delta ABC}{=} DE \cdot \frac{AC}{AB} \cdot \frac{AB}{AC} = DE$$

Exercice 5

Soit $ABCD$ un quadrilatère inscrit dans un cercle Γ. La parallèle à (BC) passant par D coupe (AC) en P, (AB) en Q et recoupe Γ en R. La parallèle à (AB) passant par D coupe (AC) en S, (BC) en T et recoupe Γ en U. Montrer que $\frac{ST}{TU} = \frac{QR}{PQ}$.

Solution de l'exercice 5



On traduit les différentes hypothèses sous formes d'égalités de longueurs, à l'aide du théorème de Thalès et de la puissance d'un point par rapport à un cercle.

Tout d'abord, le quadrilatère $QBTD$ possède des côtés parallèles deux à deux, il s'agit donc d'un parallélogramme, et l'on obtient que $BQ = DT$ et $QD = BT$.

Puisque les droites (BA) et (SD) sont parallèles, on a $\Delta STC \simeq \Delta ABC$. Puisque les droites (DR) et (BT) sont parallèles, on a $\Delta AQP \simeq \Delta ABC$, si bien que $\Delta AQP \simeq \Delta STC$.

Occupons nous des points R et U. La puissance d'un point par rapport à un cercle nous permet d'écrire

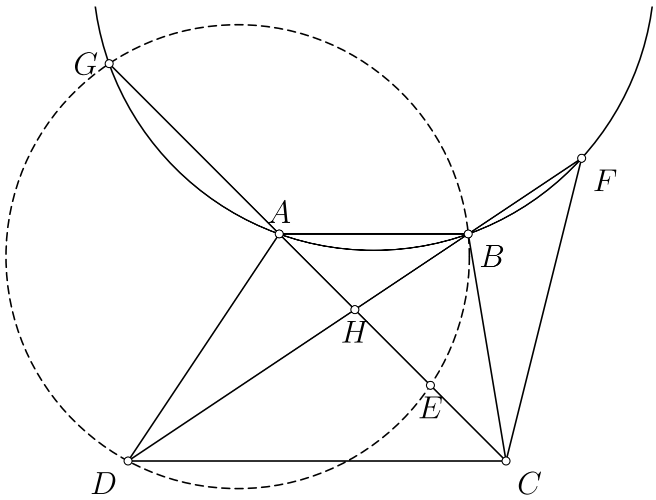
$$QD \cdot QR = QB \cdot QA \quad \text{et} \quad TD \cdot TU = TB \cdot TC$$

On a désormais tout ce qu'il nous faut pour faire le calcul, et l'on cherche à faire apparaître les rapports de longueurs que l'on a obtenus :

$$\frac{RQ}{PQ} = \frac{RQ}{AQ} \cdot \frac{AQ}{PQ} = \frac{BQ}{DQ} \cdot \frac{ST}{TC} = \frac{TD}{BT} \cdot \frac{ST}{TC} = \frac{TC}{TU} \cdot \frac{ST}{TC} = \frac{ST}{TU}$$

Exercice 6
(Iran MO 2015 Round 3) Soit $ABCD$ un trapèze dans lequel les droites (AB) et (CD) sont parallèles. Soit E un point appartenant au segment $[AC]$. La parallèle à la droite (BE) passant par C coupe la droite (BD) en F. Montrer que le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles ABF et BED appartient à la droite (AC).

Solution de l'exercice 6



La présence de nombreuses droites parallèes nous encourage à essyaer une chasse aux rapports et donc à utiliser la puissance d'un point.

Soit G le second point d'intersection de la droite (AC) avec le cercle circonscrit au triangle ABF. Plutôt que de montrer que deux cercles se coupent sur la droite (AC), nous allons montrer que le point G appartient au cercle circonscrit au triangle BED.

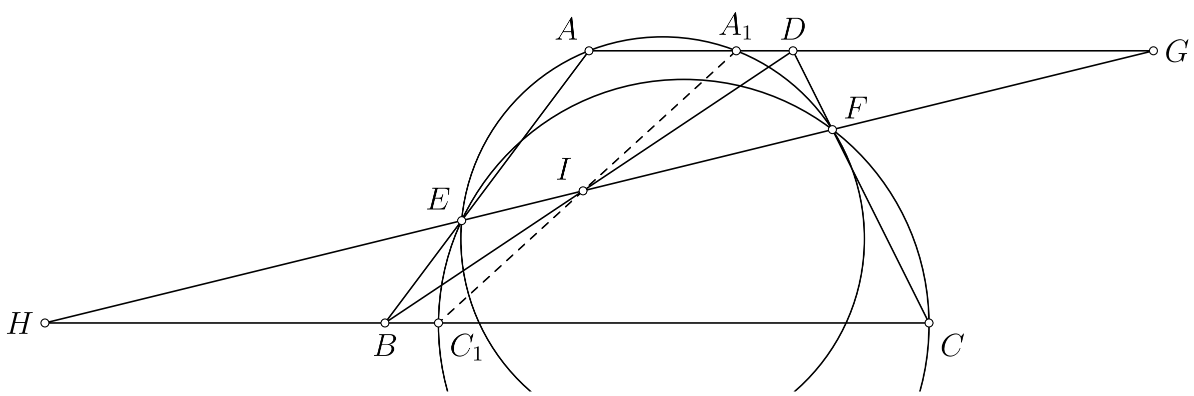
Soit H le point d'intersection des droites (AC) et (BD). D'après la puissance du point H par rapport au cercle circonscrit au triangle ABF, $HG \cdot HA = HB \cdot HF$. De plus le fait que les droites (BE) et (CF) soient parallèles se traduit, d'après le théorème de Thalès, par $HE \cdot HF = HB \cdot HC$. N'oublions par que les droites (AB) et (CD) sont parallèles, donc par le théorème de Thalès, on sait aussi que $\frac{HC}{HA} = \frac{HD}{HB}$. Nous avons désormais tous les outils pour démontrer que $HG \cdot HE = HB \cdot HD$:

$$HG \cdot HE = \frac{HB \cdot HF \cdot HE}{HA} = HB \cdot HB \cdot \frac{HC}{HA} = HB^2 \cdot \frac{HD}{HB} = HD \cdot HB$$

ce qui signifie, par la réciproque de la puissance d'un point, que les points G, B, E et F sont cocycliques.

Exercice 7
(RMM SL 2017 G1) Soit $ABCD$ un trapèze dans lequel les droites (AD) et (BC) sont parallèles. Soient E un point sur le segment $[AB]$ et F un point sur le segment $[DC]$. Soit A_1 le point d'intersection, autre que A, de la droite (AD) avec le cercle circonscrit au triangle AEF. Soit C_1 le point d'intersection, autre que C, de la droite (BC) avec le cercle circonscrit au triangle CEF. Montrer que les droites (BD), (EF) et (A_1C_1) sont concourantes.

Solution de l'exercice 7



On est invité à considérer les points d'intersection de la droite (EF) avec les deux droites parallèles. Ceci nous impose de distinguer deux cas :

Cas n°1 : La droite (EF) n'est pas parallèle à la droite (AD).

On introduit alors G le point d'intersection des droites (AD) et (EF) et H le point d'intersection des droites (BC) et (EF).

Pour montrer que les droites sont concourantes, on va introduire I le point d'intersection des droites (EF) et (BD) et nous allons montrer que les points I, A_1 et C_1 sont alignés à l'aide de la réciproque du théorème de Thalès. On cherche notamment à montrer que $\frac{HI}{HC_1} = \frac{GI}{GA_1}$.

Faisons donc l'état des différentes égalités de rapport dont on dispose déjà.

Tout d'abord, d'après le théorème de Thalès, on a

$$\frac{HB}{AG} = \frac{HE}{GE} = \frac{EB}{EA} \quad ; \quad \frac{HC}{DG} = \frac{HF}{GF} = \frac{FC}{FD} \quad ; \quad \frac{HB}{GD} = \frac{IH}{IG} = \frac{BI}{DI}$$

Ensuite, en utilisant la puissance d'un point dans les différents cercles, notamment pour le point H par rapport au cercle passant par C, E et F et pour le point G par rapport au cercle passant par A, E et F :

$$HC_1 \cdot HC = HE \cdot HF \quad ; \quad GA_1 \cdot GA = GF \cdot GE$$

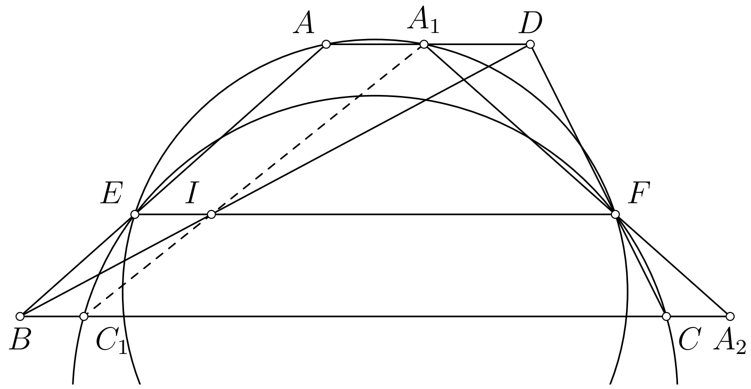
On peut désormais entamer notre chasse aux rapports, en cherchant à faire apparaître les diverses égalités établies :

$$\frac{HI}{HC_1} = \frac{HI}{BH} \cdot \frac{BH}{EH} \cdot \frac{EH}{HC_1} = \frac{GI}{GD} \cdot \frac{GA}{GE} \cdot \frac{HC}{HF} = \frac{GI}{GD} \cdot \frac{GA}{GE} \cdot \frac{HC}{HF} = \frac{GI}{GD} \cdot \frac{GA}{GE} \cdot \frac{GD}{GF} = \frac{GI}{GF} \cdot \frac{GA}{GE} = \frac{GI}{GF} \cdot \frac{GF}{GA_1} = \frac{GI}{GA}$$

ce qui est bien l'égalité de rapports voulue.

Cas n$^\circ 2$ **:** Les droites (EF) et (AD) sont parallèles.

Certains arguments très courts mais conceptuels permettent de couvrir ce cas particulier. Par exemple une phrase telle que "Le cas où les droites (EF) et (AD) s'obtient par continuité" pourrait suffir. C'est un bon exercice cependant de chercher une preuve "à la main" de ce cas particulier.



Le principe est le même que pour le cas général : on note I le point d'intersection des droites (BD) et (EF) et on désire montrer que $\dfrac{BC_1}{A_1D} = \dfrac{BI}{DI}$ afin d'appliquer la réciproque du théorème de Thalès et de conclure que le point I appartient à la droite (A_1C_1). Pour tirer parti de l'hypothèse supplémentaire que les droites (AD) et (EF) sont parallèles, il faut remarquer que les quadrilatères AA_1FE et $EFCC_1$ sont des trapèzes inscrits dans un cercle et donc isocèles. Les segments $[AA_1]$, $[EF]$ et $[CC_1]$ partagent donc la même médiatrice, qui constitue donc un axe de symétrie pour notre figure, que l'on va donc compléter.

On introduit le point A_2, point d'intersection des droites (A_1F) et (BC). La symétrie évoquée plus haut échange les droites (AE) et (A_1F), donc le point A_2 est le symétrique du point B par rapport à la médiatrice de $[CC_1]$, ce qui donne $BC_1 = CA_2$. Il suffit donc de montrer que $\dfrac{CA_2}{A_1D} = \dfrac{BI}{DI}$.

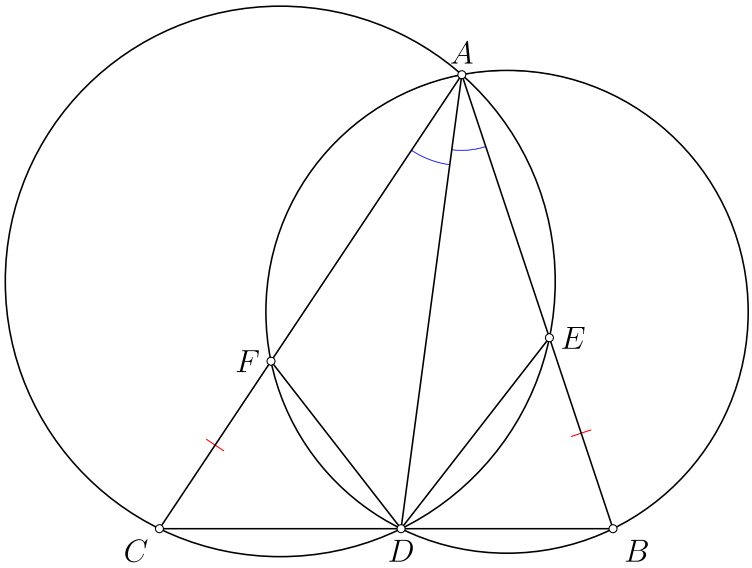
Or, d'après le théorème de Thalès, d'abord pour les paires de droites parallèles (BC) et (IF), puis pour les paires de droites parallèles (A_1D) et (CA_1), on a

$$\frac{BI}{DI} = \frac{FC}{FD} = \frac{CA_2}{DA_1}$$

qui est bien l'égalité voulue, et on l'on peut conclure aussi dans le cas où les droites (EF) et (BC) sont parallèles.

Exercice 8
Soit ABC un triangle et D le pied de la bissectrice issue du sommet A. Le cercle circonscrit au triangle ACD recoupe le segment $[AB]$ en E et le cercle circonscrit au triangle ABD recoupe le segment $[AC]$ en F. Montrer que $EB = CF$.

Solution de l'exercice 8



On présente une solution utilisant le théorème de la bissectrice. D'après la puissance du point B par rapport au cercle passant par A, F, D et C :

$$BD \cdot BC = BF \cdot BA$$

De même, d'après la puissance du point C par rapport au cercle passant par A, E, D et B :

$$CD \cdot CB = CE \cdot CA$$

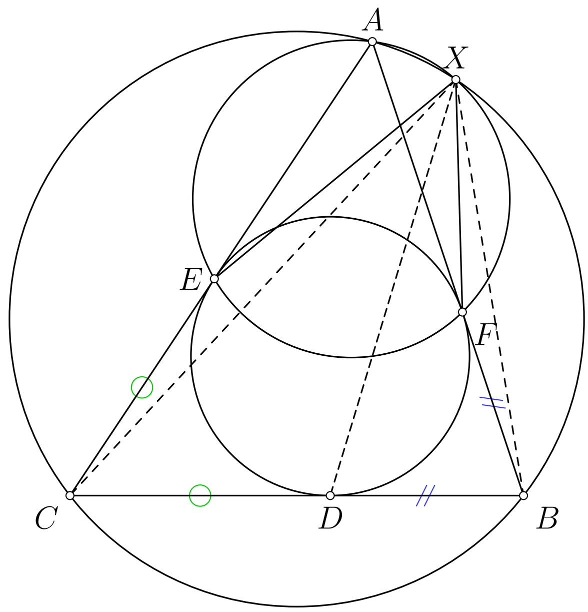
Ainsi :

$$\frac{CE}{BF} = \frac{CD}{CA} \cdot \frac{BA}{BD} = \frac{BA}{CA} \cdot \frac{CD}{BD} = 1$$

où la dernière égalité provient du théorème de la bissectrice.

Exercice 9
Soit ABC un triangle et I le centre du cercle inscrit. Soient D, E et F les points de contact du cercle inscrit respectivement avec les segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Soit X le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangle ABC et AEF. Montrer que $\widehat{BXD} = \widehat{CXD}$.

Solution de l'exercice 9



On va montrer que (XD) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BXC}$ en utilisant le théorème de la bissectrice.

Le point X est le centre de la similitude envoyant E sur X et F sur B. Ainsi

$$\frac{XB}{XC} = \frac{FB}{EC}$$

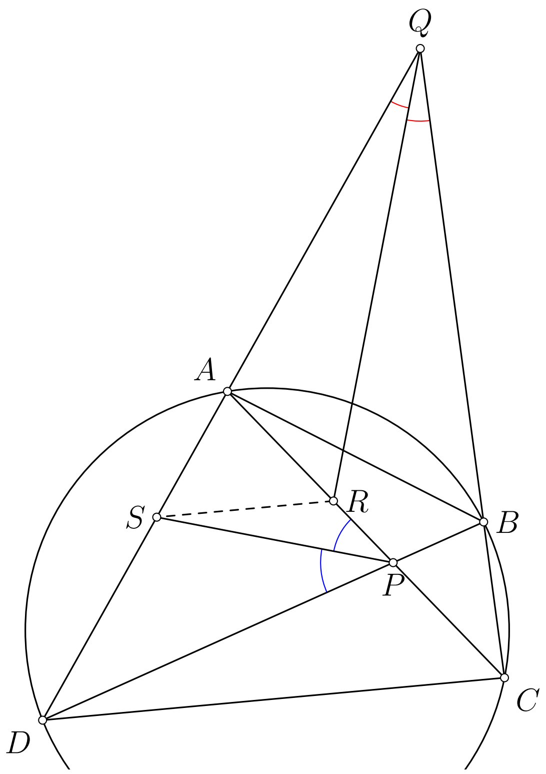
D'autre part, on a $BF = BD$ et $CD = CE$ puisque les côtés du triangle ABC sont tangents au cercle de centre I passant par D, E et F. On déduit que

$$\frac{XB}{XC} = \frac{FB}{EC} = \frac{DB}{DC}$$

et on peut bien conclure que D est le pied de la bissectrice issue du sommet X dans XBC par le théorème de la bissectrice.

Exercice 10
(British MO 2016/2017 round 2) Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique dans lequel $AB < CD$, P le point d'intersection des diagonales (AC) et (BD) et Q le point d'intersection des droites (AD) et (BC). La bissectrice de l'angle $\widehat{AQB}$ coupe $[AC]$ en R et la bissectrice de l'angle $\widehat{APD}$ coupe (AD) en S. Montrer que les droites (RS) et (CD) sont parallèles.

Solution de l'exercice 10



On procède par chasse aux rapports. On désire montrer une égalité de rapports pour appliquer le théorème de Thalès, encore faut-il choisir l'égalité à montrer. Pour cela, regardons les hypothèses à disposition. Le théorème de la bissectrice nous indique que

$$\frac{AS}{DS} = \frac{AP}{DP} \text{ et } \frac{AR}{CR} = \frac{AQ}{CQ}$$

On va donc chercher à montrer que $\frac{AS}{DS} = \frac{AR}{CR}$, puisque ces rapports sont déjà présents dans nos hypothèses. On vérifie que cela correspond bien au théorème de Thalès.

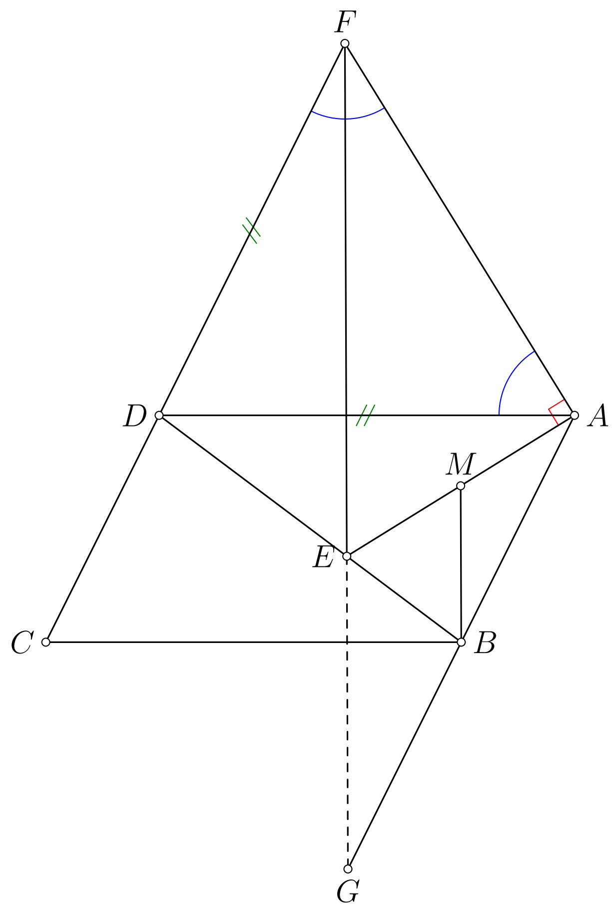
Pour récupérer les rapports $\frac{AP}{DP}$ et $\frac{AQ}{CQ}$, on utilise que les triangles QAB et QCD sont semblables, ainsi que les triangles PCD et PBA. En effet, on vérifie que $\widehat{AQB} = \widehat{DQC}$ et que $\widehat{ABQ} = 180° - \widehat{ABC} = \widehat{ADC} = \widehat{QDC}$, donc les triangles AQB et CQD sont semblables. De même, on vérifie que $\widehat{ABP} = \widehat{PCD}$ et que $\widehat{APB} = \widehat{CPD}$, de sorte que les triangles APB et DPC sont semblables. On a alors

$$\frac{AS}{DS} = \frac{AP}{DP} \underset{\Delta APB \simeq \Delta DPC}{=} \frac{AB}{DC} \underset{\Delta AQB \simeq \Delta CQD}{=} \frac{AQ}{CQ} = \frac{AR}{CR}$$

comme voulu.

Exercice 11
(France TST 2021/2022) Soit $ABCD$ un parallélogramme. La bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{BAC}$ coupe le segment $[BC]$ en E tandis que sa bissectrice extérieure coupe la droite (CD) en F. Soit M le milieu du segment $[AE]$. Montrer que les droites (EF) et (BM) sont parallèles.

Solution de l'exercice 11



Plusieurs solutions sont possibles, on en propose une qui utilise le théorème de la bissectrice. On renvoie au site de la POFM pour voir d'autres solutions.

Soit G le point d'intersection des droites (AB) et (EF). Il suffit de montrer que $GB = BA$. On aura alors que (MB) est une droite des milieux pour le triangle AEG et donc que les droites (EF) et (BM) sont parallèles.

Puisque les droites (AB) et (FD) sont parallèles, d'après le théorème de Thalès on a $\frac{EB}{ED} = \frac{BG}{DF}$. D'autre part, d'après le théorème de la bissectrice, on a $\frac{EB}{ED} = \frac{AB}{AD}$. On a donc $\frac{AB}{AD} = \frac{BG}{DF}$.

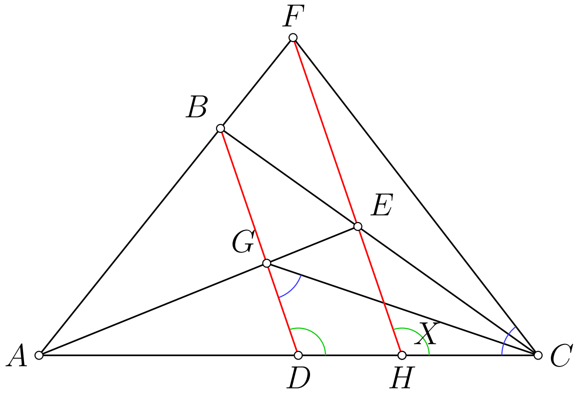
Si l'on veut que $AB = BG$, il suffit de montrer que $DF = AD$. Or, par angle correspondant, $\widehat{DFA} = 180° - \widehat{FAB}$. On utilise alors que (AF) est la bissectrice extérieure de $\widehat{DAB}$ pour voir que

$$180^\circ - \widehat{FAB} = 180^\circ - \left(90^\circ + \frac{1}{2}\widehat{DAB}\right) = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{DAB} = \widehat{DAF}$$

comme voulu.

Exercice 12
Soit ABC un triangle, soit D un point du segment $[AC]$ tel que $BD = DC$. Une droite parallèle à la droite (BD) coupe le segment $[BC]$ en le point E et coupe la droite (AB) en le point F. Soit G le point d'intersection des droites (AE) et (BD). Montrer que les angles $\widehat{BCG}$ et $\widehat{BCF}$ ont même amplitude.

Solution de l'exercice 12



On commence naturellement par une chasse aux angles. Notons que puisque $BD = DC$, on a $\widehat{DBC} = \widehat{DCB}$. Ainsi, d'une part

$$\widehat{BCF} = \widehat{FCA} - \widehat{BCD} = \widehat{FCA} - \widehat{DBC}$$

D'autre part, en essayer de faire intervenir les mêmes angles :

$$\widehat{BCG} = 180^\circ - \widehat{BGC} - \widehat{GBC} = \widehat{DGC} - \widehat{DBC}$$

Ainsi, pour montrer que $\widehat{BCG} = \widehat{BCF}$, il suffit de montrer que $\widehat{BGC} = \widehat{FCA}$.

Une chasse aux angles du même goût indique que d'une part (en utilisant que (FE) et (BG) sont parallèles :

$$\widehat{BCF} = 180^\circ - \widehat{FEC} - \widehat{EFC} = \widehat{BEF} - \widehat{EFC} = \widehat{DBC} - \widehat{EFC}$$

et d'autre part

$$\widehat{BCG} = \widehat{BCD} - \widehat{GCD} = \widehat{DBC} - \widehat{GCD}$$

et l'énoncé est encore équivalent au fait de montrer que $\widehat{GCD} = \widehat{EFC}$.

A ce stade, on introduit donc le point H, point d'intersection des droites (FE) et (AC). Nos calculs montrent qu'il suffit de montrer que les triangles GDC et CHF sont semblables. On a déjà que $\widehat{GDC} = \widehat{CHF}$ par parallélisme, et on a vu qu'il est sans espoir de montrer que une autre égalité d'angle sans résoudre d'abord l'exercice. On va donc montrer que les triangles sont semblables par chasse aux rapports. On désire montrer que $\dfrac{FH}{CH} = \dfrac{CD}{GD}$.

Cela est commode puisque l'on dispose de nombreuses égalités de rapports grâce à la paire de droites parallèles $((BD), (FH))$. Notamment, les triangles EHC et BDC sont semblables donc $EH = HC$. On a alors

$$\frac{FH \cdot GD}{CH \cdot CD} = \frac{FH \cdot GD}{EH \cdot BD} = \frac{FH}{BD} \cdot \frac{GD}{EH} \underset{(GD)||(EH)}{=} \frac{AD}{AH} \cdot \frac{GD}{EH} \underset{(BD)||(FH)}{=} \frac{AD}{AH} \cdot \frac{AH}{AD} = 1$$

ce qui est l'égalité de rapports voulue. Les triangles FHC et CDG sont donc semblables, ce qui permet de conclure l'exercice.

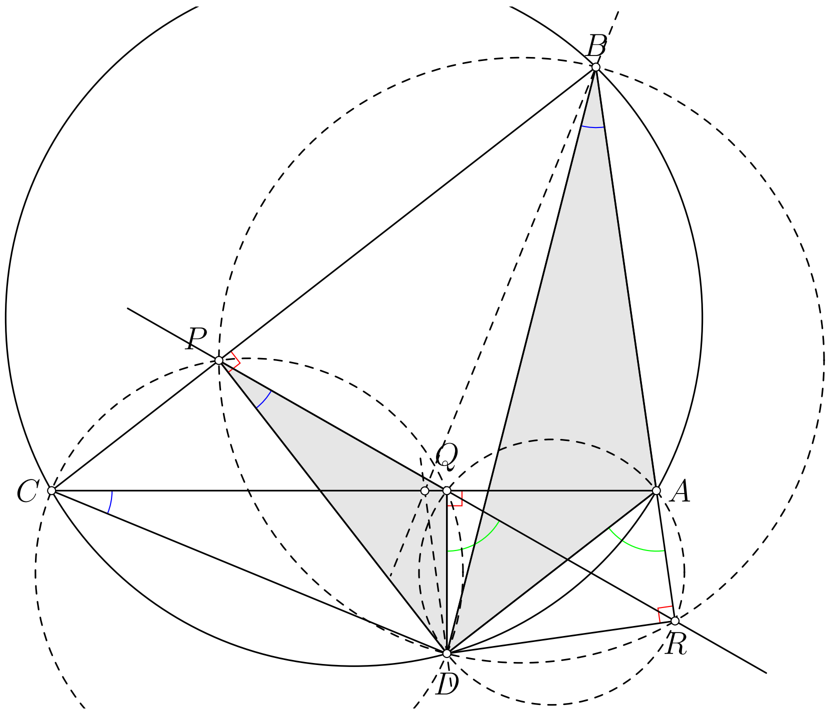
Remarque : Une autre façon de se ramener au fait que les triangles GDC et CHF sont semblables est d'utiliser le théorème de la bissectrice. Soit X le point d'intersection des droites (GC) et (FH). L'énoncé est équivalent à l'égalité $\dfrac{EX}{EF} = \dfrac{CX}{CF}$. Or on a

$$\frac{EX}{CX} \cdot \frac{CF}{EF} = \frac{BG}{CG} \cdot \frac{CF}{EF} = \frac{CG}{CF} \cdot \frac{AG}{AE} = \frac{CG}{CF} \cdot \frac{GD}{EH} = \frac{CG}{CF} \cdot \frac{GD}{HC}$$

Donc l'égalité $\dfrac{EX}{EF} = \dfrac{CX}{CF}$ est équivalente à l'égalité $\frac{CG}{CF} = \frac{HC}{GD}$, c'est-à-dire au fait que les triangles FHC et CDG sont semblables.

Exercice 13
(IMO 2003 P4) Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique. Les projetés orthogonaux de D sur les droites (BC), (CA) et (AB) sont notés respectivement P, Q et R. Montrer que $PQ = QR$ si et seulement si les bissectrices des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$ se coupent sur le segment $[AC]$.

Solution de l'exercice 13



L'énoncé indique que les points P, Q et R sont alignés sur la droite de Simson du point D pour le triangle ABC. Du fait des divers angles droits, les quadrilatères $CDQP$, $ARDQ$ et $PDRB$ sont cycliques. Observons quelques propriétés additionnelles :

Tout d'abord, par le théorème de l'angle inscrit dans le cercle $DPBR$, on a $\widehat{DPQ} = \widehat{DPR} = \widehat{DBR} = \widehat{DBA}$. Ensuite, d'après le théorème de l'angle inscrit dans le quadrilatère $DQAR$, on a $\widehat{DQR} = \widehat{DAR}$, ce qui implique

$$\widehat{PQD} = 180° - \widehat{DQR} = 180° - \widehat{DAR} = \widehat{DAB}$$

Ainsi, on a $\Delta DPQ \simeq \Delta DBA$. De la même façon, on a $\Delta DQR \simeq \Delta DCB$.
On déduit notamment que

$$\frac{PQ}{RQ} = \frac{PQ}{DQ} \cdot \frac{DQ}{RQ} = \frac{BA}{DA} \cdot \frac{DC}{BC}$$

On montre désormais l'équivalence voulue, par double implication.

On suppose que les bissectrices des angles $\widehat{CBA}$ et $\widehat{CDA}$ se coupent sur la droite (AC) et on note X ce point d'intersection. Alors d'après le théorème de la bissectrice :

$$\frac{CD}{AD} = \frac{CX}{AX} = \frac{CB}{AB}$$

si bien que $\frac{PQ}{RQ} = \frac{BA \cdot CD}{DA \cdot BC} = 1$ et $PQ = QR$.

Supposons maintenant que $PQ = QR$. Alors $\frac{BA \cdot CD}{DA \cdot BC} = \frac{PQ}{RQ} = 1$, si bien que $\frac{AB}{CB} = \frac{AD}{CD}$. Soit maintenant X_B le pied de la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ sur le segment $[AC]$ et X_D le pied de la bissectrice de l'angle $\widehat{ADC}$ sur le segment $[AC]$. D'après le théorème de la bissectrice, on a donc

$$\frac{AX_B}{CX_B} = \frac{AB}{CB} = \frac{AD}{CD} = \frac{AX_D}{CX_D}$$

et puisque X_B et X_D sont tous les deux à l'intérieur du segment $[AC]$, on trouve $X_B = X_D$ et les bissectrices se coupent bien sur le segment $[AC]$.

Remarque n$^\circ 1$ **:** Attention, ici il est bien nécessaire de procéder par double implication. On est dans un cas (rare) de la géométrie ou montrer une implication ne permet pas d'avoir l'équivalence en remontant le raisonnement. Il est nécessaire de détailler les deux étapes.

Remarque n$^\circ 2$ **:** La condition que les bissectrices de $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$ se coupent sur le segment $[AC]$ est équivalente au fait que D est sur la symmédiane issue du sommet A dans le triangle ABC.

2 Entraînement de mi-parcours

Énoncés

Exercice 1
Soit p un nombre premier. Montrer qu'il existe un entier naturel n tel que p divise $2022^n - n$.

Exercice 2
Soient (d_1) et (d_2) deux droites qui s'intersectent en un point X. Un cercle $\mathcal{C}$ passant par X recoupe (d_1) en A_1 et (d_2) en A_2. Un autre cercle $\mathcal{C}'$, passant par X mais non tangent à $\mathcal{C}$, recoupe (d_1) en B_1 et (d_2) en B_2. Les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ se recoupent en Y. On note M_1 et M_2 les milieux de $[A_1B_1]$ et de $[A_2B_2]$.
Montrer que X, Y, M_1 et M_2 sont cocycliques.

Exercice 3
Soient ABC un triangle, O le centre de son cercle circonscrit et I le centre de son cercle inscrit. On note E et F les projetés orthogonaux de I sur (AB) et (AC). On note T le point d'intersection de (EI) avec (OC) et Z le point d'intersection de (FI) avec (OB). On définit également S comme le point d'intersection des tangentes en B et C au cercle circonscrit à ABC.
Montrer que (SI) est perpendiculaire à (ZT).

Exercice 4
Soient a et b deux entiers strictement positifs tels que $a! + (a+b)!$ divise $a! \cdot (a+b)!$.
Montrer que $a \geq 2b + 1$.

Solutions

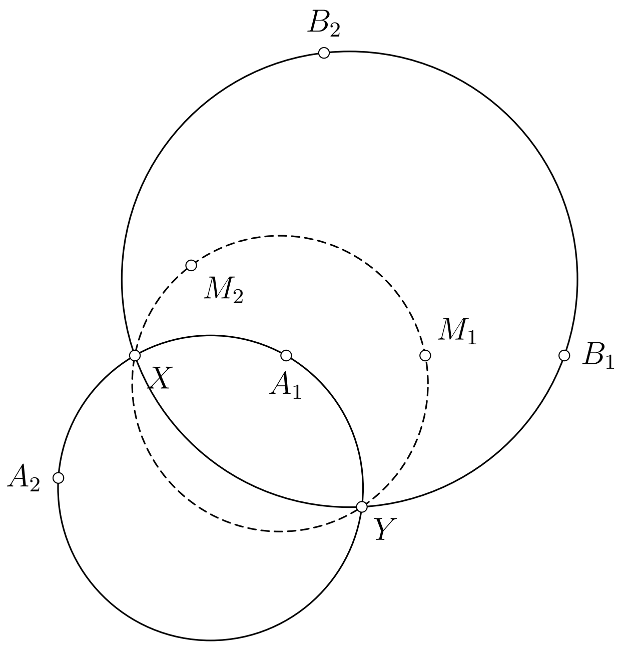
Solution de l'exercice 1
Si $p \mid 2022$, alors on peut choisir $n = 2022$.

Sinon, on sait que p et $p-1$ sont premiers entre eux donc par le théorème des restes chinois, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \equiv 1[p]$ et $n \equiv 0[p-1]$. Comme 2022 donc aucune de ses puissances n'est divisible par p, par le petit théorème de Fermat :

$$2022^n - n \equiv \left(2022^{\frac{n}{p-1}}\right)^{p-1} - 1 \equiv 1 - 1 \equiv 0[p] \text{ donc } p \mid 2022^n - n$$

Remarque : Dans le second cas, on peut aussi directement choisir $n = (p-1)^2$ qui vérifie les bonnes propriétés.

Solution de l'exercice 2
On reconnaît la construction du centre d'une similitude : le point Y est le centre de la similitude directe s qui envoie A_1 sur B_1 et A_2 sur B_2, mais aussi celui de la similitude directe s' qui envoie A_1 sur A_2 et B_1 sur B_2. La seconde est plus intéressante, car elle envoie aussi le milieu M_1 sur M_2. En appliquant la construction du centre d'une similitude aux quatre points A_1, A_2, M_1 et M_2, comme (A_1M_1) et (A_2M_2) se coupent en X, on trouve que X, Y, M_1 et M_2 sont bien cocycliques.



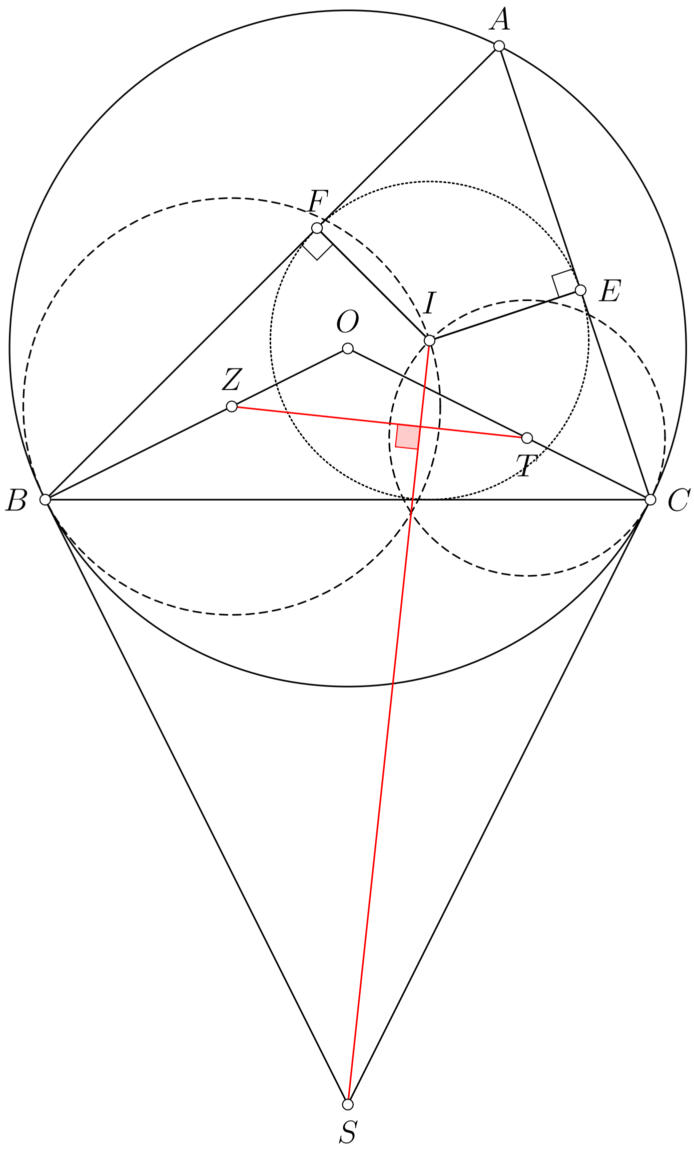
Solution de l'exercice 3
Notons $\alpha = \frac{1}{2}\widehat{BAC},\ \beta = \frac{1}{2}\widehat{ABC}$ et $\gamma = \widehat{ICA} = \frac{1}{2}\widehat{ACB} = 90 - \alpha - \beta$ et commençons par une chasse aux angles sur la figure pour comprendre le rôle des points Z et T :

$$\begin{aligned}
\widehat{TIC} &= \widehat{TIE} - \widehat{CIE} = (180 - \widehat{FIE}) - (90 - \widehat{ECI}) \text{ car } \widehat{IEC} = 90\\
&= \widehat{FAE} + \widehat{ACI} - 90 = 2\alpha + \gamma - 90 = \alpha - \beta \text{ car } \widehat{IEA} = \widehat{IFA} = 90\\
\text{et } \widehat{TCI} &= \widehat{TCE} - \widehat{ICE} = \widehat{OCA} - \widehat{ICA} = \frac{1}{2}\big(180 - \widehat{AOC}\big) - \gamma \text{ car } OCA \text{ est isocèle en } O\\
&= 90 - \widehat{ABC} - \gamma = 90 - 2\beta - \gamma = \alpha - \beta \text{ par le théorème de l'angle au centre.}
\end{aligned}$$

Ainsi, le triangle TIC est isocèle en T. De même, on vérifie que ZIB est isocèle en B.

Montrons à présent que $(ZT) \perp (SI)$ en utilisant les propriétés des axes radicaux. Comme I appartient aux deux cercles $\mathcal{C}_Z$ et $\mathcal{C}_T$ de centres Z et T et de rayons respectifs ZB et TC, il est sur l'axe radicale de ces deux cercles. Pour conclure, il suffit donc de démontrer que S se situe sur l'axe radical de $\mathcal{C}_T$ et $\mathcal{C}_Z$.

Pour cela, on remarque que $(SC) \perp (OC) = (TC)$ par définition donc (SC) est tangente à $\mathcal{C}_T$ en C. De même, (SB) est tangente à $\mathcal{C}_Z$ en B. Les droites (SB) et (SC) sont donc les axes radicaux du cercle circonscrit à ABC avec $\mathcal{C}_Z$ et $\mathcal{C}_T$ respectivement : S est donc le centre radical des trois cercle. En particulier, S appartient à l'axe radical de $\mathcal{C}_T$ et $\mathcal{C}_Z$ donc $(SI) \perp (ZT)$.



Solution de l'exercice 4

On a $a! + (a+b)! \mid a! \cdot (a+b)!$ donc en divisant par $a!$ on obtient avec le théorème de Gauss :

$$1 + \frac{(a+b)!}{a!} \mid (a+b)! = \frac{(a+b)!}{a!} \cdot a! \text{ donc } 1 + \frac{(a+b)!}{a!} \mid a!$$

En particulier,

$$a^b < (a+1)(a+2)\dots(a+b) < 1 + \frac{(a+b)!}{a!} \leq a! \leq a^a \text{ donc } a > b \text{ (nécessairement } a > 1)$$

Ainsi, $b! \mid a!$ donc par le théorème de Gauss :

$$1+b!\cdot\binom{a+b}{a} = 1+\frac{(a+b)!}{a!} \mid a! = b!\cdot a(a-1)\dots(b+1) \text{ donc } 1+b!\cdot\binom{a+b}{a} \mid a(a-1)\dots(b+1)$$

On en déduit que :

$$a^b < (a+1)(a+2)\dots(a+b) < 1 + \frac{(a+b)!}{a!} \leq a(a-1)\dots(b+1) \leq a^{a-b} \text{ donc } a-b > b$$

Ainsi, $a \geq 2b + 1$.

3 Deuxième partie : Algèbre & Combinatoire

1 Équations fonctionnelles (Raphael D.)

Commencer avec les équations fonctionnelles.

(cours repris des cours en ligne de 2020-2021)

Une équation fonctionnelle (E-F) est une équation dont l'inconnue est une fonction. Le but du jeu est en générale de retrouver la ou les fonctions possible à partir des informations de l'énoncé. Tout d'abord il faut savoir que l'espace des fonctions est extrèmement vaste et que l'ensemble des fonctions usuelles (polynomes, cos, sin...) ne forme qu'une infime partie.

Voici un exemple d'équation fonctionnelle : Trouver $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

$$f(x+y) = f(y) + x.$$

Pour une fonction, on dispose en réalité d'une infinité d'inconnue : pour chaque x, $f(x)$ est une inconnue. Par contre on dispose également ici d'une infinité d'équation. Dans notre exemple on sait par exemple que $f(5) = f(2) + 3$ ou que $f(2) = f(0) + 2$, etc...

Pour résoudre une équation fonctionnelle il faudra presque toujours raisonner par Analyse/Synthèse. l'analyse c'est collecter le plus d'informations possible sur la fonction en question et trouver la solution. Il est tout à fait possible qu'il existe plusieurs solutions (voir toute une famille de solutions). Si on pense qu'on effectivement trouver les solutions il faut alors faire la synthèse, c'est à dire vérifier que ces solutions fonctionnent.

Cependant il n'existe pas de méthode générale . Il s'agit avant tout de tatonnements, de choix astucieux dans les variables choisies, de prendre en considération des particularités de l'équation. Voici tout de même quelques conseil pour attaquer une E-F

1. Tester des solutions faciles par exemple $f(x) = c$ ou $f(x) = x$, peut-être un polynome.
2. Trouver des valeurs de la fonction en quelques points : que vaut $f(0)$ ou $f(1)$ par exemple ? Si on n'arrive pas à trouver ces valeurs peut-être qu'on peut les garder comme des inconnues et continuer de faire des calcules avec.
3. Regarder ce que donne l'équation si on fixer un paramêtre par exemple $x = 0$ ou $y = 0$ ou si on fait varier les plusieurs variable en même temps en posant par exemple $x = -y$. Il s'agit toujours de faire des choix astucieux. Par exemple pour une equation de la forme $f(x+2y) = ...$ peut-être est ce une bonne idée de choisir $x = -2y$ car alors on a $f(0) = ...$
4. Être malin.

Sur notre exemple $f(x+y) = f(y) + x.$:

1. On peut remarquer que la fonction $f(x) = x$ est solution. En effet $f(x+y) = x+y$ et $f(y) + x = x + y$.
2. Peut-on trouver $f(0)$? Si je choisit $x = 0$, $y = 0$ et cela donne

   $$f(0) = f(0) + 0 \Rightarrow f(0) = f(0).$$

   Rien d'intéressant, bon passons. Je n'ai pas réussit à trouver $f(0)$ mais je vais noter cette inconnue $f(0) = c$.

3. Fixons $y = 0$, on a

$$f(x+0) = f(0) + x = c + x \Rightarrow f(x) = x + c$$

J'en déduit que la fonction est de la forme $f(x) = x+c$. Très bien cela me semble suffisant et je pense que c'est la solution. Il faut maintenant faire la synthèse et vérifier que ces fonctions sont effectivements solutions.

Synthèse :

On suppose qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(t) = t + c$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. Alors

$$f(x+y) = (x+y) + c = y + c + x = f(y) + x$$

Conclusion les fonctions $f(x) = x + c$ sont bien solutions (et ce sont les seules).

Remarquer qu'ici on a trouvé toute une famille de solution. Par exemple $f(x) = x$ ou $f(x) = x + 1$ sont des solutions.

Fonctions injectives/surjectives/bijectives.

Définition 1.
On dit que $f : E \to F$ est *injective* si $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

Autrement dit, il n'existe pas deux points dont la fonction a la même valeur. Une autre définition possible est

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

Exemple : la $f(x) = x^3$ est injective. $f(x) = \frac{1}{x}$ injective. Mais la $f(x) = x^2$ n'est pas injective car $f(1) = 1 = f(-1)$

Définition 2.
On dit que la fonction $f : E \to F$ est surjective si pour $t \in F$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = t$.

Exemple : $f(x) = x+1$ est surjective, $f(x) = x^2$ n'est pas surjective car ne peut pas prendre de valeur négative.

Remarquer que la définition d'injective ou surjective dépend du domaine de définition E et du domaine d'arrivée F et non seulement de la formule de f.

Par exemple : $f : [0,1] \to [0,1]$ $f(x) = x$ est surjective. par contre $f : [0,1] \to [0,2], f(x) = x$. n'est pas surjective (il n'existe pas de x dans $[0,1]$ tel que $f(x) = 2$.). Un autre exemple $f : [0,1] \to [0,1]$ $f(x) = x^2$ est surjective. En effet pour tout $t \in [0,1]$ il existe $x = \sqrt{t} \in [0,1]$ tel que $x^2 = t$.

Encore un exemple : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$ elle n'est pas surjective ($\sin(x) = 2$ est impossible). Elle n'est pas injective non plus car $\sin(360) = \sin(0)$.

Définition 3.
On dit que f est bijective ssi f est à la fois injective et surjective.

Il y a une interprétation ces notions avec une équation. Considérons

$$f(x) = t.$$

1. Dire que f injective c'est la même chose que "Quel que soit t il existe au plus une seule solution à cette équation (unicité)".

2. Dire que f surjective c'est la même chose que "Quel que soit t il existe au moins une solution à cette équation (existence)".
3. Dire que f bijective c'est la même chose que "Quel que soit t il existe une et uen seule solution à cette équation (existence+unicité)".

Les notions d'injectivité et surjectivité sont courante dans les exercices d'équations fonctionnelles. Par exemple

$$f("truc") = f("bidule") \quad \text{et f est injective } \Rightarrow "truc" = "bidule".$$

On aimerait aussi faire des changement de variable. Par exemple sur cette équation

$$(...f(y) + f(y)^2 + ...) = ...$$

On aimerait poser $u = f(y)$ pour avoir

$$(...u + u^2 + ...) =$$

mais attention à quelles valeurs peut prendre u. Cette équation peut ne pas être vrai tout le temps. Par exemple si $f(y) = y^2$ alors elle n'est vrai que pour les $u \geqslant 0$. Par contre si f est surjectif tout va bien car toute les valeurs de u sont possible.Et on peut alors le choisir comme on veut comme par exemple $u = 0$

$$(...0 + 0 + ...) = ...$$

Exercices

Un peu de manipulation

.

Exercice 1
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x + y) = f(x) - f(y).$$

Exercice 2
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$f(x - f(y)) = 1 - x - y.$$

Exercice 3
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x^2 - y^2) = (x - y)(f(x) + f(y)).$$

Exercice 4
Déterminer les fonctions de $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que

$$f(f(x)) = x + 1$$

Fonctions Injectives et Surjectives

.

Exercice 5
Pour les solutions des équations fonctionnelles ci dessous lesquelles sont injectives ou surjectives de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. $f(f(x) - 1) = x + 1$.
2. $f(2x + f(3y)) = f(x) + y^5$.
3. $f(f(x) - f(y)) = xf(x - y)$.
4. $f(f(x) + f(y)) - f(f(x) - f(y)) = 2x + 3y$.

Exercice 6
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$f(f(x + 1) + y - 1) = f(x) + y.$$

Exercice 7
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$f(f(f(x))) + f(f(y)) = f(y) + x.$$

Exercice 8
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$f(f(x)f(y)) = f(x)y.$$

Exercices bonus

.

Exercice 9
Soit deux fonctions $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tel que f est surjective, g est injective et que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $f(n) \geqslant g(n)$. Montrer que $f(n) = g(n)$ pour tout n.

Exercice 10
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que

$$f(x)f(y) + f(x + y) = xy.$$

Exercice 11
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel qu'il existe $a > 0$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x + a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2}.$$

Montrer que f est périodique

Exercice 12
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que

$$f(x+1) + f(x-1) = \sqrt{2} f(x).$$

Montrer que f est périodique.

Exercice 13
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}/\{0,1\}$ tel que

$$f(x) + f(\frac{1}{1-x}) = x$$

Solutions

<u>*Solution de l'exercice 1*</u>
On essaye de suivre pas à pas l'exemple

1. On peut voir que $f(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ fonctionne. En effet $f(x+y) = 0$ et $f(x) - f(y) = 0 - 0 = 0$. Mais pour le moment on n'arrive pas trop à en trouver d'autres.
2. Je cherche $f(0)$. Avec $x = 0$ et $y = 0$ on a

$$f(0) = f(0+0) = f(0) - f(0) = 0.$$

Donc $f(0) = 0$
3. Si je fixe $y = 0$ j'obtiens

$$f(x) = f(x+0) = f(x) - f(0) = f(x)$$

soit $f(x) = f(x)$ c'est à dire rien d'intéressant. Par contre si je fixe $x = 0$ j'obtiens

$$f(y) = f(0+y) = f(0) - f(y) = -f(y)$$

et donc $f(y) = -f(y)$ pour y. Mais alors pour tout y, $f(y) = 0$. On en déduit que $f(y) = 0$ est la seule solution possible. Pour la synthèse on a déjà vu que $f(y) = 0$ fonctionne.

Autre méthode de preuve :(être malin). On remarque que si on échange x et y le terme de gauche ne change pas. On a alors ces deux équation pour tout x et y

$$\begin{cases} f(y+x) = f(x) - f(y). \\ f(y+x) = f(y) - f(x) \quad \text{(en inversant)}x, y \end{cases}$$

Si on somme les deux lignes on obtient

$$f(y+x) + f(y+x) = f(x) - f(y) + f(y) - f(x) = 0$$

et donc $2f(x+y) = 0$ pour tout x et pour tout y. La fonction $f(t) = 0$ pour tout t est donc la seule solution.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u>
On choisit $x = f(y)$ alors

$$f(0) = 1 - f(y) - y.$$

donc $f(y) = 1 - f(0) - y$. En particulier $f(0) = 1 - f(0)$ donc $f(0) = 1/2$, On vérifie

$$f(x - f(y)) = f(x - 1/2 + y) = 1/2 - x + 1/2 - y = 1 - x - y.$$

<u>*Solution de l'exercice 3*</u>
On suit encore un peu l'exemple

1. On remarque que la fonction $f(x) = 0$ est solution

$$f(x^2 - y^2) = 0 \qquad (x - y)(f(x) + f(y)) = (x - y) \times (0 + 0) = 0.$$

De même que la $f(x) = x$

$$f(x^2 - y^2) = x^2 - y^2 \qquad (x - y)(f(x) + f(y)) = (x - y)(x + y) = x^2 - y^2.$$

Après un peu de réfléxion on voit que en fait les fonctions de la forme $f(x) = kx$ pour $k \in \mathbb{R}$ sont ausi solutions

$$f(x^2 - y^2) = kx^2 - ky^2 \quad (x - y)(f(x) + f(y)) = (x - y)(kx + ky) = kx^2 - ky^2.$$

2. Si on choisit $x = y = 0$.

$$f(0) = f(0^2 + 0^2) = (0 - 0) \times (f(0) + f(0)) = 0$$

Donc $f(0) = 0$.

3. On tente $y = 0$

$$f(x^2 + 0) = (x - 0)(f(x) + f(0)) = xf(x)$$

donc $f(x^2) = xf(x)$ (peut-être intéressant on ne sait pas encore). Si on tente maintenant $x = 0$ on a

$$f(0 - y^2) = (0 - y)(f(0) + f(y)) = -yf(y)$$

donc $f(-y^2) = -yf(y)$. En regroupant ces deux résultats (avec $x = y$ pour le premier) on alors que $f(-y^2) = -f(y^2)$. Puisque tout nombre positif peut s'écrire de la forme y^2 on en déduit que pour tout $t \geqslant 0$

$$f(-t) = -f(t).$$

Définition :

(a) On dit que$f$ est une fonction impaire si $f(-t) = -f(t)$ pour tout t. (Exemple $f(t) = t$, $f(t) = t^3$,...)

(b) On dit que f est une fonction paire si $f(-t) = f(t)$. (Exemple $f(t) = 1$ ou $f(t) = t^2$, ...)

4. Astuce : Le terme de gauche de $f(x^2 - y^2) = (x - y)(f(x) + f(y))$ ne change pas si on change $y \to (-y)$. On peut écrire deux équations

$$\begin{cases} f(x^2 - (-y)^2) = (x + y)(f(x) + f(-y)) = (x + y)(f(x) - f(y)) & \text{car } f(-y) = -f(y) \\ f(x^2 - (-y)^2) = f(x^2 - y^2) = (x - y)(f(x) + f(y)) \end{cases}$$

On a alors

$$\begin{aligned}(x+y)(f(x)-f(y)) &= (x-y)(f(x)+f(y))\\ xf(x)+yf(x)-xf(y)-yf(y) &= xf(x)-yf(x)+xf(y)-yf(y)\\ yf(x)-xf(y) &= -yf(x)+xf(y)\end{aligned}$$

Et donc $2yf(x) = 2xf(y)$. Conclusion pour tout $x, y \in \mathbb{R}$

$$yf(x) = xf(y)$$

Ça c'est une équation très utile qui va permettre de conclure. Si on fixe maintenant $y = 1$ alors

$$1 \times f(x) = x \times f(1)$$

Si on écrit $k = f(1)$ on a alors $f(x) = kx$. Conclusion les seules solutions possibles sont les fonctions de la forme $f(x) = kx$. (Remarque pour $y = 2$ cela donne $2f(x) = xf(2)$ donc $f(x) = \frac{f(2)}{2} \times x$, même conclusion avec $k = \frac{f(2)}{2}$).

Synthèse : on a déjà montré que les fonctions de forme $f(x) = kx$ sont solutions.

Solution de l'exercice 4

On applique f à gauche et à droite de l'équation. On obtient alors

$$f(f(f(x))) = f(x+1) = f(x)+1$$

où on a appliqué la formule de l'énoncé à f(x). Par récurrence immédiate on a alors que

$$f(x) = f(0) + x$$

pour tout $x \in \mathbb{N}$. Il nous reste à estimer $f(0)$. On réutilise la formule de l'énoncé

$$f(f(x))) = f(x+f(0)) = x + 2f(0) = x+1$$

Conclusion $f(0) = 1/2$ ce qui est absurde car $f(0) \in \mathbb{N}$. Il n'y a donc pas de solution.

Solution de l'exercice 5

.

1. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $f(a) = f(b)$ alors

$$f(a)-1 = f(b)-1 \Rightarrow f(f(a)-1) = f(f(b)-1) \Rightarrow a+1 = b+1 \Rightarrow a = b$$

Donc la fonction est injective. Montrons maintenant que la fonction est surjective. Soit $t \in \mathbb{R}$ je choisit $x = t-1$. Alors

$$f(f(x)-1) = x+1 = t$$

Donc avec $u = f(x)-1$, on a bien $f(u) = t$. La fonction est donc bien surjective.

2. Soit a, b tel que $f(3a) = f(3b)$ alors

$$2x+f(3a) = 2x+f(3b) \Rightarrow f(2x+f(3a)) = f(2x+f(3b)) \Rightarrow f(x)+a^5 = f(x)+b^5 \Rightarrow a = b$$

Donc la fonction est bien injective. Montrons qu'elle est surjective. Soit $t \in \mathbb{R}$, alors il existe y tel que $t = f(x) + y^5$ (on choisit $y = (t - f(x))^{1/5}$ si $t \geqslant 0$ et $y = -|t - f(x)|^{1/5}$ si $t < 0$) alors

$$f(2x + f(3y)) = f(x) + y^5 = t$$

avec $u = 2x + f(3y)$ on a bien que $f(u) = t$ et donc la fonction est bien surjective. [Remarquer aussi que pour $y = 0$ on a

$$f(2x + f(0)) = f(x)$$

et si on choisit x tel que $2x + f(0) \neq x$ ($x \neq -f(0)$) on a que f n'est pas injective. Conclusion : pour cette équation il n'existe pas de solution possible.

3. On remarque que la fonction $f(t) = 0$ est solution. Or cette solution n'est ni injective ni surjective.
4. En choisissant $x = y$, on obtient l'équation

$$f(2f(x)) = 5x + f(0)$$

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, tel que $f(a) = f(b)$ alors

$$f(2f(a)) = f(2f(b)) \Rightarrow 5a + f(0) = 5b + f(0) \Rightarrow a = b$$

Donc la fonction est injective. Maintenant soit $t \in \mathbb{R}$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $5x + f(0) = t$. Alors $f(2f(x)) = t$. Avec $u = 2f(x)$ on a bien trouvé un $u \in \mathbb{R}$ tel que $f(u) = t$.

Solution de l'exercice 6
On refait comme au début du cours :

1. On essaye $f(x) = x$ et cette fonction est bien solution :

$$f(f(x+1) + y - 1) = f(x + 1 + y - 1) = x + y \qquad f(x) + y = x + y.$$

2. On ne sait pas trop comment avoir $f(0)$ ou une autre valeur. Passons.
3. De même..._
4. La fonction est elle surjective ? Soit $t \in \mathbb{R}$, on choisit $x = 0$ et $y = f(0) - t$. On a alors

$$f(f(1) + y - 1) = f(0) + y = t$$

avec $u = f(1) + y - 1$ on a bien $f(u) = t$ donc la fonction est surjective. Puisque f est surjective on va pouvoir choisir x pour simplifier le terme $f(x+1) + y - 1$. Il existe u tel que $f(u) = 1$ et on fixe $x_* = u - 1$ et donc $f(x_* + 1) = f(u) = 1$. On a alors

$$f(y) = f(1 + y - 1) = f(x_*) + y$$

Conclusion en notant $c = f(x_*)$ on a $f(y) = y + c$. On a presque terminer on remarque que pour $x = 0$ et $y = 0$ an alors $f(1 + c + 0 - 1) = c + c = 2c$ et $f(0) + 0 = c$. Donc le c possible est $c = 0$ soit $f(y) = y$ pour tout y.

Solution de l'exercice 7
Montrons que la fonctions est surjective. Soit $t \in \mathbb{R}$, on choisit x tel que $x - f(0) - f(f(0)) = t$ et $u = f(f(x))$. Alors
$$f(u) = f(f(f(x)) = x - f(0) - f(f(0)) = t$$
donc f est bien surjective. On peut alors poser $Y = f(y)$ et $x = 0$ et on obtient
$$f(Y) = Y - f(f(f(0)))$$
pour tout $Y \in \mathbb{R}$. Donc f est affine de la forme $f(x) = x + c$. On retourne à l'énoncé
$$f(f(f(x))) + f(f(y)) = x + 3c + y + 2c = x + y + 5c = y + c + x$$
donc $c = 0$. On vérifie que $f(x) = x$ est bien solution.

Solution de l'exercice 8
La fonction $f(x) = 0$ pour tout x est solution de l'équation. Supposons qu'il existe x_0 tel que $f(x_0) \neq 0$. Montrons alors que la fonction est injective. Soit a, b tel que $f(a) = f(b)$ alors
$$f(f(x_0)f(a)) = f(f(x_0)f(a)) \Rightarrow f(x_0)a = f(x_0)b \Rightarrow a = b$$
Donc la fonction est bien injective. Pour $y = 1$ on obtient
$$f(f(x)f(1)) = f(x) \Rightarrow f(x)f(1) = x$$
par injectivité. Avec $x = 1$ on a $f(1)^2 = 1$ donc $f(1) = \pm 1$. Finalement on peut vérifier que les solutions $f(x) = 0$, $f(x) = x$ et $f(x) = -x$ sont bien solutions.

Solution de l'exercice 9
Montrons par une récurrence forte sur n que pour tout x, $f(x) = n$ ssi $g(x) = n$. Pour $n = 0$, il existe x tel que $f(x) = 0$ par surjectivité. Donc $0 \leqslant g(x) \leqslant f(x) = 0$, donc $g(x) = 0$. Supposons maintenant que l'hypothèse de récurrence est vérifié pour tout $k \leqslant n$. Par surjectivité, soit x tel que $f(x) = n + 1$, alors $g(x) \leqslant n + 1$. Supposons $g(x) = k \leqslant n$, alors il existe y tel que $f(y) = k$ et $y \neq x$ (car $f(x) \neq k$). Or par injectivité, $k = g(x) \neq g(y) = k$ absurde. En conclusion $g(x) = n + 1$ ce qui termine la preuve de l'hérédité.

Solution de l'exercice 10
En choisissant $y = 0$ on a
$$f(x)(f(0) + 1) = 0$$
et donc $f(0) = -1$ ou $f(x) = 0$ pour tout x. La fonction nulle n'est pas solution de l'exercice qui donnerait $0 = xy$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$. Donc $f(0) = -1$. Avec $x = 1$ et $y = -1$ on a
$$f(1)f(-1) - 1 = -1 \Rightarrow f(1)f(-1) = 0$$
Donc $f(1) = 0$ ou $f(-1) = 0$. Si $f(1) = 0$, avec $y = 1$, on a
$$f(x + 1) = x$$
donc $f(x) = x - 1$. Si $f(-1) = 0$, avec $y = -1$ on a
$$f(x - 1) = -x$$

donc $f(x) = -x - 1$. On vérifie que ces deux solutions sont possibles

$$(x-1)(y-1) + (x+y-1) = xy - y - x + 1 + x + y - 1 = xy$$

et

$$(-x-1)(-y-1) + (-x-y-1) = xy + y + x + 1 - x - y - 1 = xy.$$

En conclusion les deux solutions possibles sont bien $f(x) = \pm x - 1$

Solution de l'exercice 11

Tout d'abord, pour que l'énoncé ait un sens il faut que $f(x) - f(x)^2 = f(x)(1 - f(x)) \geqslant 0$ et donc que $f(x) \in [0, 1]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a aussi que $f(x+a) \geqslant 1/2$ donc finalement pour tout x, $f(x) \in [1/2, 1]$. On commence par réécrire l'énoncé

$$\begin{aligned} f(x+a) - \frac{1}{2} &= \sqrt{f(x) - f(x)^2} \\ \Rightarrow f(x+a)^2 - f(x+a) + \frac{1}{4} &= f(x) - f(x)^2 \end{aligned}$$

On va alors poser $g(x) = f(x) - f(x)^2$ et on obtient

$$g(x+a) = \frac{1}{4} - g(x)$$

puis

$$g(x+2a) = \frac{1}{4} - g(x+a) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + g(x) = g(x)$$

La fonction $F(y) = y - y^2$ est une bijection de $[1/2, 1]$ dans $[0, 1/4]$, donc

$$f(x+2a) = F^{-1}(g(x+2a)) = F^{-1}(g(x)) = f(x).$$

Solution de l'exercice 12

On a

$$\begin{aligned} f(x) + f(x-2) &= \sqrt{2} f(x-1) \\ f(x+1) + f(x-1) &= \sqrt{2} f(x) \\ f(x+2) + f(x) &= \sqrt{2} f(x+1) \end{aligned}$$

Donc

$$f(x+2) + 2f(x) + f(x-2) = \sqrt{2}(f(x+1) + f(x-1)) = 2f(x)$$

Finallement $f(x+2) = -f(x-2)$, donc $f(u+4) = -f(u)$ et alors $f(u+8) = f(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 13

On a

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}} = \frac{1-x}{1-x-1} = \frac{x-1}{x} \quad \text{et} \quad \frac{1}{1 - \frac{x-1}{x}} = x.$$

Donc

$$f(x)+f(\frac{1}{1-x})=x$$
$$f(\frac{1}{1-x})+f(\frac{x-1}{x})=\frac{1}{1-x}$$
$$f(\frac{x-1}{x})+f(x)=\frac{x-1}{x}$$

et alors

$$\begin{aligned}2f(x)&=x-\frac{1}{1-x}+\frac{x-1}{x}\\&=\frac{x^2(1-x)-x-x^2+2x-1}{(1-x)x}\\&=\frac{-x^3+x-1}{(1-x)x}\end{aligned}$$

Donc $f(x)=\frac{-x^3+x-1}{2(1-x)x}$. On faut ensuite vérifier la solution...

2 Double comptage (Théo)

L'objectif de cette séance était d'évoquer la notion de double comptage : on cherche à compter de deux façons différentes certains objets, pour obtenir des égalités combinatoires.

Par exemple, rappelons que $\binom{n}{k}$ est le nombre de façon de choisir un sous-ensemble de k éléments parmi n. Il est connu que si $0\leqslant k\leqslant n$ $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$. Montrons cette identité : pour cela nous allons montrer que $n!=\binom{n}{k}k!(n-k)!$.

Pour cela on va compter de deux façons différentes le nombre de permutations de $\{1,\dots,n\}$. Il y en a $n!$ (n choix pour l'image de 1, $n-1$ pour l'image de 2, etc). Mais on peut également construire chaque permutation de la façon suivante : on choisit $\{\sigma(1),\dots,\sigma(k)\}$ l'ensemble des k premières images de σ ($\binom{n}{k}$ choix), ensuite on choisit un ordre pour ces images (k : possibilités), puis un ordre pour les $n-k$ images restantes ($(n-k)!$ possibilités). On a donc $\binom{n}{k}k!(n-k)!$ différentes permutations, chacune étant produite par ce procédé d'où l'égalité.

Pour les histoire de comptage, afin de montrer une égalité, une somme s'interprète comme un ou exclusif : si on somme des entiers positifs $a_1+\cdots+a_k$, il faut souvent interpréter a_i comme le nombre de possibilités du cas i, sachant que chaque cas est exclusif, et qu'ils regroupent toutes les possibilités. Si on fait le produit de certaines quantités, il faut l'interpréter comme un choix successif, ou en parallèle, de certaines quantités.

Souvent, double compter des paires, triplets ou autre se révèle particulièrement efficace. Il est important d'essayer de faire ça même sur des cas simples, puisque des idées de double comptage plus élaborée peuvent apparaître au détour de problèmes bien plus compliqués (typiquement le C2 2021 est un bon exemple de problème où des idées type double comptage apparaissent). Pour double compter des paires, souvent on regarde à premier terme de la paire fixé, combien on a de seconds termes possibles et inversement, donnant deux égalités/inégalités différentes.

Les exercices de ce TD sont pour la majeure partie repris sur ceux de 2019 et 2021, disponibles ici : https://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2019/08/PolycopieV1-1.pdf https://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2022/02/Poly-2021-Valbonne.pdf. Il est imposé de les faire sans calcul, sans utilisation de la formule du coefficient binomial avec les factorielles, afin d'essayer de bien mettre en oeuvre la méthode du double comptage.

Exercice 1
Démontrer de manière combinatoire :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Exercice 2
Montrer que $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$

Exercice 3
Montrer que si $0 \leqslant p \leqslant n$, $\sum\limits_{k=p}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{p} = 2^{n-p}\binom{n}{p}$

Exercice 4
Montrer que $\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \cdots + \binom{n+r}{n} = \binom{n+r+1}{n+1}$

Exercice 5
Montrer que si $k \leqslant m+n$, $\sum\limits_{j=0}^{k} \binom{m}{j}\binom{n}{k-j} = \binom{m+n}{k}$

Exercice 6
Montrer que $\sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$

Exercice 7
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ montrer que $\sum\limits_{0\leqslant 2k\leqslant n} \binom{n}{2k} = \sum\limits_{0\leqslant 2k+1\leqslant n} \binom{n}{2k+1}$

Exercice 8
Dans une école, chaque club compte 3 membres et chaque élève est membre de 3 clubs. Montrer qu'il y a autant de clubs que d'élèves

Exercice 9
Une permutation de $\{1, \ldots, n\}$ est tirée au hasard. Combien a-t-elle de points fixes en moyenne ?

Exercice 10
Dans une école, il y a m professeurs et n élèves. On suppose que chaque professeur a exactement k élèves, et qu'un élève a toujours exactement l professeur. Déterminer une relation entre m, n, k, l.

Exercice 11
Dans une école, il y a m professeurs et n élèves. On suppose que chaque professeur a exactement k élèves, et que deux élèves ont toujours exactement l professeurs en commun. Déterminer une relation entre m, n, k, l.

Exercice 12
200 candidats participent à un concours mathématique, ils ont 6 problèmes à résoudre. On suppose que chaque problème a été résolu par au moins 120 participants. Montrer qu'il existe deux candidats tels que chaque problème ait été résolu par au moins l'un des deux.

Exercice 13
A Valbonne, $n > 0$ problèmes sont accrochés à un mur. Chacun des m stagiaires a résolu au moins $n/2$ problèmes. Montrer qu'un problème a été résolu par au moins $m/2$ élèves.

Exercice 14
Autour d'une table ronde sont placée 11 chaises de façon régulière et devant chaque chaise il y a une carte avec le nom d'un des membres du comité des JBMO. Chacune des 11 cartes possède un nom différent. Au début de leur réunion les membres du comité se rendent compte qu'ils se sont tous assis devant une carte qui n'était pas la leur. Est-il possible de tourner la table de façon à ce qu'au moins 2 personnes se retrouvent devant leur propre carte ?

Exercice 15
Une classe compte n élèves. Quelque soit la manière de choisir deux élèves, il y en a au moins un qui a déjà déjeuné chez l'autre. En outre, chaque élève a déjà accueilli, pour le déjeuner, exactement un quart des élèves chez qui il a déjeuné.

Déterminer toutes les valeurs possibles de n.

Exercice 16
Soit n un entier strictement positif. Soit S un ensemble de n points tels que trois points distincts quelconques de S ne sont pas alignés. Montrer qu'il y a au plus $\frac{2n(n-1)}{3}$ triangles d'aire 1 formés de trois points distincts dans S.

Exercice 17
Soit n et k deux entiers naturels. Soit S un ensemble de n points du plan tels que trois points distincts quelconque de S ne sont pas alignés, et pour tout P dans S, il existe un réel $r > 0$ tel qu'au moins k point de S sont à distance r de P. Montrer que $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$

Exercice 18
Montrer que le nombre de chemin dans $\mathbb{Z}^2$ faisant $2n$ pas allant de $(0,0)$ à $(0,0)$ est $\binom{2n}{n}^2$

Solution de l'exercice 1

On compte le nombre d'équipe de football qu'on peut faire à partir de n bénévoles. On a le droit de choisir ou pas chaque bénévole, donc 2 choix pour chaque bénévole. Ainsi il y a 2^n telles équipes.

On peut également regarder le nombre d'équipe par nombre de joueurs. Le nombre de joueur k varie entre 0 et n, et il y a exactement $\binom{n}{k}$ telles équipes. Ainsi il y a $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ équipes, d'où l'égalité.

Solution de l'exercice 2

On considère n bénévoles, on cherche à former une équipe de k joueurs avec 1 capitaine. On double compte les paires (ensemble de k joueurs, joueur capitaine appartenant aux k joueurs).

Si on fixe d'abord l'ensemble de k joueurs, on a $\binom{n}{k}$ possibilités, puis k possibilités pour choisir le capitaine. Il y a donc $k\binom{n}{k}$ paires.

Si on fixe d'abord le capitaine (n choix), il reste $k-1$ places pour $n-1$ joueurs soit $\binom{n-1}{k-1}$ choix. Il y a donc $n\binom{n-1}{k-1}$ ce qui donne l'égalité voulue.

Solution de l'exercice 3

Ici en regardant le terme de gauche, on semble choisir un certain nombre de joueur puis en choisir p. On va donc compter le nombre de possibilités pour choisir une présélection de titulaires parmi n bénévoles, puis en choisir définitivement p. Plus formellement, on compte les paires (ensemble de joueur formant la présélection, ensemble de p joueurs de la sélection qui appartiennent à la présélection).

On peut d'abord choisir la sélection ($\binom{n}{p}$ choix), puis ensuite choisir la préselection : pour les $n-p$ individus n'appartenant pas à la sélection, il faut choisir si chacun appartient ou nom à la sélection (soit 2^{n-p}), il y a donc $2^{n-p} \times \binom{n}{p}$ paires.

On peut aussi regarder la taille notée k de la présélection qui est entre p et n : pour choisir la présélection il y a $\binom{n}{k}$ choix, puis $\binom{k}{p}$ choix pour choisir la sélection ensuite. On a donc en tout $\sum_{k=p}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{p}$ choix, d'où l'égalité.

Solution de l'exercice 4

Alignons $n+r+1$ bénévoles de gauche à droite. On compte le nombre de façon de former une équipe de $n+1$ joueurs : il y a $\binom{n+r+1}{n+1}$ possibilités. Le terme de droite semble lui ressembler à une façon de former une équipe avec n joueurs : il faut donc trouver un moyen naturel de se ramener à n joueurs. On peut regarder le joueur le plus à gauche choisi. Pour former une équipe de $n+1$ joueurs il faut que celui-ci soit parmi les $r+1$ premiers. Si c'est le premier joueur, il y a $\binom{n+r}{n}$ possibilités pour l'équipe. Si c'est le second, il y a $\binom{n+r-1}{n}$ car le premier ne peut être pris. Si c'est le i-ième, il y a $\binom{n+r+1-i}{n}$ possibilités.

En tout il y a donc $\binom{n+r}{n} + \binom{n+r-1}{n} + \cdots + \binom{n}{n}$ possibilités d'où l'égalité.

Solution de l'exercice 5

Ici la somme semble indiquer qu'en tout on va choisir k personnes, mais certaines d'un groupe de n, d'autres d'un groupe de m. On compte donc le nombre de façon de former une équipe (un ensemble) de k joueurs à partir de m joueurs français et n joueurs luxembourgeois. On peut directement mélanger les joueurs et en choisir k, ce qui donne $\binom{n+m}{k}$ possibilités.

On peut également noter j le nombre de joueurs français pris qui va entre 0 et k : il faut alors choisir j joueurs français ($\binom{m}{j}$ choix), et $k-j$ joueurs luxembourgeois ($\binom{n}{k-j}$ choix). En tout on a $\sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j}\binom{n}{k-j}$ possibilités.

Solution de l'exercice 6
Cet exercice est un corollaire de l'exercice 3 pour $p = 1$ (en fait on peut refaire le même raisonnement pour une sélection de 1 joueur, ou juste pour le choix d'un capitaine parmi une équipe de taille quelconque).

Solution de l'exercice 7
Pour montrer l'identité, il suffit de montrer qu'il y a autant d'équipes parmi n bénévoles avec un nombre pair de joueur que d'équipe avec un nombre impair de joueur. On fixe un joueur spécifique. A une équipe avec un nombre pair de joueur, on associer une équipe avec un nombre impair de joueur, en excluant de l'équipe le joueur 1 s'il y est, ou en l'incluant s'il n'y est pas. Ce procédé associe à une équipe de taille paire une équipe de taille impaire de manière bijective, en effet, si on connait l'équipe de taille impaire associée, on peut changer le statut du joueur pour retrouver l'équipe initiale, d'où l'injectivité. Si on prend une équipe de taille impaire, on peut changer le statut du premier joueur pour avoir une équipe de taille paire, dont l'équipe associée sera l'équipe initiale, d'où la surjectivité. Ainsi on a bien le résultat voulu.

Solution de l'exercice 8
Cet exercice est un corollaire de l'exercice 10, il faut donc voir le corrigé de l'exercice 10 pour en avoir une solution (la méthode est identique).

Solution de l'exercice 9
On compte les paires (σ, k) où σ est une permutation de $\{1, \dots, n\}$ et k un point fixe de σ. Notons N le nombre moyen de point fixe de σ. Le nombre de telles paires est alors $n!\sigma$. Or il y a n choix pour k, puis $(n-1)!$ permutations qui admettent k en point fixe (il y en a autant que de permutations de $\{1, \dots, n\}/\{k\}$). Ainsi il y a $n \times (n-1)! = n!$ telles paires, donc $N = 1$. Une permutation a en moyenne un point fixe.

Solution de l'exercice 10
On compte les paires (p, e) où p est un professeur, e un élève, et p est un professeur de e. Il y a m choix pour p, puis k choix pour un de ses élèves donc pk couples possibles. Mais on peut compter cela autrement : il y a n choix pour e, puis l choix pour un de ses professeurs donc nl couples possibles. Ainsi $nl = km$.

Solution de l'exercice 11
Pour ce problème on peut généraliser l'approche précédente. L'information de l portant sur des ensembles de 2 élèves, il faut donc plutôt double compter les paires $(p, \{e_1, e_2\})$ où p est un professeur, et e_1, e_2 sont deux élèves différents ayant p pour professeur. Il y a m choix pour p, puis $\binom{k}{2}$ choix pour l'ensemble de deux élèves donc $p\binom{k}{2}$ couples possibles. Mais on peut compter cela autrement : il y a $\binom{n}{2}$ choix pour $\{e_1, e_2\}$, puis l choix pour un de ses professeurs donc $\binom{n}{2}l$ couples possibles. Ainsi $\binom{n}{2}l = \binom{k}{2}m$.

Solution de l'exercice 12
On raisonne par l'absurde en supposant l'énoncé faux, et on utilise un argument de double

comptage. On sait que le fait que l'énoncé soit faux signifie que toute paire d'élève (distincts ou non) n'a pas résolu un exercice, il est donc naturel de double compter les triplets (p, e_1, e_2) avec p un problème, e_1 et e_2 deux élèves pas forcément distincts, tels que e_1 et e_2 n'ont pas résolu p.

A un problème fixé p, il y a au plus 80 choix pour e_1 et 80 pour e_2 d'après l'énoncé. Donc il y a au plus $6 \times 80^2 = 38400$. Comme on a supposé l'énoncé faux, peu importe le choix de e_1 et e_2, il y a un problème non résolu par e_1 et e_2 (même si $e_1 = e_2$), donc il y a au moins $200^2 = 40000$ couples, ce qui est absurde. Ainsi l'énoncé est bien correct.

Solution de l'exercice 13

On raisonne par l'absurde en supposant l'énoncé faux, et on utilise un argument de double comptage sur les paires (p, s) où p est un problème et s un stagiaire ayant réussi p. Vu que chaque problème a été résolu par strictement moins de $m/2$ élèves, et qu'il y a n problèmes, il y a strictement moins de $nm/2$ telles paires. Or il y a m stagiaires, et chacun a résolu au moins $n/2$ problèmes, donc il y a au moins $mn/2$ telles paires, ce qui est absurde. Ainsi l'énoncé est bien correct.

Solution de l'exercice 14

On raisonne par l'absurde en supposant que cela est impossible, et on numérote les membres du comité de 1 à 11. On utilise un argument de double comptage sur les paires (r, k) pour r une des 10 rotations possibles de la table, et k un entier entre 1 et 11 tel que le membre de comité numéroté k ait bien son nom devant lui après la rotation r de la table. Par hypothèse, chaque rotation a au plus une personne devant sa carte, donc il y a au plus 10 tels couples. Or si on fixe k, exactement une rotation lui permet d'avoir sa carte devant lui, il y a donc 11 tels couples. On obtient alors une contradiction : il est bien possible de trouver une rotation vérifiant l'énoncé.

Solution de l'exercice 15

Soit $\mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_n$ nos élèves. On note a_k le nombre d'élèves chez qui $\mathbf{E}_k$ a déjeuné, et b_k le nombre d'élèves que $\mathbf{E}_k$ a invités à déjeuner. L'énoncé nous indique alors que ces b_k élèves-là sont, d'une part, les $n - 1 - a_k$ élèves chez qui $\mathbf{E}_k$ n'a pas déjeuné et, d'autre part, $a_k/4$ des élèves chez qui $\mathbf{E}_k$ a déjeuné, de sorte que $b_k = n - 1 - 3a_k/4$.

On va maintenant compter le nombre de repas, que l'on note $\mathbf{C}$, de deux manières différentes. D'une part, il s'agit du nombre de fois où un élève a déjeuné chez un ami, de sorte que $\mathbf{C} = a_1 + \ldots + a_n$. D'autre part, il s'agit aussi du nombre de fois où un élève a invité un ami à déjeuner, de sorte que $\mathbf{C} = b_1 + \ldots + b_n$. On en en déduit que

$$\mathbf{C} = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} b_k = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} (n - 1 - 3a_k/4) = n(n-1) - 3\mathbf{C}/4,$$

c'est-à-dire que $7\mathbf{C} = 4n(n-1)$. Ainsi 7 divise n ou $n - 1$.

On aurait pu aussi obtenir ce résultat en comptant le nombre de paires (a, b) où a et b sont deux élèves distincts tels que a a mangé chez b et b chez a : on dit qu'une telle paire est jolie et on note N le nombre de paires jolies. En effet à a fixé il y a 4 fois moins de b tels que (a, b) jolie que de couple (a, b) tel que a a déjeuner chez b, donc quatre fois moins que le nombre de repas. Or il y a $N/2 + \binom{n}{2}$ déjeuners car si on choisit deux élèves, l'un a mangé chez l'autre (le $N/2$ vient du fait qu'on compte une seule fois pour (a, b) et (b, a) tous deux jolis), donc $7N = 2\binom{n}{2}$, donc on obtient le même résultat.

On sait donc que 7 divise soit n, soit $n-1$, et on étudie ces deux cas séparément :

— Si 7 divise $n-1$, posons $\ell = (n-1)/7$. Ci-dessous, on identifie les élèves aux éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Une manière d'obtenir la situation décrite dans l'énoncé est alors que chaque élève k aille déjeuner chez les élèves $k+1, k+2, \ldots, k+4\ell$ (soit 4ℓ élèves), et reçoive donc à déjeuner les élèves $k-4\ell, \ldots, k-1$. En effet, et puisque $-4\ell \equiv 3\ell+1 \pmod{n}$, les élèves qui ont invité k à déjeuner et ont déjeuné chez lui sont les élèves $k+3\ell+1, \ldots, k+4\ell$ (soit ℓ élèves).

— Si 7 divise n, posons $\ell = n/7$. Cette fois-ci, on identifie les élèves aux éléments de $\mathbb{Z}/(n-1)\mathbb{Z}$, ainsi qu'à un élément spécial, que l'on notera $\bullet$. On décide alors que l'élève $\bullet$ recevra tout le monde à déjeuner mais n'ira manger chez personne, puis que chaque élève k (avec $k \neq \bullet$) ira déjeuner chez $k+1, \ldots, k+4\ell-1, \bullet$ (soit 4ℓ élèves), et recevra les élèves $k-4\ell+1, \ldots, k-1$ à déjeuner. Cette fois-ci, puisque $-4\ell+1 \equiv 3\ell \pmod{n-1}$, les élèves qui ont invité k à déjeuner et not déjeuné chez lui sont les élèves $k+3\ell, \ldots, k+4\ell-1$ (soit ℓ élèves).

Par conséquent, les valeurs de n possibles sont tous les entiers n tels que $n \equiv 0 \pmod{7}$ ou $n \equiv 1 \pmod{7}$.

Solution de l'exercice 16

On double compte (X, Y, Z) le nombre de triplets de points distincts de S tels que XYZ forme un triangle d'aire 1. On note T le nombre de triangle d'aire 1 de S. Comme un triangle donne exactement $3! = 6$ tels triplets (selon l'ordre des points), on a $6T$ tels triplets.

Fixons $X \neq Y$ deux points de S (on a $n(n-1)$ tels choix). Chaque point Z formant un triangle d'aire un avec X, Y appartient à une des deux parallèles à (AB) située à distance 1 de (AB). Comme il y a au plus 2 points par droite, il y a au plus 4 Z possibles, donc le nombre de triplet vaut au plus $4n(n-1)$.

Ainsi $T \leqslant \frac{4n(n-1)}{6} = \frac{2n(n-1)}{3}$.

Solution de l'exercice 17

On double compte (X, Y, Z) le nombre de triplets de points distincts de S tels que $XY = YZ$. Fixons $X \neq Z$ ($n(n-1)$ choix), il y a au plus 2 points Y tels que $XY = YZ$, car la médiatrice de $[XZ]$ ne peut contenir qu'au plus deux points de S. On a donc au plus $2n(n-1)$ telles paires. Fixons Y (n choix), par hypothèse il y a au moins $k(k-1)$ choix pour (X, Z) d'après l'énoncé (en les prenant tous les deux à la distance r associée à Y). On a donc au moins $nk(k-1)$ telles paires.

On a donc $nk(k-1) \leqslant 2n(n-1)$ donc $k^2 - k \leqslant 2(n-1)$. Ainsi $(k-\frac{1}{2})^2 \leqslant 2n - 2 + \frac{1}{4} < 2n$, donc $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$

Solution de l'exercice 18

On effectue une rotation de $\frac{\pi}{4}$ puis un agrandissement de $\sqrt{2}$ du plan : le point $(1, 0)$ est envoyé sur $(1, 1)$ et $(0, 1)$ sur $(-1, 1)$. En particulier, il y a autant de chemin dans $\mathbb{Z}^2$ faisant $2n$ pas allant de $(0, 0)$ à $(0, 0)$ que de chemins dont les pas sont $(\pm 1, \pm 1)$ de $2n$ pas allant de $(0, 0)$ à $(0, 0)$. Il y en a autant que le nombre de chemin allant de 0 à 0 dans $\mathbb{Z}$ à pas de ± 1 au carré (le chemin sur l'axe des abcisses et des ordonnées se comportement indépendamment). Notons que pour avoir un chemin de 0 à 0 en $2n$ pas, il faut choisir n pas 1 et n pas -1, il y a donc $\binom{2n}{n}$ tels chemin. Ainsi, en tout il y a $\binom{2n}{n}^2$ chemins vérifiant l'énoncé.

3 Polynômes 1 (Benoît)

Introduction aux polynômes

Définition 1 (Polynôme)**.**
On appelle polynôme ou fonction polynomiale une fonction $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle qu'il existe $a_0, a_1, \cdots, a_n$ des réels tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} P(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \end{aligned}$$

On notera $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes et on notera parfois $P = P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$

Remarque 2.
Ici on étudiera les polynômes réels (ou à coefficients réels) mais on peut aussi de la même façon considérer les ensembles $\mathbb{Q}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ qui possèdent essentiellement les mêmes propriétés que celles qu'on étudiera dans ce cours.

Théorème 3.
Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$ deux polynômes avec $a_n \neq 0, b_m \neq 0$.
On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $P(x) = Q(x)$.
Alors $n = m$ et $a_k = b_k$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$.

Définition 4 (Degré)**.**
Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme tel que $a_n \neq 0$.
On appelle degré de P et on note $\deg P$ le nombre n. De plus, on appelle coefficient dominant le nombre a_n (noté parfois $CD(P)$ ou cdom(P)).
Dans le cas ou $P = 0$, par convention, on considère $\deg P = -\infty$

Proposition 5.
Pour P et Q des polynômes, $P + Q$, $P \cdot Q$ et $P \circ Q = P(Q)$ sont des polynômes et

— $\deg(P + Q) \leqslant \max(\deg P, \deg Q)$

— $\deg(P \cdot Q) = \deg P + \deg Q$

— $\deg(P \circ Q) = \deg P \times \deg Q$ si $P \neq 0$ et $Q \neq 0$

Théorème 6 (Division euclidienne)**.**
Soit P et S deux polynômes tels que $S \neq 0$.
Il existe alors un unique couple de polynômes (Q, R) tel que $P = QS + R$ avec $\deg R < \deg S$
On dit alors que Q est le quotient et R le reste de la division euclidienne de P par S

Démonstration. Pour l'unicité on suppose qu'il existe (Q, R) et (Q', R') deux couples qui fonctionnent. On a alors $QS + R = Q'S + R'$ et donc $S(Q - Q') = R' - R$. Par le degré on a alors $R = R'$ et $Q = Q'$ d'où l'unicité.
Pour l'existence, l'algorithme a été présenté en classe avec un exemple. □

Définition 7 (Racine)**.**
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et P un polynôme.
On dit que α est une racine de P lorsque $P(\alpha) = 0$

Théorème 8.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et P un polynôme.
α est une racine de P ssi il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X - \alpha) \cdot Q(X)$

Démonstration. Le sens direct se fait avec la division euclidienne et le sens indirect est immédiat $\square$

Théorème 9.
Un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$ a au plus n racines distinctes.

Démonstration. On prouve par récurrence sur m que si $a_1, a_2, \ldots, a_m$ sont des racines de $P \in \mathbb{R}[X]$, il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X - a_1) \cdot (X - a_2) \cdot \ldots \cdot (X - a_m) \cdot Q$
On conclut avec le degré. $\square$

Corollaire 10 (Rigidité)**.**

— Si $\deg P \leqslant n$ et que P a $n + 1$ racines distinctes alors $P = 0$

— Si P a une infinité de racines alors $P = 0$

— Soit P et Q deux polynômes. On suppose qu'il existe une infinité de nombres x tels que $P(x) = Q(x)$ alors $P = Q$

Exemple 11.
Pour $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, si $P(\alpha_1) = P(\alpha_2) = \cdots = P(\alpha_n) = 0$ alors

$$P = a_n(X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \cdots (X - \alpha_n)$$

Exercices

Exercice 1
Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(2x) = P(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2
Déterminer tous les polynômes tels que $P(x^2) = xP(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$

Exercice 3
Soit $n \geqslant 2$ donner le reste de la division euclidienne de $X^n - X^{n-1} + 1$ par $X^2 - 3X + 2$

Exercice 4
Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$\begin{cases} P(2) = 2 \\ P(X^3) = P(X)^3 \end{cases}$$

Exercice 5
Soit P un polynôme de degré 2022 tel que $P(1)=1, P(2)=2, \ldots P(2022)=2022$ et $P(0)=1$
Déterminer $P(-1)$

Exercice 6
Montrer que pour $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme, P est pair si et seulement si il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X)=Q(X^2)$

Exercice 7
Trouver tous les polynômes tels que

$$(X-16)P(2X)=16(X-1)P(X)$$

Exercice 8
Soit $a_1, a_2, \ldots a_n$ et $b_1, b_2, \ldots, b_n$ des réels. On remplit un tableau $n \times n$ avec en coordonnée (i,j) le nombre a_i+b_j.
On suppose qu'il existe un réel c tel que le produit de chaque ligne vaut c. Montrer qu'il existe un réel d tel que le produit de chaque colonne vaut d.

Exercice 9
Soit P un polynôme tel que $P(X)^2=R(X^2)$ avec $R \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X)=Q(X^2)$ ou $XP(X)=Q(X^2)$

Exercice 10
Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $16P(X^2)=P(2X)^2$
Indication : utiliser la question précédente

Solution de l'exercice 1
Il s'agit de montrer que P est constant.

Il y a plusieurs manières de résoudre cet exercice. On écrit $P(X)=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Par rigidité, on obtient pour tout k compris entre 0 et n, $2^k a_k = a_k$. Donc $a_k=0$ pour $k \neq 0$ et P est constant.
Réciproquement, P constant fonctionne.

Solution de l'exercice 2
Regardons tout d'abord le degré. On suppose pour cela $P \neq 0$ (Le cas $P=0$ fonctionne).
On a $2 \cdot \deg P = 1 + \deg P$ donc $\deg P = 1$.
Par ailleurs, en évaluant en $x=0$, on a $P(0)=0$, donc $P(X)=\lambda X$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ qui fonctionne.
Ainsi les solutions sont les polynômes

Solution de l'exercice 3
Par définition, la division euclidienne est de la forme $X^n - X^{n-1} + 1 = (X^2-3X+2)Q(X) + R(X)$ avec $R(X)=aX+b$.
On remarque que $(X^2-3X+2)=(X-2)(X-1)$, en évaluant en 1, on a : $1=a+b$ et en évaluant en 2, on a $2^{n-1}+1=2a+b$.
Ainsi, $a=2^{n-1}$ et $b=1-2^{n-1}$.
Ainsi $R(X)=2^{n-1}X+(1-2^{n-1})$

Solution de l'exercice 4
Soit un polynôme solution.

En évaluant en 2, on a $P(8) = 8$. On peut réévaluer en 8... Par récurrence, on obtient $P(2^{3n}) = 2^{3n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Cela représente une infinité de points égaux avec le polynôme X par rigidité, on a donc $P = X$.
Réciproquement, l'identité fonctionne.

Solution de l'exercice 5
Le polynôme fait beaucoup penser au polynôme X. Plus précisément, $P(X) - X$ a comme racines $1, 2, \ldots, 2022$ donc il existe Q tel que $P(X) - X = Q(X) \cdot (X-1) \cdot (X-2) \cdot \ldots \cdot (X-2022)$. Par le degré, il existe λ tel que $P(X) = X + \lambda(X-1)\ldots(X-2022)$.
On évalue en 0, on a $1 = \lambda 2022!$, d'où $\lambda = \dfrac{1}{2022!}$.
On obtient donc $P(-1) = -1 + 2023 = 2022$

Solution de l'exercice 6
On utilise encore une fois la rigidité. Cette fois cela donne $(-1)^k a_k = a_k$ et donc tous les terme impairs sont nuls. On a donc un polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_{2k} X^{2k}$, ainsi $Q(X) = a_{2k} X^k$ convient.

Solution de l'exercice 7
Recherchons tout d'abord le degré. On suppose que P est non nul.
Le calcul direct du degré ne nous aide pas. On regarde le coefficient dominant, avec n le degré et λ le coefficient dominant :

$$1 \cdot 2^n \lambda = 16\lambda$$

Ainsi $n = 4$.
En évaluant en 1, on a $P(2) = 0$, puis on réévalue en 2, 4 et 8, pour avoir $P(4) = P(8) = P(16) = 0$. Par le degré, $P(X) = \lambda(X-2)(X-4)(X-8)(X-16)$.
Ces polynômes fonctionnent (pour $\lambda \in \mathbb{R}$).

Solution de l'exercice 8
Il s'agit de faire apparaître des polynômes. Ici, on a pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $\prod_{j=1}^{n}(a_i + b_j) = c$ ainsi, le polynôme $P(X) = \prod_{j=1}^{n}(X + b_j) - c$ a les a_i comme racines. Avec le degré et le coefficient dominant, on a :

$$P(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - a_i)$$

Pour un j, en évaluant l'égalité de polynômes en $-b_j$, on a

$$0 - c = \prod_{i=1}^{n}(-b_j - a_i)$$

On a donc : $\prod_{i=1}^{n}(b_j + a_i) = (-1)^{n+1}c$ et $d = (-1)^{n+1}c$ convient.

Solution de l'exercice 9
Écrivons $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ avec $a_n \neq 0$. Comme $P(x)^2 = R(x^2)$, le coefficient devant x^{2n-1} dans $P(x)^2$, à savoir $2a_n a_{n-1}$, est nul. On en déduit que $a_{n-1} = 0$.

De même, le coefficient devant x^{2n-3} dans $P(x)^2$, à savoir $2a_n a_{n-3}$, est nul. On en déduit que $a_{n-3} = 0$. De même, on obtient que $a_{n-2k-1} = 0$ pour $n - 2k - 1 \geqslant 0$. Le résultat en découle.

Solution de l'exercice 10
Comme $P(x)^2 = 16P(\frac{x^2}{4})$ est un polynôme en x^2, on peut appliquer la question précédente. Dans le premier cas, s'il existe un polynôme Q tel que $P(x) = Q(x^2)$, on obtient $16Q(x^4) = 16P(x^2) = P(2x)^4 = Q(4x^2)^2$, et donc $16Q(x^2) = Q(4x)^2$. Dans le deuxième cas, s'il existe un polynôme Q tel que $P(x)^2 = xQ(x^2)$, on obtient similairement que $4Q(x^2) = Q(4x)^2$. On peut donc réappliquer la question précédente à Q, et de même on obtient que pour tout entier $k \geqslant 0$, il existe un entier $0 \leqslant i \leqslant 2^k$ et un polynôme R_k tel que $P(x) = x^i R_k(x^{2^k})$. En choisissant k tel que $2^k > \deg P$, il s'ensuit que R_k est forcément constant et donc que $P(x) = cx^i$. En réinjectant dans l'équation de départ, on obtient $P(x) = 16(\frac{x}{4})^i$ pour un certain entier $i \geqslant 0$ (et toutes ces solutions conviennent bien, réciproquement).

4 Géométrie combinatoire (Rémi et Aurélien)

Idées utiles

1. Tester des petits cas (comme dans tous les problèmes de combinatoire)
2. Toujours essayer la méthode la plus brutale possible
3. Penser à la récurrence (forte ?)
4. Ordonner les points par abscisse croissante
5. Considérer l'enveloppe convexe
6. Trianguler les polygones : pour diviser un polygone en triangles, il faut tracer $n-3$ diagonales, on obtient $n-2$ triangles

Exercices

Exercice 1
Rémi, Aurélien et Savinien sont sur une grille de points à coordonnées entières. Initialement, Rémi est en $(0,0)$, Aurélien en $(0,1)$ et Savinien en $(1,0)$. Rémi, toujours mécontent et râleur, veut se déplacer en $(2,2)$. Aurélien et Savinien sont satisfaits de leur position et veulent y être retournés à la fin, mais sont prêts à aider Rémi. À tour de rôle, chacun peut se déplacer sur la droite parallèle à celle passant par les positions des deux autres. Sont-ils voués à l'échec ?

Exercice 2
On donne 2020 points dans le plan, trois quelconques jamais alignés. Démontrer que l'on peut construire 505 quadrilatères deux à deux disjoints, non nécessairement convexes, et dont les sommets sont les points donnés.

Exercice 3
On place dans le plan 2022 points, trois quelconques non alignés. On en colorie 1011 en bleu et 1011 en rouge. Montrer qu'il est possible de tracer 1011 segments qui ne se croisent pas, chaque segment reliant un point bleu à un point rouge, de telle manière que chaque point soit utilisé une seule fois.

Exercice 4
Soit P un polygone convexe à n côtés. Montrer qu'il existe un ensemble S de $n-2$ points tels que tout triangle dont les sommets sont des sommets de P contient exactement un point de S.

Exercice 5
(Théorème de Helly) On considère quatre parties convexes du plan telles que l'intersection de trois d'entre elles est toujours non vide.

— a) Montrer que l'intersection des quatre convexes est non vide.

— b) Le théorème reste-t-il vrai en remplaçant 4 par $n \geqslant 4$?

Exercice 6
Soit P un polygone convexe. Montrer qu'il existe un point O tel que l'image de P par l'homothétie de centre O et de rapport $-1/2$ soit un polygone intégralement contenu à l'intérieur de P (le bord est inclus dans l'intérieur).

Exercice 7
(EGMO 2017, P3) Soient 2017 droites dans le plan telles qu'il n'en existe pas trois s'intersectant en un même point. Turbo l'escargot se trouve sur un point n'appartenant qu'à une seule droite. Il se déplace le long des droites de la façon suivante. Il se meut sur une droite donnée jusqu'à ce qu'il arrive à une intersection. À chaque fois qu'il rencontre une intersection, il continue son parcours sur l'autre droite, tournant à gauche ou à droite, alternant son choix à chaque intersection rencontrée. Aucun demi-tour n'est permis. Est-il possible qu'il parcoure un même segment de droite dans deux sens opposés durant son parcours ?

Exercice 8
(RMM 2019, P4) Montrer que pour tout entier strictement positif n il existe un polygone admettant exactement n triangulations.

Solutions

Solution de l'exercice 1
Rémi est casse-pieds ! Ils ne peuvent pas réussir leur entreprise car l'aire du triangle Rémi Aurélien Savinien restera constante à chaque déplacement (la base reste la même et la hauteur ne change pas en se déplaçant sur une parallèle), mais Rémi veut faire augmenter l'aire du triangle.

Solution de l'exercice 2
Quitte à faire tourner la figure, on peut supposer que les points ont des abscisses deux à deux distinctes. On note P_i avec $1 \leqslant i \leqslant 2016$ les points ordonnés par abscisse croissante et, pour tout k entre 0 et 504, on considère un quadrilatère dont les sommets sont $P_{4i+1}, P_{4i+2}, P_{4i+3}$ et P_{4i+4}.

Solution de l'exercice 3
On raisonne par récurrence forte sur n : le résultat est trivial pour $n = 1$. Il suffit donc de séparer les $2n$ points par une droite de manière à avoir de chaque côté de la droite autant de points bleus que rouges, et de traiter séparément chaque côté de la droite. On considère le bord de l'enveloppe convexe des $2n$ points : si elle contient deux points de couleurs différentes, alors

elle contient deux points consécutifs de couleur différente. On peut isoler ces deux points par une droite et on a gagné. Sinon, on suppose que le bord de l'enveloppe convexe est bleu. Quitte à faire une rotation, les ordonnées des points sont deux à deux distinctes. On fait descendre une droite horizontale : le point le plus haut A_1 et le plus bas A_{2n} sont sur le bord donc sont bleus. On a donc un point bleu "en trop" au-dessus de la droite juste après avoir passé A_0 et un point rouge en trop juste avant A_{2n}. Comme on passe les points un par un on aura à un moment autant de points bleus que de rouges au-dessus de la droite, donc on a gagné !

Solution de l'exercice 4
On choisit S comme suit : notons A le point le plus à gauche de P (qui est unique quitte à "tourner" la figure) et Z le plus à droite. . Pour tout sommet X de P sur l'arc de P au-dessus de A et Z, on prend dans S un point "juste en-dessous" de X. . Pour tout sommet X de P sur l'arc de P au-dessus de A et Z, on prend dans S un point "juste au-dessus" de X.
Montrons que cette construction fonctionne bien. Pour chaque triangle BCD, il existe un "point au milieu", dont l'abscisse est comprise entre celles des deux autres points. Soit C le "point au milieu" de BCD. On peut vérifier que le point juste au-dessus (ou en-dessous) de C est à l'intérieur de BCD, mais pas ceux juste au-dessus (ou en-dessous) de B et D. Il reste à voir que le point juste au-dessus (ou en-dessous) de C existe bien : c'est bien le cas, car C est le point au milieu de BCD, donc on ne peut pas avoir C=A ou C=Z.

Solution de l'exercice 5
a) On note C_1, C_2, C_3 et C_4 les quatre convexes. Soit $A_1 \in C_2 \cap C_3 \cap C_4$. On définit de même A_2, A_3 et A_4. Si A_1, A_2, A_3 et A_4 sont les sommets d'un quadrilatère convexe, on peut supposer que $[A_1A_2]$ et $[A_3A_4]$ s'intersectent. On a $[A_1A_2] \subset C_3 \cap C_4$ et $[A_3A_4] \subset C_1 \cap C_2$. Dans ce cas, l'intersection de $[A_1A_2]$ et $[A_3A_4]$ est dans les 4 convexes. Sinon, on peut supposer que A_1 est à l'intérieur du triangle $A_2A_3A_4$ donc $A_1 \in C_1$, donc A_1 est dans les quatre convexes.
b) Oui : on fait une récurrence sur n en utilisant le cas $n = 4$: si le théorème vrai pour n on prend $n + 1$ convexes : n quelconques ont toujours une intersection non vide. On prend 4 points dans ces intersections et on applique la preuve précédente.

Solution de l'exercice 6
Pour montrer qu'un polygone convexe (image) est à l'intérieur d'un autre convexe (P) il suffit de montrer que ses sommets sont à l'intérieur de P. Pour chaque sommet A_i, on considère l'ensemble E_i des positions possibles de O pour que A_i soit dans P. Il faut et il suffit de montrer que les E_i ont tous un point commun. Or on se rend facilement compte que E_i est en fait l'image de P par l'homothétie de centre A_i et de rapport $2/3$. De fait, les E_i sont convexes et on peut utiliser le théorème de Helly. On prend E_i, E_j, E_k et on montre qu'ils ont un point commun. Pour cela, le plus simple est d'en donner un explicitement, l'isobarycentre (centre de gravité) de $A_iA_jA_k$ fonctionne. En effet ce triangle est entièrement contenu dans le polygone P convexe, et l'isobarycentre étant aux deux tiers des médianes, cela le place à la limite des ensembles E_i, E_j et E_k.

Solution de l'exercice 7
On essaie de trouver un invariant qui permet de montrer que l'escargot ne peut pas aller dans le sens opposé. Cette preuve ne prend pas en compte de quel côté il tourne. Dans un problème de géométrie combinatoire les invariants sont souvent de type coloriage et dans notre cas on peut colorier le plan en deux couleurs tel que chaque région séparée par des droites soit d'une couleur et que deux régions se touchant par un côté soient de deux couleurs différentes. Ce coloriage est valable : raisonnons par récurrence sur le nombre

de droite ($n = 0$ marche bien), quand on rajoute une droite on inverse toutes les couleurs d'un côté de la droite alors deux régions se touchant sont bien de deux couleurs différentes. Maintenant que l'on a introduit le coloriage, on peut remarquer que la couleur à droite de l'escargot est toujours la même pour cela on peut faire un dessin d'une intersection et voir que l'escargot tournant à droite ou à gauche ne change pas cette propriété. Finalement on a bien que l'escargot ne peut pas parcourir un même segment dans un sens ou l'autre.

Solution de l'exercice 8
Il suffit de considérer les figures suivantes :

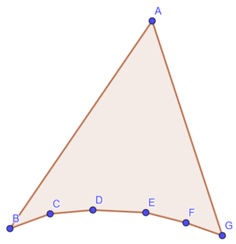


FIGURE 2 – Ce polygone admet une unique triangulation

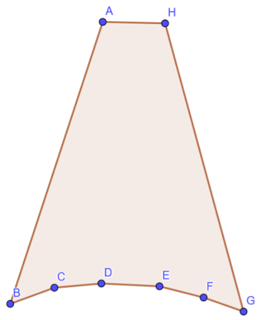


FIGURE 3 – Ce polygone admet autant de triangulations que de points sur l'arc en bas, parce qu'il faut choisir le triangle qui contiendra l'arête en haut, puis on a deux fois la configuration ci-dessus

5 Polynômes 2 (Raphael G.)

Exercice 1
P est un polynôme de degré 4. $P(0) = P(1) = 1, P(2) = 4, P(3) = 9, P(4) = 16$. Calculer $P(-1)$

Exercice 2
Soient $n \geqslant 1$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall k \in [\![0, n]\!], P(k) = \frac{k}{k+1}$ Calculer $P(n+1)$

Théorème 1 (Relations de Viète)**.** Soit $P = X^2 - sX + p$ et α, β ses racines. Alors, $s = \alpha + \beta$ et $p = \alpha\beta$.
Soit $P = X^3 - sX^2 + tX - p$ et $\alpha, \beta\gamma$ ses racines. Alors $s = \alpha + \beta + \gamma$, $t = \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma$ et $p = \alpha\beta\gamma$

Démonstration. $P = (X-\alpha)(X-\beta) = X^2 - (\alpha+\beta)X + \alpha\beta$. Par identification, on retrouve les formules indiquées. On procède de même pour le degré 3. □

Exercice 3
Trouvez tous les (x, y) réels tels que $x + y = 1$ et $x^3 + y^3 = 19$

Exercice 4
Trouvez tous les réels (x, y, z) tels que

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x^2+y^2+z^2=6 \\ x^3+y^3+z^3=8 \end{cases}$$

Exercice 5
Trouvez tous les (x, y, z) tels que :

$$\begin{cases} x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \\ x^2+y^2+z^2=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2} \end{cases}$$

Lemme 2. Soit P un polynôme à coefficients entiers, a, b deux entiers distincts, alors
$a - b \mid P(a) - P(b)$

Démonstration. Montrons le lemme sur chaque polynôme X^n. Soient a, b des entiers distincts. Pour $n = 0$, $a - b \mid 1 - 1 = 0$. Pour $n = 1$, $a - b \mid a - b$. Soit $n \geqslant 2$, alors $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$. Ainsi, $a - b \mid a^n - b^n$. Un polynôme étant une combinaison linéaire de monômes, la propriété est vérifiée pour tout polynôme. □

Exercice 6
Soit P un polynôme à coefficients entiers, tel qu'il existe trois entiers distincts a, b, c tels que $|P(a)| = |P(b)| = |P(c)| = 1$. Montrer que P n'a pas de racine entière

Exercice 7
Soit P un polynôme à coefficients entiers, et q un entier. Montrer qu'il existe un entier n tel que $q \mid P(1) + P(2) + \ldots + P(n)$

Exercice 8
Montrer qu'il n'existe pas de polynôme à coefficients entiers tels qu'il existe a, b, c des entiers distincts vérifiants : $P(a) = b, P(b) = c, P(c) = a$.

Solution de l'exercice 1

P ressemble beaucoup à X^2, nous allons donc étudier $P(X) - X^2$. Ce polynôme possède 4 racines (1,2,3,4). Ainsi $P(X)-X^2 = (X-1)(X-2)(X-3)(X-4)Q(X)$, où Q est un polynôme. Etudions les degrés :

$\deg(P(X)-X^2) = 4 = \deg((X-1)(X-2)(X-3)(X-4)Q(X)) = 4+\deg(Q) \iff \deg(Q) = 0$

Par conséquent Q est une constante c, que l'on va déterminer avec $P(0)$. $P(0) - 0^2 = c(0-1)(0-2)(0-3)(0-4) \iff c = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$. Donc $P(-1) = (-1)^2 + \frac{(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)\cdot(-5)}{4!} \iff P(-1) = 1+5 = 6$

Solution de l'exercice 2

La relation donnée n'est pas immédiatement polynomiale, il faut donc la changer. $P(k) = \frac{k}{k+1} \iff (k+1)P(k) = k \iff (k+1)P(k) - k = 0$. Ainsi le polynôme $(X+1)P(X) - X$ possède $n+1$ racines. Comme le degré de $(X+1)P(X)$ est strictement supérieur à 1, $(X+1)P(X) - X$ est de degré $n+1$. De même que précédemment, $(X+1)P(X) - X = cX(X-1)...(X-n)$. Il reste à déterminer c. Pour calculer le membre de gauche, il faut annuler $(X+1)P(X)$ car on ne connait rien d'utile sur P et donc on évalue en -1 : $1 = c\cdot(-1)^n\cdot(n+1)! \iff c = \frac{(-1)^n}{(n+1)!}$

Finalement, $P(n+1) = \frac{n+1+(-1)^n}{n+2}$

Solution de l'exercice 3

On cherche à calculer xy, car d'après les relations de Viète, on peut alors trouver x, y. $1 = (x+y)^3 = x^3+y^3+3xy(x+y) \iff 1 = 19+3xy \iff xy = -6$. Ainsi x, y sont les racines de $X^2 - X - 6$. Après un peu de tâtonnement on trouve -2 et 3 comme racines (on peut aussi utiliser la méthode du discriminant dans des cas plus complexes). Par conséquent, $(x, y) = (-2, 3)$ ou $(x, y) = (3, -2)$

Solution de l'exercice 4

Comme l'exercice précédent, on cherche les relations de Viète restantes : $xy + yz + zx$ et xyz. $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) \iff xy+yz+zx = -1$. De plus $(x+y+z)^3 = x^3+y^3+z^3+3(xy^2+xz^2+yx^2+yz^2+zx^2+zy^2+2xyz) = x^3+y^3+z^3+3((xy+yz+zx)(x+y+z)-xyz) \iff xyz = (xy+yz+zx)(x+y+z) = -2$.

Ainsi, x, y, z sont solutions de $X^3 - 2X^2 - X - 2$. On remarque que 1 est racine. $X^3 - 2X^2 - X - 2 = (X-1)(X^2-3X+2) = (X-1)(X+1)(X-2)$ Ainsi, $(x, y, z) = (-1, 1, 2)$ et toutes ses permutations.

Solution de l'exercice 5

Posons $\sigma_1 = x+y+z, \sigma_2 = xy+yz+zx, \sigma_3 = xyz$. En multipliant par σ_3 la première, on obtient $\sigma_1\sigma_3 = \sigma_2$. En multipliant par σ_3^2 la seconde,

$\sigma_3^2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) = \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3 \iff \sigma_3^2(\sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_3) = \sigma_1^2\sigma_3^2 - 2\sigma_1\sigma_3 \iff \sigma_3^2 = 1 \iff \sigma_3 = 1$ ou $\sigma_3 = -1$

Supposons que $\sigma_3 = 1, \sigma_2 = \sigma_1 = \lambda$. Alors x, y, z sont racines de $X^3 - \lambda X^2 + \lambda X - 1 = (X-1)(X^2-(\lambda+1)X+1)$

A permutation près, $x = 1, z = \frac{1}{y}$, d'après une formule de Viète. On vérifie facilement que c'est solution. Si $\sigma_3 = -1$, le polynôme est $X^3 + \lambda X^2 + \lambda X + 1$ et on trouve $x = -1, y = \frac{1}{z}$. Ainsi, à permutation près, $(x, y, z) = (1, t, \frac{1}{t})$ ou $(-1, t, \frac{1}{t})$ pour $t \in \mathbb{R}^*$

Seconde solution

On reprend le début jusqu'à $\sigma_3^2 = 1 \iff \sigma_3 = \frac{1}{\sigma_3}$.

$$(x+y+z)^2 = \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2 \iff x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) = \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}+2\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)$$
$$\iff xy+yz+zx = \frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}$$

Ainsi $(X-x)(X-y)(X-z) = \left(X-\frac{1}{x}\right)\left(X-\frac{1}{y}\right)\left(X-\frac{1}{z}\right)$. Donc, $\{x,y,z\} = \left\{\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z}\right\}$. Il reste 3 cas à tester : $x = \frac{1}{x}, y = \frac{1}{y}, z = \frac{1}{z} \iff x,y,z = \pm 1$, ce qui est solution. Si $x = \frac{1}{x}, y = \frac{1}{z}, z = \frac{1}{y}$, on trouve $(1,t,\frac{1}{t}), \forall t \in \mathbb{R}^*$ qui est solution. Enfin, si $x = \frac{1}{y}, y = \frac{1}{z}, z = \frac{1}{x}$, en réinjectant toutes les équations, on retombe sur le cas 1.
Ainsi, à permutation près, $(x,y,z) \in \{(e,t,\frac{1}{t}), e \in \{-1,1\}, t \in \mathbb{R}^*\}$

Solution de l'exercice 6
Supposons par l'absurde que P possède une racine entière r. Ainsi, $a-r \mid P(a)-P(r) = \pm 1$. De même pour b et c. Ainsi, $a,b,c \in \{r-1,r+1\}$. Il n'y a que deux nombres dans l'ensemble donc a,b,c ne sont pas distincts, absurde. Donc P ne possède pas de racine entière.

Solution de l'exercice 7
Soit $n \in \mathbb{Z}$, alors $q \mid P(n+q)-P(n) \iff P(n) \equiv P(n+q) \ [q]$. Ainsi, on va sommer les termes q par q. Donc $P(1)+\ldots+P(q^2) \equiv q(P(1)+\ldots+P(q)) \equiv 0 \ [q]$. Ainsi, q^2 est un entier vérifiant la propriété.

Solution de l'exercice 8
Suppposons par l'absurde qu'il existe un tel polynôme. On écrit les relations de divisibilités :

$$\begin{aligned} a-b &\mid P(a)-P(b) = b-c \\ b-c &\mid P(b)-P(c) = c-a \\ c-a &\mid P(c)-P(a) = a-b \end{aligned}$$

Ainsi, $a-b \mid b-c \mid c-a \mid a-b$ donc $|a-b| = |b-c| = |c-a|$. Sans perte de généralité (symétrie), $a \geqslant b \geqslant c$, donc $b-a = c-a \iff b = c$. C'est absurde, par conséquent il n'existe pas de tel polynôme.

6 Monovariants (Savinien)

Principe

Des problèmes apparaissent parfois où l'état d'un système est modifié par l'application de transformations. L'énoncé demande alors souvent s'il est possible de passer d'un état A à un état B, ou encore de montrer que la suite de transformations doit forcément prendre fin. On peut résoudre, ou à défaut progresser sur de tels problèmes en introduisant des invariants et des monovariants.

Un *invariant* est une quantité associée à un système ou une propriété de ce système qui n'est pas modifiée par l'application des transformations disponibles. On peut associer un réel à chaque état possible du système, invoquer des propriétés de parité (ou des propriétés modulo un autre entier), ou même introduire des pavages ou des coloriages. Si des états A et B ont des invariants associés différents, il n'est alors pas possible de passer de l'un à l'autre par une suite de transformations.

Un *monovariant* est une quantité faisant partie d'un ensemble ordonné et qui est telle que l'application de transformations fait toujours décroître (ou toujours croître) cette valeur. L'ensemble ordonné utilisé est communément celui des nombres naturels ou réels, mais on peut également utiliser l'ensemble des suites finies à éléments dans un ensemble fini et faire intervenir l'*ordre lexicographique* et l'*ordre radiciel*.

Définition 1.
On considère un ensemble fini A ordonné par l'ordre $\leqslant$ et l'ensemble des suites finies à éléments dans A est noté $A^\star$.

— L'ordre lexicographique sur $A^\star$ est noté $\preccurlyeq$ et est défini par

$$u \preccurlyeq v \text{ si } u \text{ est un préfixe de } v \text{ ou si } u = war, v = wbs \text{ avec } w, r, s \in A^\star \text{ et } a \leqslant b.$$

— L'ordre radiciel sur $A^\star$ est noté $\sqsubseteq$ et est défini par

$$u \sqsubseteq v \text{ si } |u| < |v| \text{ ou si } |u| = |v| \text{ et } u \preccurlyeq v.$$

Si la quantité associée à l'état A est strictement plus petite que celle associée à l'état B et que le monovariant est décroissant, il est impossible de passer de l'état A à l'état B. Par rapport aux invariants, les monovariants ont l'avantage de pouvoir montrer qu'une suite de transformations s'arrête.

Proposition 2 (Bons ordres)**.**
Un ordre sur un ensemble E est un *bon ordre* si tout sous-ensemble de E possède un élément minimum, i.e. un élément qui est plus petit que tous les autres.

Si E est muni d'un bon ordre, il n'existe pas de suite infinie décroissante (pas d'éléments $e_1, e_2, \ldots$ tels que $e_1 > e_2 > e_3 > \ldots$).

Parmi des exemples de bons ordres, on peut citer n'importe quel ordre[1] sur un ensemble fini, l'ordre usuel sur $\mathbb{N}$, et l'ordre radiciel sur n'importe quel ensemble A lui-même muni d'un bon ordre. Dans de tels cas, exhiber un monovariant décroissant permet de montrer que la suite de transformations se termine toujours.

Remarque 3.
L'ordre lexicographique sur un ensemble $E^\star$ n'est en général pas un bon ordre. Par exemple, si $E = \{0, 1\}$, avec $0 < 1$, la suite

$$1, 01, 001, 0001, 00001, \ldots$$

est décroissante infinie.

Exercices introductifs

Exercice 1
Les nombres entiers de 1 à 2022 sont écrits au tableau. Une opération consiste à en choisir deux, les effacer et réécrire sur le tableau la valeur absolue de leur différence. Montrer que le dernier nombre écrit au tableau est impair.

1. total (tel que deux éléments sont toujours comparables)

Exercice 2
Sur un tableau, on écrit n fois le chiffre 1. Une opération consiste à choisir deux nombres a et b écrits au tableau, à les effacer et à écrire $\frac{a+b}{4}$ à la place. Montrer que le nombre écrit au tableau au bout de $n-1$ étapes est supérieur ou égal à $\frac{1}{n}$.

Exercice 3
Il y a 2022 mésanges qui nichent sur 120 arbres. Essayant de les déloger, un chasseur maladroit leur tire dessus. A chaque fois, il manque sa cible mais effraie une mésange qui quitte alors son arbre et se réfugie sur un arbre avec au moins autant de mésanges que son arbre de départ (elle se compte sur ce dernier). Montrer qu'après un certain nombre fini de tirs, toutes les mésanges seront sur le même arbre.

Exercice 4
On a 2022 piles de jetons. Sur la i-ème pile, il y a p_i jetons, où p_i est le i-ème nombre premier. On s'autorise :

— à séparer une pile en deux autres et ajouter un jeton à l'une des deux piles ainsi créées.

— à fusionner deux piles et ajouter un jeton à la pile créée.

Peut-on aboutir à la situation avec 2022 piles de 2022 jetons chacune ?

Exercice 5
Dans l'espace, on note E l'ensemble de 7 sommets d'un cube. On s'autorise à remplacer dans E un point de E par son symétrique par rapport à un autre point de E. Peut-on enchaîner des transformations de ce type de telle sorte que le sommet du cube non choisi au départ apparaisse dans E ?

Exercice 6
On écrit un signe $+$ ou $-$ sur chaque case d'un tableau 8×8. Une opération consiste à choisir un carré 3×3 ou 4×4 et inverser les signes présents dedans. Peut-on toujours atteindre un tableau rempli de $+$?

Exercice 7
On colorie n points du plan en rouge et n autres en bleu de telle sorte que ces $2n$ points ne soient pas 3 à 3 alignés. Est-il toujours possible de tracer n segments reliant un point rouge à un point bleu, chaque point étant utilisé une seule fois, de manière à ce que deux segments ainsi tracés ne s'intersectent jamais ?

Exercice 8
Sur une ligne, on écrit 2018 entiers naturels. Ensuite, pour chaque ligne, on écrit en-dessous de chaque entier le nombre de fois qu'il apparaît dans la ligne, créant ainsi une nouvelle ligne en-dessous de la première, sur laquelle on réapplique le processus. Montrer qu'au bout d'un certain temps toutes les lignes qu'on écrit deviennent identiques.

Exercice 9
Sur le plan, on part du point $(1, \sqrt{2})$. Quand on est en (x, y), on peut se déplacer en $(x, y+2x)$, $(x, y-2x)$, $(x+2y, y)$ ou $(x-2y, y)$, mais sans revenir immédiatement au point dont on venait. Montrer qu'on ne peut revenir au point de départ.

Exercices de compétitions

Exercice 10
2009 cartes, ayant chacune un côté bleu et un côté jaune, sont alignées côté bleu sur une table. Deux personnes situées du même côté de la table jouent alors en alternance. Un coup consiste à choisir un bloc de 50 cartes dont la carte la plus à gauche est bleue et à retourner toutes les cartes du bloc. La personne qui ne peut plus jouer perd. Le jeu se termine-t-il forcément ? Si oui, qui a une stratégie gagnante ?

Exercice 11
Des entiers positifs en nombre fini sont écrits de gauche à droite sur une ligne. Lucie choisit deux nombres voisins x et y tels que x est à gauche de y et $x > y$ et remplace la paire (x, y) par $(x-1, x)$ ou $(y+1, x)$ au choix, puis recommence tant que possible. Montrer qu'elle ne peut continuer indéfiniment.

Exercice 12
La banque d'Oslo produit des pièces en aluminium (A) et en bronze (B). Martin arrange $2n$ pièces, n de chaque type, en ligne dans un ordre arbitraire. Puis il fixe k entier entre 1 et $2n$ et il applique le processus suivant : il identifie la plus longue séquence de pièces consécutives de même type qui contient la k-ième pièce en partant de la gauche, et déplace toutes les pièces de cette séquence à gauche de la ligne. Par exemple, avec $n = 4, k = 4$, on peut avoir la suite d'opérations

$$AAB\underline{B}BABA \to BBB\underline{A}AABA \to AAA\underline{B}BBBA \to BBB\underline{B}AAAA \to \dots$$

Trouver toutes les paires (n, k) avec $1 \leqslant k \leqslant 2n$ telles que pour toute configuration initiale, les n pièces de gauche sont de même type après un nombre fini d'étapes.

Exercice 13
Un écureuil a 2021 noisettes disposées en cercle et numérotées de 1 à 2021 dans un ordre arbitraire. Il leur applique une séquence de 2021 mouvements. Au k-ième mouvement, il permute les positions des deux noisettes adjacentes à celle numérotée k.

Montrer qu'il existe une valeur de k telle que le k-ième mouvement échange deux noisettes a et b telles que $a < k < b$.

Exercice 14
Les participants du stage Animath s'appellent $C_1, \dots, C_n$ et font la file devant le restaurant selon les règles suivantes :

— Les animatheurs choisissent l'ordre initial des participants.

— A chaque étape, les animatheurs choisissent un entier i avec $1 \leqslant i \leqslant n$. Si le participant C_i a au moins i personnes devant lui dans la queue, il paie 1 euro aux animatheurs et avance de i places. Sinon, le restaurant ouvre et le processus se termine.

Montrer que le processus se termine forcément et déterminer la quantité maximale d'argent que les animatheurs peuvent extorquer aux participants.

Solutions

Solution de l'exercice 1
A chaque étape, la somme des nombres impliqués dans la transformation passe de $a+b$ à $a-b$ ou $b-a$, elle est donc modifiée d'une quantité paire ($2b$ ou $2a$ respectivement). La parité de la somme des nombres écrits au tableau est donc un invariant. Dans la configuration initiale, elle vaut $\frac{2022 \cdot 2023}{2} = 1011 \cdot 2023$ qui est impair. Après 2021 étapes, il ne reste plus qu'un nombre au tableau, qui doit être impair.

Solution de l'exercice 2
On peut remarquer que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geqslant \frac{4}{a+b}$ (il suffit de tout mettre au même dénominateur et de faire apparaître $(a-b)^2 \geqslant 0$). Dès lors, la somme des inverses des nombres écrits au tableau est décroissante lorsqu'on applique une transformation. Elle vaut n dans la position initiale, donc dans la position finale elle est inférieure à n : le dernier nombre écrit est dès lors supérieur à $\frac{1}{n}$.

Solution de l'exercice 3
Représentons une configuration par la liste du nombre de mésanges sur chaque arbre, triée par ordre croissant. Quand le chasseur tire, un des nombres de la liste diminue de 1 et un nombre situé plus loin dans la liste augmente de 1. Dès lors, la nouvelle liste est strictement plus petite par ordre lexicographique que la première. Comme il n'y a qu'un nombre fini de listes de 120 éléments naturels dont la somme fait 2022, on finira par atteindre en un nombre fini d'étapes la plus petite, qui correspond à avoir toutes les mésanges sur un même arbre.

Solution de l'exercice 4
En traitant les diverses transformations possibles, on remarque que la parité du nombre de piles de hauteur paire reste inchangée. Comme ce nombre est impair dans la position initiale et pair dans la position à atteindre, il est impossible d'aboutir à cette dernière.

Solution de l'exercice 5
Plaçons-nous dans un repère orthonormé où les sept sommets choisis du cube ont pour coordonnées $(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0), (0,1,1), (1,0,1)$ et $(1,1,0)$. Le symétrique du point (a,b,c) par rapport au point (a',b',c') est le point $(2a'-a, 2b'-b, 2c'-c)$. En particulier, la parité des coordonnées est invariante par ces symétries. On ne peut donc atteindre le point $(1,1,1)$ puisque ses trois coordonnées sont impaires.

Solution de l'exercice 6
On peut remarquer que la parité du nombre de signes $-$ en dehors des troisième et sixième colonnes est un invariant. La configuration demandée n'est donc pas atteignable.

Solution de l'exercice 7
Si deux segments AB et CD, avec A et C rouges, ont une intersection, alors les segments AD et CB n'en ont pas et la somme de leurs longueurs est plus petite que celle des longueurs de AB et CD. Il n'y a que $n!$ manières d'apparier les points. En prenant celle où la somme des longueurs des segments est la plus petite, et vu la remarque précédente, il n'y aura aucune intersection. L'objectif de cette exercice est d'illustrer le lien entre les méthodes par monovariants et celles par extrema.

Solution de l'exercice 8
Considérons un nombre a en dehors de la première ligne. Il représente le nombre d'occurrences d'un des nombres de la ligne du dessus. Ce dernier est donc présent a fois dans la

ligne du dessus, et a est présent au moins a fois dans sa ligne. Dès lors, si l'on regarde une colonne, tous les nombres à l'exception du premier sont triés par ordre croissant. Comme de plus la somme des nombres d'une ligne autre que la première fait 2018, toutes les lignes deviennent identiques au bout d'un certain temps (sinon, la somme de chaque ligne augmenterait de 1 autant de fois que voulu, tout en restant inférieure à 2018).

Solution de l'exercice 9

Donnons des noms aux différentes transformations : partant de (x, y), appelons N le passage à $(x, y + 2x)$, S pour $(x, y - 2x)$, E pour $(x + 2y, y)$ et O pour $(x - 2y, y)$. La règle de ne pas revenir immédiatement en arrière signifie que l'on ne peut pas faire un déplacement N puis S, ou E puis O (et de même dans l'autre sens). On peut remarquer que les coordonnées du point sont toujours de la forme $(a + b\sqrt{2}, c + d\sqrt{2})$. De plus, puisque $\sqrt{2}$ est irrationnel, a et c sont indépendants de b et d. On peut donc montrer que partant de $(1, 0)$ et suivant les mêmes règles, on ne peut revenir au point de départ, et ce sera suffisant.

Les mouvements E et O n'ont aucun effet au point de départ, toute séquence de coups peut donc se réécrire a_1N+a_2E+a_3N+ $\ldots$, avec $a_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, en notant kN le mouvement N répété k fois, si $k > 0$, et S répété k fois si $k < 0$, et de même pour E/O. Le mouvement kN correspond à passer de (x, y) à $(x, y + 2kx)$ tandis que kE correspond à passer à $(x + 2ky, y)$. On peut montrer par récurrence qu'après un mouvement kN on a $|c| > |a|$, et $|a| > |c|$ après un mouvement kE. Dès lors, la distance à l'origine du point (a, c) est strictement croissante (puisqu'on augmente la valeur absolue de la coordonnée la plus petite en valeur absolue, et que l'autre reste inchangée), et il est donc impossible de revenir au point de départ.

Solution de l'exercice 10

Ecrivons un 1 sur chaque face bleue et un 0 sur chaque face jaune. A toute configuration est alors associé un nombre écrit en binaire et ayant 2009 chiffres. Quand on fait un coup, on modifie 50 chiffres consécutifs, dont le plus grand passe de 1 à 0. Le nombre associé à la position baisse donc strictement. Puisqu'il ne peut être négatif, la partie finit par s'arrêter. On aurait également pu procéder en interprétant une configuration comme une suite de 2009 éléments de {jaune,bleu} avec jaune<bleu, après quoi l'ordre radiciel (ou lexicographique, cela revient au même puisque toutes les suites sont de même longueur) est un monovariant strictement décroissant.

Pour savoir qui gagne, considérons les cartes en positon $50k$ à partir de la droite, et le nombre de cartes bleues parmi celles-ci. Au début, il est de 40, et il change de 1 à chaque coup puisqu'exactement une de ces cartes est retournée à chaque coup. Dès lors, quand c'est au tour du second joueur, le nombre de cartes bleues parmi celles considérées est impair, donc non nul. Le second joueur a donc toujours quelque chose à jouer, et ne peut donc perdre. Puisque le jeu se finit, le second joueur gagne toujours. (Source : IMO 2009 SL, C1)

Solution de l'exercice 11

On peut remarquer que le maximum des entiers reste constant, et que leur somme augmente sauf si $y = x - 1$ et qu'on remplace (x, y) par $(x - 1, x)$. De plus, il n'est pas possible de faire ce coup indéfiniment, puisque si l'on considère le nombre de paires « inversées » (x est à gauche de y, mais pas forcément immédiatement à gauche, et $x > y$), il diminue de 1 à chaque coup de cette forme. Dès lors, si Lucie pouvait continuer indéfiniment, elle serait forcée d'augmenter régulièrement la somme des nombres de la liste, mais cette somme ne peut dépasser le maximum de la liste multiplié par sa taille, ce qui est une constante. (Source : IMO 2012 SL, C1)

Solution de l'exercice 12

Appelons *chaîne* une séquence maximale de pièces consécutives de même type. On remarque qu'à chaque étape du processus, si la chaîne déplacée n'est pas à une extrémité de la ligne de pièces, on fusionne les deux chaînes adjacentes et le nombre de chaînes diminue donc de 1. Ce nombre vaut au minimum 2, et ce minimum est atteint dans le cas où les n premières pièces sont de même type. On a donc en fait qu'il existe une configuration telle que les n pièces de gauche ne sont jamais toutes de même type si, et seulement si, il existe une configuration telle que la chaîne déplacée est toujours celle de gauche ou celle de droite.

Si $1 \leqslant k \leqslant n-1$, la configuration initiale formée de $n-1$ lettres A, n lettres B et une lettre A est telle que la chaîne déplacée est toujours celle de gauche. Si $\left\lceil \frac{3n}{2} \right\rceil < k \leqslant 2n$, la configuration initiale formée de $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ lettres A, autant de lettres B, puis $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ lettres A et autant de B est telle que la chaîne déplacée est toujours celle de droite. Dans les deux cas, on a un cycle qui se répète et on n'arrive jamais à la configuration cherchée.

Montrons que si $n \leqslant k \leqslant \left\lceil \frac{3n}{2} \right\rceil$, on arrive toujours à la configuration cherchée, en montrant que pour toute configuration initiale on finit par déplacer une chaîne qui n'est pas au bord, et donc diminuer le nombre total de chaînes. Si la configuration n'a pas les n pièces de gauche du même type, on ne peut jamais déplacer la chaîne de gauche. Il suffit donc de montrer qu'on ne peut pas toujours déplacer la chaîne de droite. Par l'absurde, si cela était le cas, toutes les chaînes auraient une longueur d'au moins $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$ pour pouvoir contenir la position k en étant la chaîne de droite, ce qui n'est pas possible car en ayant deux chaînes d'un type donné, on aurait plus de n pièces de ce type.

Ainsi, les (n, k) qui conviennent sont ceux tels que $n \leqslant k \leqslant \left\lceil \frac{3n}{2} \right\rceil$. (Source : IMO 2022, P1)

Solution de l'exercice 13

Introduisons quelques notations. On numérote les positions de 1 à 2021, en comptant les numéros modulo 2021. Une paire de positions $(i, i+1)$ est *montante* si la noisette en position i a un numéro inférieur à celle en position $i+1$, *descendante* sinon. Une position i est une *vallée* si $(i-1, i)$ est descendante et $(i, i+1)$ est montante, c'est une *montagne* si si $(i-1, i)$ est montante et $(i, i+1)$ est descendante, et c'est une *pente* dans le cas contraire. Enfin, une position est *attendue* si elle contient une noisette dont le numéro est supérieur au nombre de coups effectués jusque là.

Remarquons que dans toute configuration, il y a autant de vallées que de montagnes, et donc un nombre impair de pentes. Supposons par l'absurde que le k cherché par l'énoncé n'existe pas. Nous montrons qu'alors le nombre de pentes attendues ne change pas de parité. C'est une contradiction car avant le premier coup les pentes attendues sont en nombre impair (toutes les pentes sont attendues) et après le dernier coup il n'y a plus de pentes attendues.

Considérons un coup échangeant les noisettes en position $i-1$ et $i+1$, et notons x, a, k, b, y les noisettes en positions $i-2$ à $i+2$, dans cet ordre. Sous notre hypothèse, on a $a, b < k$ ou $k < a, b$. Remarquons que le statut de pente attendue ou non d'une position ne peut changer que pour les positions $i-2, i-1, i+1$ et $i+2$.

Si $a, b < k$, les positions $i-1$ et $i+1$ ne sont pas attendues. La position $i-2$ ne peut devenir ou cesser d'être une pente que si la paire $(i-2, i-1)$ change de sens, ce qui n'a lieu que si $a < x < b$ auquel cas la position $i-2$ n'est pas attendue. Le même raisonnement vaut pour la position $i+2$ et, dans les deux cas, le nombre de pentes attendues ne change pas.

Si $k < a, b$, on tient à nouveau un raisonnement symétrique pour $i-2, i-1$ et $i+1, i+2$. Si x n'est pas entre a et b, les positions $i-2$ et $i-1$ ne changent pas de statut (pente, non-pente, attendu, non-attendu) et le nombre de pentes attendues ne change pas. Si x est entre

a et b, les positions $i-2$ et $i-1$ sont toutes deux attendues, et les pentes deviennent des non-pentes et vice-versa. le nombre de pentes attendues est donc modifié de $-2, 0$ ou 2. Dès lors, et en raisonnant de même pour $i+1$ et $i+2$, le nombre de pentes attendues garde une parité constante. On a bien la contradiction cherchée. (Source : IMO 2021, P5)

Solution de l'exercice 14
Tout d'abord, montrons par récurrence que les animatheurs peuvent récolter $2^n - n - 1$ euros. La construction est la suivante :
Les participants sont placés dans l'ordre inverse (C_n est en premier, puis C_{n-1}, etc). Dans un premier temps, les animatheurs remettent en ordre croissant les $n-1$ derniers élèves de la file, de la manière qui leur fait gagner le plus d'argent. On a donc l'ordre $C_n, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$. Ensuite, ils font avancer une fois chaque participant de 1 à $n-1$. On a donc l'ordre $C_{n-1}, \ldots, C_2, C_1, C_n$. Enfin, ils remettent à nouveau les $n-1$ premiers éléments de la file dans l'ordre croissant. En notant S_n la quantité d'argent obtenue sur une file de n participants par cette méthode, on a $S_n = 2S_{n-1} + n - 1$ et $S_1 = 0$. On a donc bien $S_n = 2^n - n - 1$.

Montrons à présent qu'on ne peut récolter plus de $2^n - n - 1$ euros :
Si C_i avance, il passe devant i autres participants. En particulier, il passe devant un participant qui a un numéro supérieur au sien. Dès lors, à une configuration x de la file, associons la quantité

$$Q(x) = \sum_{\substack{i,j \in \{1,\ldots,n\} \\ i<j}} 2^i \cdot \delta_{ij} \text{ avec } \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \text{ est avant } j \text{ dans la file} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

(il s'agit d'un comptage pondéré des paires de participants qui sont dans l'ordre inverse). Lorsque les animatheurs font avancer un participant j, il passe devant un participant avec un numéro supérieur, rétablissant ainsi l'ordre « correct » d'une paire dont j est le plus petit élément, donc Q baisse d'au moins 2^j. Il peut arriver que j passe devant des participants au numéro inférieur, mais Q ne peut de toutes façons augmenter de plus de $\sum_{i=1}^{j-1} 2^i = 2^j - 2$. Q baisse donc d'au moins 2 à chaque étape. D'autre part, Q est maximal lorsque toutes les paires sont inversées, et vaut alors $\sum_{i=1}^{n} (n-i)2^i = 2(2^n - n - 1)$, et ne peut être négatif. On ne peut donc pas faire avancer un candidat plus de $2^n - n - 1$ fois, et ce nombre est bien la somme maximale que les animatheurs peuvent percevoir. (Source : EGMO 2018, P3)

4 Entraînement de fin de parcours

Veuillez rédiger chaque problème sur une copie différente. N'oubliez pas d'écrire votre nom et chaque numéro d'exercice. Les calculatrices sont interdites.

Pour les exercices de géométrie, on attend de l'élève une figure propre, grande, où la propriété que l'on cherche à démontrer est apparente : s'il faut démontrer que des points sont alignés (ou cocycliques), il faut tracer la droite (ou le cercle) qui passe par ces points.

Énoncés

Exercice 1
On a deux listes de nombres : la première est $1, 6, 11, \ldots, 96$ et l'autre est $4, 9, 14, \ldots, 99$. A chaque étape, on choisit deux nombres a, b d'une liste, on les retire et on met $2(a+b)$ dans la seconde.

1. Montrer que le processus se termine avec un nombre dans chaque liste.
2. Montrer que ces nombres sont différents.

Exercice 2
Soit P un polynôme unitaire à coefficients réels positifs de degré n et possédant n racines réelles. On suppose que $P(0) = 1$. Montrer que $P(2) \geqslant 3^n$.

Exercice 3
On considère 2022 droites du plan, deux à deux non-parallèles et trois à trois non concourantes. On appelle E l'ensemble de leurs points d'intersection. On veut attribuer une couleur à chacun des points de E de sorte que deux quelconques de ces points qui appartiennent à une même droite et dont le segment qui les relient ne contient aucun autre point de E, soient de couleurs différentes. Combien faut-il au minimum de couleurs pour pouvoir réaliser une telle coloration ?

Exercice 4
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(y - f(x)) = f(x) - 2x + f(f(y))$$

Solution de l'exercice 1

Soit a_n la taille de la première liste à la n-ième étape et b_n celle de la seconde liste. Comme $a_n + b_n$ diminue de 1 à chaque étape, le processus se termine. Dans ce cas, il reste au plus un nombre dans chaque liste (sinon une étape supplémentaire serait possible), donc soit deux listes à un élément, soit un liste à un élément et une liste à 0 élément. Il ne peut y avoir deux listes vides car après chaque étape, il y a au moins un élément. On remarque que $a_n - b_n$ est invariant modulo 3, car la différence augmente ou diminue de 3. Or au début $a_0 - b_0 = 0$, ainsi le processus se termine avec un élément dans chaque liste.

Nous allons montrer que les éléments de la première liste sont toujours congrus à 1 modulo 5 et ceux de la seconde à 4. En effet, soit a, b des éléments de la première. Alors $2(a+b) \equiv 2 \cdot (1+1) \equiv -1 \quad [5]$ ainsi le nombre rajouté vérifie encore l'hypothèse. Si a, b sont dans la seconde liste $2(a+b) \equiv 1 \quad [5]$. Par conséquent, les deux nombres finaux ne peuvent être égaux.

Solution de l'exercice 2

On écrit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_0 = a_n = 1$. Soit α une racine. Si $\alpha \geqslant 0$, on a

$$P(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k \geqslant a_0 > 0$$

C'est impossible. Donc les racines de P sont négatives.

On note $-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_n$ les racines de P. On a alors $P(X) = \prod_{k=0}^{n}(X + \alpha_k)$.

En évaluant en 2, on obtient :

$$P(2) = \prod_{k=0}^{n}(2 + \alpha_k)$$

Pour un k, on a par inégalité arithmético-géométrique : $(1 + 1 + \alpha_k) \geqslant 3\sqrt[3]{\alpha_k}$.

En multipliant : $P(2) \geqslant 3^n \sqrt[3]{\prod \alpha_k}$

Or par les formules de Viète, on a $\prod_{k=0}^{n} \alpha_k = 1$ ce qui conclut.

Solution de l'exercice 3

La configuration contient au moins un triangle. Cela peut par exemple se prouver par récurrence sur le nombre de droites : trois droites forment un triangle et si on ajoute une droite, soit elle laisse le triangle intact, soit elle le sépare en un triangle et un quadrilatère. Par conséquent, il est impossible d'effectuer un coloriage avec deux couleurs.

On va maintenant montrer qu'un coloriage à trois couleurs est possible : on ordonne les points par abscisse strictement croissante, et on les colorie dans cet ordre. Au moment où on doit colorier un point $P = (d_i) \cap (d_j)$, on a déjà colorié au plus un de ses voisins sur (d_i) (celui qui est à gauche) et un sur (d_j) (aussi celui de gauche). On a donc au plus deux couleurs interdites et on peut toujours choisir la troisième. La réponse est donc 3 couleurs.

Solution de l'exercice 4

Le premier bon réflexe est de voir un x dans le membre de droite donc peut montrer que f est injective. En effet, si on suppose $f(x) = f(x')$ et qu'on écrit l'équation fonctionnelle pour

x et x', on obtient en faisant la différence que $2x = 2x'$, et donc f est injective. On pose alors $x = 0$ et $y = f(0)$, et on obtient $f(f(f(0))) = 0$. En prenant ensuite $x = f(f(0))$ et $y = 0$, on obtient $f(f(0)) = -2f(f(0))$, donc $f(f(0)) = 0$. En appliquant f des deux côtés, on trouve $f(f(f(0))) = f(0)$, soit finalement $f(0) = 0$ en combinant avec ce qui précède.
On revient à l'équation initiale et on pose $x = 0$. Cela nous donne $f(y) = f(f(y))$, soit $f(y) = y$ par injectivité. On vérifie réciproquement que l'identité est bien solution de l'équation.

5 Derniers cours

1 Leçon de grammaires (Savinien)

L'objectif de ce cours est d'expliquer ce qu'est la compilation d'un programme informatique et de motiver l'emploi des grammaires hors contexte comme outil mathématique de prédilection pour aborder une étape spécifique de la compilation, celle de l'analyse syntaxique. Cela fait, nous explorerons les propriétés théoriques des grammaires hors contexte et évoquerons leur emploi dans le cadre des langages naturels.

Une bonne partie du cours est passée à intuiter la notion de grammaire hors contexte et à l'utiliser du point de vue de l'informaticien. Les exercices de ces sections sont donc moins rigoureux et sont plus à prendre comme des invitations à la réflexion.

Programmes et compilation

En simplifiant énormément les choses, un ordinateur peut être vu comme deux composants principaux. D'une part, une mémoire, qui contient des informations sous forme d'une liste d'octets, chaque octet ayant une adresse (un nombre entier qui sert à identifier l'endroit où il se trouve en mémoire) et une valeur (un entier entre 0 et 255, qui est le contenu de l'octet). La mémoire contient les programmes que l'ordinateur peut exécuter, et les données qui sont envoyées à ces programmes. D'autre part, un processeur, qui réalise les calculs et les manipulations de données nécessaires au fonctionnement de l'ordinateur. Ce processeur peut faire des opérations de base, telles qu'additionner, multiplier, soustraire, diviser ou comparer des entiers. Il possède une petite quantité de mémoire pour stocker les arguments des opérations qu'il effectue.

La plupart des ordinateurs utilisent une architecture de Von Neumann : les programmes sont stockés identiquement aux données en mémoire. Le processeur lit la mémoire à l'endroit ou le programme est stocké, interprète ce qu'il lit comme une commande pour effectuer une instruction précise, lit les arguments de cette instruction dans les octets suivants puis effectue l'instruction, il lit l'octet suivant qu'il interprète comme une nouvelle instruction, et répète ce processus. Le processeur possède donc également une mémoire pour retenir où il en est dans l'exécution d'un programme (quelle est l'adresse de l'octet où il doit lire l'instruction suivante).

Ecrire un programme revient à lister les opérations que le processeur doit faire. Cependant, décrire directement les opérations du processeur a plusieurs défauts. Comme le processeur ne peut réaliser que des opérations élémentaires, tous les calculs plus complexes doivent être décomposés, ce qui rend les programmes écrits de cette manière très longs et obscurs. Le programmeur ne peut pas utiliser des structures de données plus complexes (telles que des ensembles) sans réimplémenter lui-même les opérations nécessaires à partir des opérations élémentaires fournies. Il doit également gérer lui-même l'accès à la mémoire. Pour toutes ces raisons, la programmation "en assembleur", dans un langage compréhensible par le processeur, est l'exception aujourd'hui et n'est utilisée que dans des circonstances très particulières.

A partir de la fin des années 50, les programmeurs commencent à concevoir des langages de programmation *de haut niveau*, Fortran étant le premier. Ceux-ci permettent d'utiliser directement des opérations, des structures de données et des structures de contrôle du flux d'un programme (par exemple, le langage $C++$ fournit la classe `std::set` pour modéliser des ensembles). Il est donc nettement plus aisé, et plus agréable, de rédiger des programmes courts et clairs dans un langage de haut niveau.

Un problème se pose alors : les processeurs ne sont pas capables de comprendre ces langages de haut niveau. Il faut donc un dispositif automatique capable de comprendre la structure du programme écrit dans un langage de haut niveau et d'en écrire un équivalent qui soit compréhensible par le processeur. Ce dispositif est un *compilateur*.

Dans la suite, nous nous concentrerons sur une partie de la tâche d'un compilateur : l'analyse syntaxique, qui permet au compilateur de mettre en évidence la structure du programme (quels éléments sont arguments de quelles opérations, dans quelle ordre les opérations doivent être effectuées, quelles erreurs syntaxiques éventuelles ou formes douteuses sont présentes,...). Nous aimerions que cette tâche puisse être faite de manière fiable, et de préférence rapidement. Nous allons trouver un outil particulièrement intéressant en les *grammaires hors contexte*.

Exercice 1
Quelle pourrait être la structure des morceaux de programme suivants ?

— `1+2*3^4+5`

— `if n>0 {return n*f(n-1)} else {return 1}`

— `if cond1 then if cond2 then bloc1 else bloc2`

— `if 3=4 then 1 else 0`. Considérer le cas où = est une assignation et celui où c'est un test d'égalité.

Solution de l'exercice 1
On peut proposer les structures suivantes. Bien entendu, ce ne sont pas les seules possibles puisque nous n'avons pas spécifié la syntaxe du langage sous-jacent, mais les propositions ci-dessous sont raisonnables. La structure en arbre permet de spécifier la hiérarchie entre les différents morceaux du programme.

— La figure 4 propose deux structures. Celle de gauche utilise une étiquette "expression" pour désigner tout ce qui est une expression arithmétique, et place les opérateurs comme arguments de l'expression, tandis que celle du milieu place les opérateurs comme étiquette de l'arbre. De plus, celle de gauche suppose que le $+$ est associatif à gauche, tandis que celle du milieu ne suppose pas d'associativité, le prix à payer étant un nombre variable de fils pour les noeuds de l'arbre. Remarquons cependant qu'il est possible de transformer un arbre exprimé sous la première forme en un arbre exprimé sous la deuxième et vice versa a posteriori, sans plus connaître les programmes dont les arbres sont issus. Ceci est fait sur l'arbre de droite.

  Remarquons que l'arbre de gauche est tel que la lecture de ses feuilles dans l'ordre rend le code original. Les arbres reflètent bien la structure du programme ; on peut effectuer le calcul de la manière suivante. On rajoute à tous les noeuds, sauf les noeuds qui ont une opération comme étiquette dans l'arbre de gauche, une étiquette qui contiendra le résultat du calcul se trouvant sous ce noeud, puis on remplit les étiquettes du bas vers le haut, le résultat d'un seul nombre étant le nombre lui-même. Le résultat du calcul est alors la nouvelle étiquette de la racine.

— Ce morceau de code permet le calcul récursif de la factorielle d'un entier n. La figure 5 représente une structure possible du programme. Il est possible d'arriver à différents

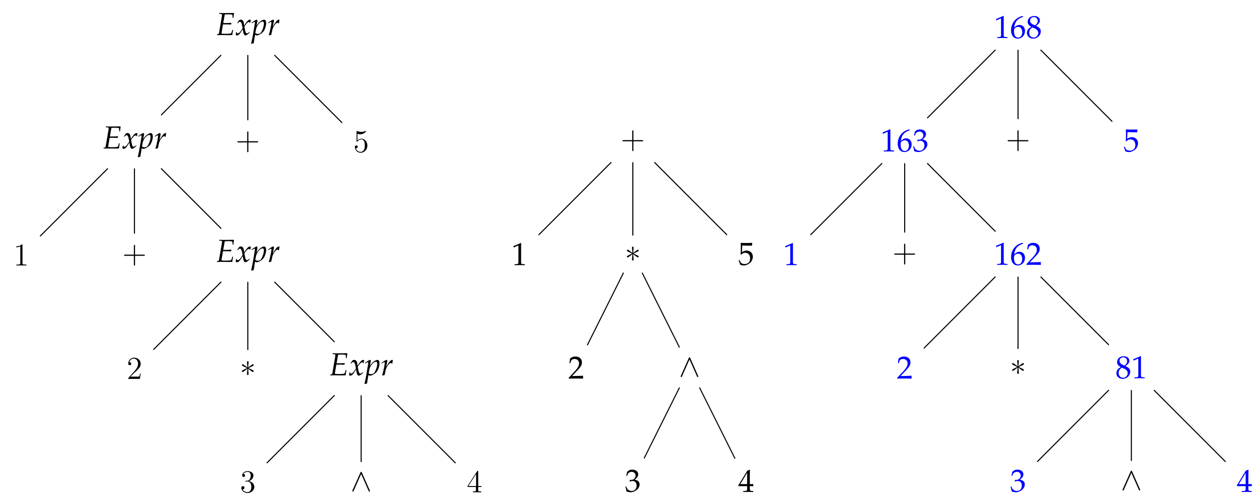


FIGURE 4 – Parsing d'une expression arithmétique

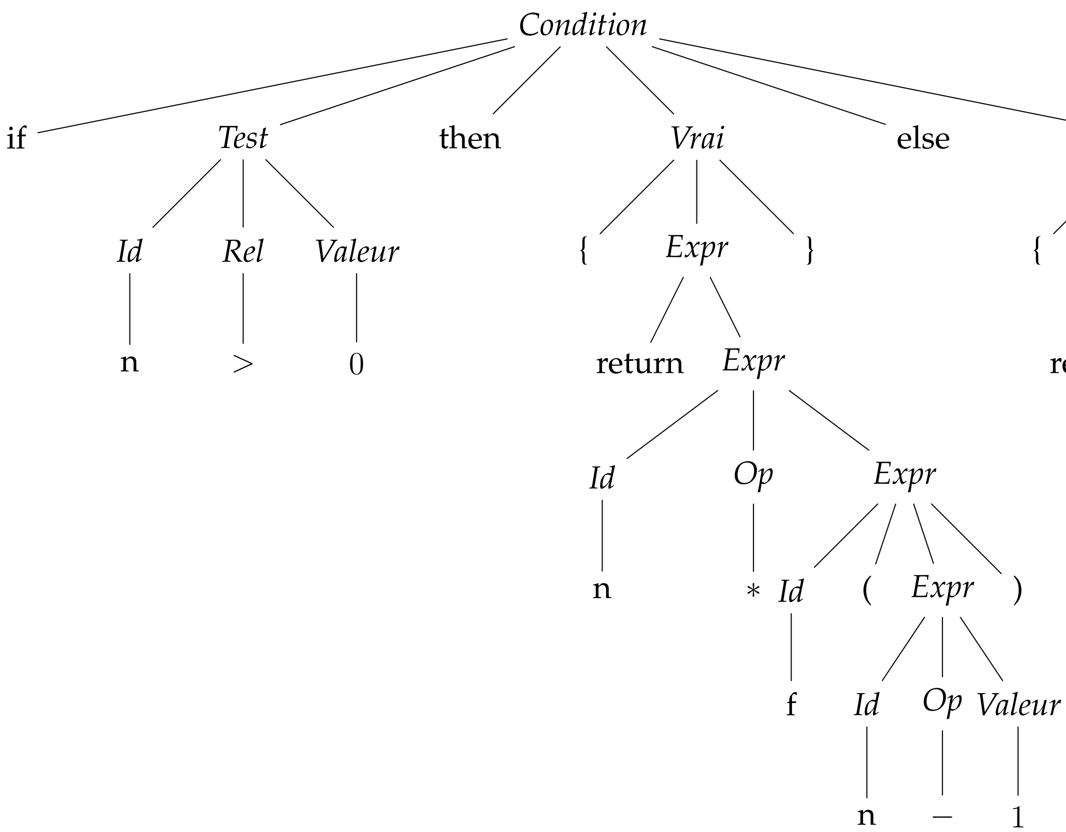


FIGURE 5 – Parsing d'un calcul de factorielle

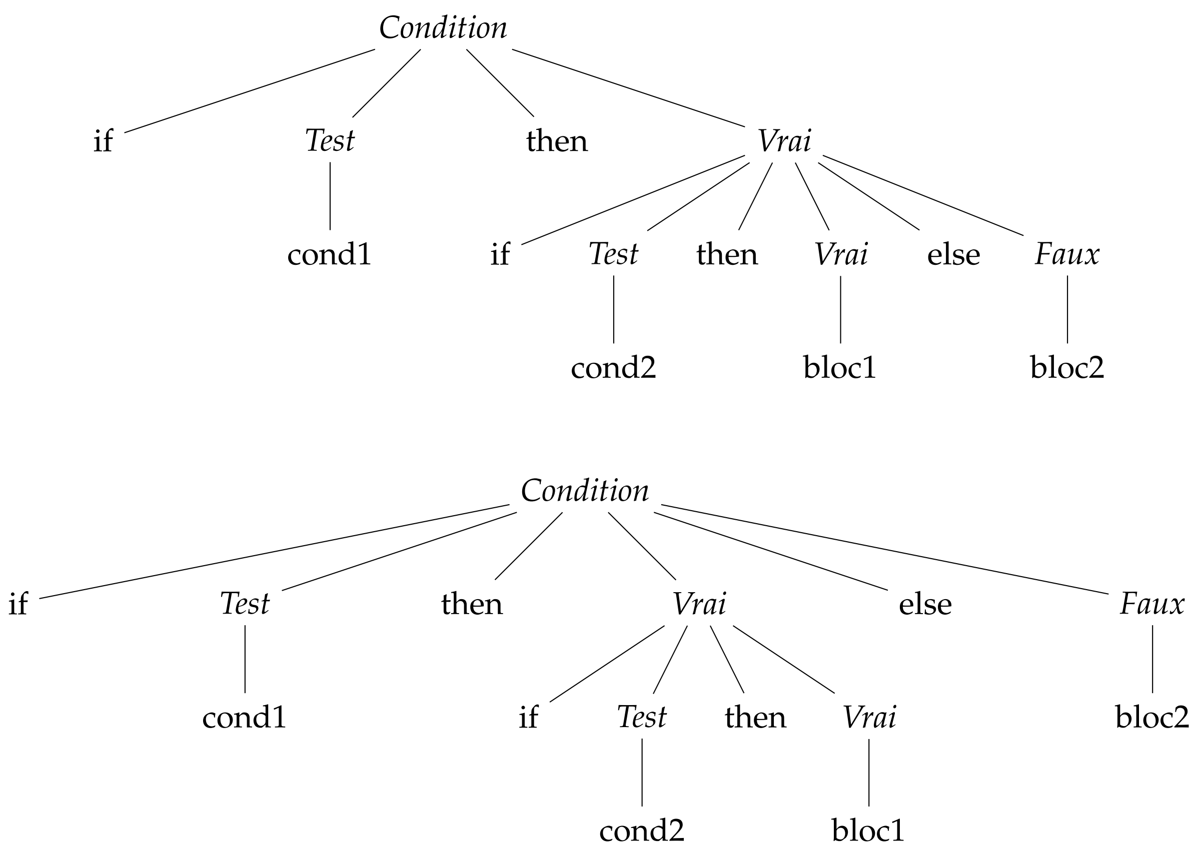


FIGURE 6 – Problème du Dangling else

niveaux de simplification de l'arbre en remplaçant des noeuds n'ayant qu'un seul fils par ce fils.

— Deux arbres possibles sont illustrés à la figure 6. Nous avons supposé que la structure d'une conditionnelle était "if *Test* then *Vrai* else *Faux*" où *Vrai* et *Faux* sont les instruction à exécuter quand *Test* est vrai ou faux, respectivement. De plus, nous avons supposé que la partie "else *Faux*" était optionnelle. On arrive alors à deux arbres possibles. Ceci est une marque d'ambiguïté et sera rediscuté dans la suite. C'est problématique pour un langage de programmation que le même programme puisse être interprété de deux façons différentes. Ce problème porte le nom de *dangling else* et nécessite une intervention particulière du concepteur de la langue pour être résolu.

— L'objectif de cet exemple est de montrer que le même morceau de code peut avoir des interprétations différentes selon la spécification du langage faite par le concepteur. Dans certains langages, le signe $=$ représente une assignation : la variable à gauche du $=$ prend la valeur à droite jusqu'à nouvel ordre. Dans un tel contexte, le morceau de code présenté ci-dessus est problématique puisqu'il n'est pas possible d'assigner une valeur à la constante 3 (ce n'est pas une variable). Dans ces conditions, le compilateur devrait refuser de compiler le programme et présenter un message d'erreur permettant au programmeur de comprendre le problème (par exemple "Valeur non assignable au membre de gauche d'une égalité") . On pourrait imaginer également que l'assignation soit une opération qui renvoie vrai si elle a pu être effectuée correctement et faux sinon, auquel cas le code présenté est parfaitement correct et produit l'arbre de la figure 7. Dans

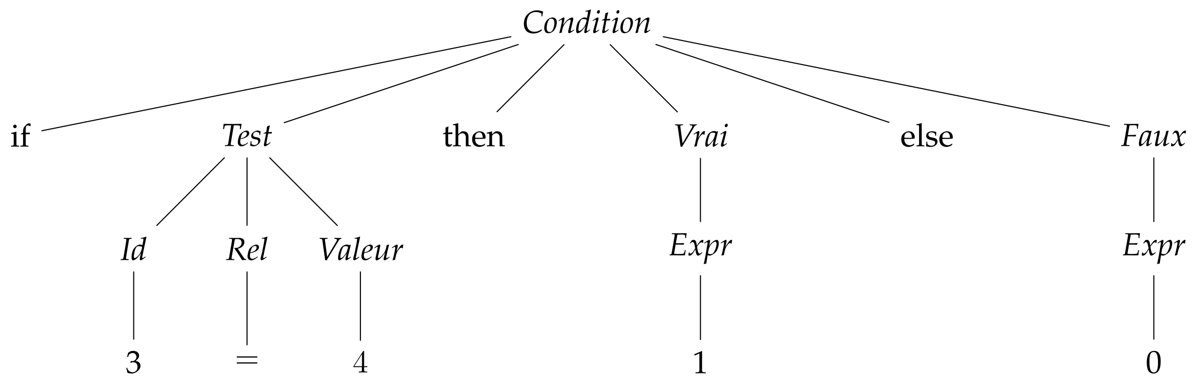


FIGURE 7 – Considérations syntaxiques

d'autres langages, l'opérateur $=$ est un test d'égalité, auquel cas l'arbre de la figure 7 est produit.

Langages et grammaires

Dans cette section, nous prenons le problème par l'autre bout et définissons l'objet mathématique que nous utiliserons par la suite.

Définition 1.

— Un *alphabet* est un ensemble fini de symboles, qui sont appelés les *lettres*.

— Un *mot* sur un alphabet A est une suite de lettres de A. Il est noté $a_1 \dots a_l$ si sa i-ème lettre est a_i, et l est sa *longueur*.

— Il y a un unique mot de longueur 0, noté ε et appelé *mot vide*.

— Les mots sont munis de l'opération de concaténation, qui est une opération binaire associative. On a
$$(a_1 \dots a_m)(b_1 \dots b_n) = a_1 \dots a_m b_1 \dots b_m.$$

— L'ensemble de tous les mots sur A est noté $A^\star$.

— Un *langage* est un sous-ensemble de $A^\star$.

Remarquons que dans notre contexte, les symboles d'espacement et de retour à la ligne font partie des lettres, et un mot peut donc contenir plusieurs lignes (dans notre contexte, un programme tout entier est vu comme un seul mot). Un langage peut être vu comme un filtre, qui trie les "bons programmes" (mots appartenant au langage) des "mauvais programmes" (mots n'appartenant pas au langage). Le problème qui nous intéresse demande en particulier de déterminer de manière automatique si un programme particulier est correct.

Il nous faut donc un objet mathématique qui permet, pour un mot d'entrée donné, de déterminer si oui ou non il est dans un langage précisé à l'avance. Tous les langages n'admettent pas un tel objet : si le langage est obtenu en tirant au sort l'appartenance de chaque mot ou non, la seule façon de décider si un mot donné appartient au langage est de retenir la liste complète des mots du langage, qui est probablement infinie. IL n'y a donc pas d'algorithme fini permettant de répondre à la question de l'appartenance à un tel langage.

De plus, il serait intéressant que cet objet permette, lorsque le mot soumis appartient bien au langage, d'obtenir une description de la structure du mot ou une décomposition en différents éléments. Nous introduisons les grammaires hors contexte, qui sont l'objet adapté à ce problème.

Définition 2.
Une *grammaire hors contexte* est la donnée d'un quadruplet (V, Σ, S, R) où

— V est le vocabulaire de la grammaire, c'est un ensemble fini de symboles qui seront manipulés par la grammaire.

— Σ est l'ensemble des symboles terminaux. Dans notre contexte, c'est l'ensemble des lettres des programmes étudiés. Les symboles de $V \backslash \Sigma$ sont les symboles non-terminaux, qui sont des symboles "de travail" utilisés par la grammaire pour désigner des structures intermédiaires.

— S est le symbole initial (*Start* ou *Sentence*), qui est le point de départ de la grammaire en même temps que la structure la plus général (c'est un élément de $V \setminus \Sigma$).

— Enfin, R est l'ensemble des règles de la grammaire, qui permettent de manipuler les différents niveaux de structure. Une règle s'écrit $A \to w$ où A est un symbole non-terminal et w est une suite de symboles terminaux ou non, qui peut être vide.

Les règles permettent de remplacer successivement des structures par des structures de plus en plus élémentaires, jusqu'aux symboles terminaux qui ne peuvent plus être remplacés.

Définition 3.

— Il existe une *dérivation en une étape* d'un mot u vers un mot v sur $V^\star$ s'il existe une règle $A \to w$ et des mots y et z sur $V^\star$ tels que

$$u = yAz \text{ et } v = ywz.$$

— Il existe une *dérivation* d'un mot u vers un mot v si $u = v$ ou s'il existe des mots $w_1, \dots w_n$ tels qu'il existe une dérivation en une étape de u vers w_1, de w_i vers w_{i+1} pour tout i entre 1 et $n-1$ et de w_n vers v. La *longueur* d'une telle dérivation est $n+1$.

— Le *langage* engendré par une grammaire $G = (V, \Sigma, S, R)$ est l'ensemble des mots w tels qu'il existe une dérivation du mot d'une lettre S vers w.

Exemple 4.
Considérons la grammaire formée des symboles $S, E, (,), [,]$ parmi lesquels $(,), [,]$ sont terminaux et S est initial, et des règles

$$\begin{aligned} S &\to E \\ E &\to EE \\ E &\to (E) \\ E &\to [E] \\ E &\to \varepsilon \end{aligned}$$

Les quatre dernières lignes seront plus succinctement notées

$$E \to EE|(E)|[E]|\varepsilon.$$

Le mot $([\,]([\,]))$ fait partie du langage, une de ses dérivations étant

$$\begin{aligned} S &\to E \\ &\to (E) \\ &\to (EE) \\ &\to ([E]E) \\ &\to ([\,]E) \\ &\to ([\,](E)) \\ &\to ([\,]([E])) \\ &\to ([\,]([\,])). \end{aligned}$$

D'un autre côté, le mot (((ne fait pas partie du langage, puisque chaque dérivation qui produit une lettre (produit également une lettre). On se convainc assez facilement que le langage généré par la grammaire est celui des mots "bien parenthésés" (toute parenthèse ouvrante est fermée par une parenthèse fermante, tout crochet ouvrant est fermé par un crochet fermant).

Le lecteur familier de la théorie des automates finis pourra constater que les grammaires hors contexte sont plus puissantes que les automates finis, au sens où elles permettent de générer des langages qui ne sont pas générables par des automates finis. Pour bien faire, il faudrait prouver que tout langage généré par un automate fini l'est également par une grammaire hors contexte. Nous y reviendrons.

Le lecteur familier des langages de programmation pourra lui comprendre pourquoi cet outil est adapté à la situation qui nous occupe. En effet, les langages de programmation ont souvent recours à des parenthésages (par des parenthèses ou par des mots clés tels que `do...while` et `if...then`) pour déterminer la structure des programmes, et il est donc rassurant que notre outil soit à même de décider si un parenthésage est bon ou non.

Exercice 2
Les formules de logique propositionnelle sont définies comme suit. Il existe des formules atomiques, qui sont représentées par les lettres minuscules p, q, r (pour simplifier, on n'utilise que ces trois lettres, mais en général n'importe quelle lettre, éventuellement indicée, de l'alphabet latin peut être utilisée). Si φ est une formule, la négation de φ est une formule notée $\neg\varphi$. Si φ et ψ sont des formules, la conjonction des deux est une formule, notée $\varphi \wedge \psi$. Si φ et ψ sont des formules, la disjonction des deux est une formule, notée $\varphi \vee \psi$. On peut utiliser des parenthèses pour supprimer des ambiguïtés.

Proposez une grammaire hors contexte générant les formules de logique propositionnelle. La gestion des parenthèses vous est laissée libre.

Exercice 3
Proposez une grammaire hors contexte servant de base à une calculatrice élémentaire. Une telle grammaire devrait générer des calculs utilisant des nombres entiers et les signes

$+, -, *, /$ et $(,)$ si vous le désirez. Par exemple, la grammaire doit pouvoir générer $1+2*3*4$ mais pas $3*+4$.

Exercice 4
Les opérations arithmétiques peuvent être notées en notation suffixée, l'opérateur étant écrit après les opérandes. Proposez une grammaire hors contexte servant de base à une calculatrice élémentaire en notation suffixée.

Arbres d'analyse

Dans cette section, nous expliquons comment les grammaires hors contexte permettent de retrouver la structure d'un mot. La représentation visuelle de choix sera l'arbre d'analyse.

Définition 5.
Un *arbre d'analyse* est un graphe associé à une dérivation de la manière suivante. Si on a une dérivation

$$u \to w_1 \to \ldots \to w_n \to v,$$

on commence par un graphe où les sommets sont étiquetés par les symboles de u de gauche à droite, sans aucun arc. Ensuite, pour chaque règle apliquée, si cette règle est $A \to x$, on ajoute des sommets étiquetés par $x_1, \ldots, x_n$ de gauche à droite, et des arcs allant de la feuille étiqutée A correspondant à celle sur laquelle la règle a été appliquée à ces nouveaux sommets. On obtient ainsi une forêt (qui est un arbre si u est de longueur 1) d'arbres orientés, enracinés et étiquetés.

Exemple 6.
L'arbre d'analyse de la dérivation de l'exemple 4 est présenté à la figure 8. Nous avons pris la convention d'expliciter les dérivations produisant ε par souci de clarté, mais selon la définition proprement dite les noeuds qui produisent ε ne devraient simplement pas avoir de fils.

Comme la grammaire est hors contexte, l'ordre d'application des différentes règles ne modifie pas le mot obtenu, tant que ces règles sont aplliquées aux mêmes symboles. Une dérivation obtenue en changeant l'ordre d'application des règles fournit le même arbre d'analyse.

Exemple 7.
En reprenant l'exemple 4, le mot $([\,]([\,]))$ peut aussi être obtenu par la dérivation

$$\begin{aligned} S &\to E \\ &\to (E) \\ &\to (EE) \\ &\to (E(E)) \\ &\to (E([E])) \\ &\to (E([\,])) \\ &\to ([E]([\,])) \\ &\to ([\,]([\,])). \end{aligned}$$

Cette dérivation produit le même arbre d'analyse.

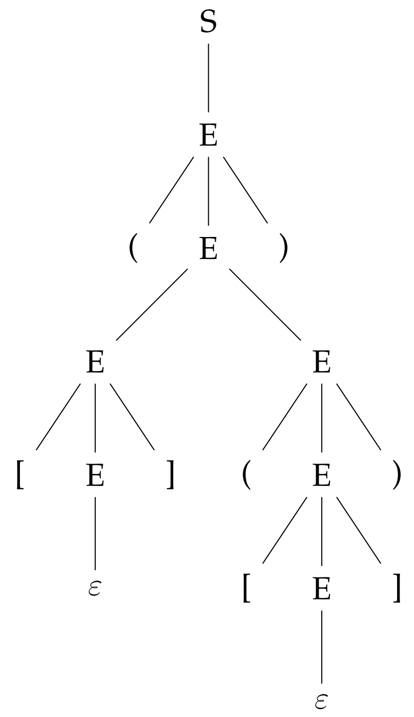


FIGURE 8 – Arbre d'analyse d'un parenthésage

Parmi toutes les dérivations associées à un arbre d'analyse, il est possible d'en définir deux canoniques. Comme l'ordre dans lequel on applique les règles n'importe pas, on peut choisir de toujours appliquer une règle au symbole non-terminal le plus à gauche. On obtient alors une *dérivation à gauche*, comme dans l'exemple 6. De même, on peut dériver toujours le symbole non-terminal le plus à droite, on obtient une dérivation à droite, comme dans l'exemple ci-dessus. Chaque arbre possède une unique dérivation à gauche (resp. à droite) associée.

Il est possible que deux dérivations vraiment différentes existent pour le même mot. Dans ce cas, la grammaire est dite *ambigüe*.

Exemple 8.
Cobsidérons la grammaire

$$\begin{aligned} &S \to E \\ &E \to E + E \mid E * E \mid \mathbf{n} \end{aligned}$$

où **n** est supposé désigner un entier. Cette grammaire est ambigüe, car l'expression $1 + 2 * 3$ possède les deux arbres d'analyse

issus des deux dérivations

$$S \to E \to E + E \to 1 + E \to 1 + E * E \to 1 + 2 * E \to 1 + 2 * 3$$

et

$$S \to E \to E * E \to E * 3 \to E + E * 3 \to 1 + E * 3 \to 1 + 2 * 3.$$

Dans notre contexte, l'ambiguïté est à éviter absolument, puisque le même programme pourrait être interprété de plusieurs manières différentes. Par exemple, une calculatrice élémentaire utilisant la grammaire ci-dessus donnerait au calcul $1 + 2 * 3$ la réponse 7 avec la

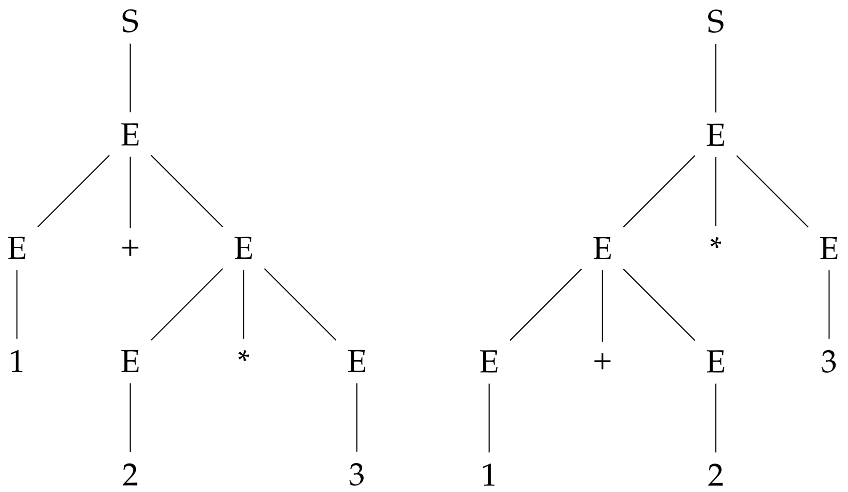


FIGURE 9 – Une grammaire ambiguë

première dérivation et 9 avec la deuxième dérivation. Il faut alors soit modifier directement la grammaire pour supprimer l'ambiguïté, ce qui la rend plus complexe et moins lisible, ou bien régler le problème au niveau des algorithmes gérant l'analyse syntaxique proprement dite, par exemple en donnant différentes priorités aux règles et en forçant le compilateur à en utiliser certaines avant d'autres. Des outils existent également qui permettent de spécifier une grammaire ambiguë et différentes règles extérieures à la grammaire pour supprimer l'ambiguïté (priorité, associativité,...) et génèrent directement la grammaire non-ambiguë correspondante.

Pour créer de manière effective une grammaire générant un langage de programmation, il n'y a pas d'autre choix que de procéder pas à pas manuellement. Plus le langage propose des abstractions fortes et des possibilités syntaxiques, plus la grammaire sera compliquée. Un exemple effectif est donné dans l'article de John Backus cité dans les références de ce cours.

Algorithme de dérivation CYK

Jusqu'ici, nous avons montré que des grammaires pouvaient générer des langages de programmation, et que les dérivations associées à de telles grammaires porduisaient des arbres qui reflètent bien la structure de ces programmes. Nous n'avons cependant pas expliqué comment obtenir vérifier si un mot est dans le langage d'une grammaire, ni comment trouver une dérivation de ce mot le cas échéant, et encore moins comment trouver dfficacement cette dérivation. C'est l'objet de cette section.

Les algorithmes principaux sont l'algorithme CYK (Cocke-Younger-Kasami) qui permet toujours d'obtenir une dérivation ou la non-appartenance d'un mot au langage d'une grammaire, mais qui est très lent, et les algorithmes associés aux langages LL et LR, qui ne fonctionnent que sous certaines hypothèses sur la grammaire mais sont beaucoup plus rapides, ce qui les rend plus utiles en pratique. Les techniques de "grammar hacking" qui permettent de transformer une grammaire pour lui appliquer un algorithme de type LL ou LR, sont aussi particulièrement pratiques.

Détaillons l'algorithme CYK. Il nécessite que la grammaire soit présentée sous une certaine forme, appelée *forme normale de Chomsky*.

Proposition 9.
Si G est une grammaire, il existe une grammaire équivalente (générant le même langage) $G' = (V', \Sigma, S', R')$ telle que toutes les règles de R' sont de la forme

- $A \to BC$ avec $B, C \in V \setminus (\Sigma \cup \{S'\})$ ou
- $A \to a$ avec $a \in \Sigma$ ou
- $S' \to \varepsilon$.

Démonstration. La preuve est constructive, et procède en cinq étapes.

Duplication du symbole initial : Pour éviter que le symbole initial soit au membre de droite d'une des règles, on crée un nouveau symbole S' et on rajoute la règle $S' \to S$, où S était l'ancien symbole initial. Le langage généré ne change pas (l'ajout de $S' \to S$ en tête de dérivation est une bijection entre les dérivations de l'ancienne et de la nouvelle grammaire).

Suppression des mots vides aux seconds membres de règles : Il faut éviter que ε apparaisse comme membre de droite d'une règle, sauf peut-être $S' \to \varepsilon$. On calcule d'abord l'ensemble des variables effaçables, symboles A tels qu'il existe une dérivation de $A*$ vers ε. Pour cela, on applique la procédure suivante : initialement, l'ensemble des variables effaçables est vide. Puis, on lui ajoute toutes les variables qui sont le membre de gauche d'une règle avec ε au membre de droite. Ensuite, tant que l'ensemble a été modifié à l'étape précédente on lui ajoute toutes les variables qui sont le membre de gauche d'une règle qui ne contient que des variables effaçables au membre de droite. Quand ce processus s'arrête (et il s'arrête), l'ensemble accumulé est bien celui cherché.

Ensuite, on remplace simultanément toutes les variables effaçables dans des membres de droite de règles par elles-mêmes ou ε (par exemple, si A et B sont effaçables, la règle $X \to AaABc$ est remplacée par les huit règles

$$X \to AaABc|aABc|AaBc|AaAc|Aac|aAc|aBc|ac.$$

Cette opération ne change pas la grammaire. Enfin, on applique le processus suivant : on élimine toutes les règles où le membre de droite est ε (sauf éventuellement $S' \to \varepsilon$, puis toutes les symboles non-terminaux qui ne sont plus membre de gauche d'aucune règle sont effacés de toutes les règles et de V (ce qui peut faire apparaître ε comme membre de droite de nouvelles règles), puis on répète tant que des nouveaux effacements ont lieu. Ce processus ne modifie pas le langage de la grammaire, il se termine et la grammaire finale ne contient pas de règle dont le membre de droite est ε (sauf si le membre de gauche est S').

Suppression des réécritures de symboles : les règles du type $A \to B$ avec A, B non-terminaux ne sont pas très intéressantes. Nous pouvons les supprimer de la manière suivante. On crée un graphe orienté dont $V \setminus \Sigma$ est l'ensemble des sommets et où un arc relie A à B si $A \to B$ est une règle. Puis, on retire à la grammaire toutes les règles $A \to B$ et on ajoute toutes les règles

$A \to w : w \notin V \backslash \Sigma,\ \exists C : C \to w \in R$ et il existe un chemin de A vers C dans le graphe construit.

Séparation des symboles dans les membres de droite des règles : Puisqu'on veut des règles qui produisent des symboles non-terminaux et d'autres qui produisent un terminal, on remplace chaque règle de la manière suivante Pour chaque terminal w au membre de droite d'une règle, on introduit un nouveau symbole non-terminal W propre à cette occurrence de w, on introduit la règle $W \to w$ et on remplace cette occurrence de w par W

dans la règle de départ. Après cette opération, tous les membres de droites sont soit ε, soit un seul terminal, soit plusieurs non-terminaux.

Remplacement d'une règle de longueur n par $n-1$ règles de longueur 2 : Pour conclure, il suffit d'appliquer la procédure suivante : chaque règle $X \to A_1 \dots A_n$ est remplacée par

$$X \to A_1 X_2, X_2 \to A_2 X_3, \dots, X_{n-1} \to A_{n-1} A_n$$

où tous les X_i sont nouveaux et propres à cette règle.

Après ces étapes, le langage n'a pas changé et la grammaire est sous la forme annoncée.
□

L'algorithme CYK permet, à partir d'une grammaire G sous forme normale de Chomsky et d'un mot non-vide w, de déterminer si w est dans le langage généré par G et, le cas échéant, de trouver un arbre d'analyse de w. Il procède par *programmation dynamique*, une méthode de résolution qui se rapproche d'un raisonnement par récurrence et dans laquelle on résout le problème posé en construisant des solutions à des sous-problèmes de taille croissante. Ici, si $w = w_1 \dots w_n$, le sous-problème $P[i,j]$ est de trouver l'ensemble $E[i,j]$ des symboles non-terminaux X tels qu'il existe une dérivation de X vers $w[i,j] = w_i \dots w_j$, et les arbres de dérivation associés.

Comme la grammaire est sous forme de Chomsky, il n'existe que des règles du type $A \to a$ ou $A \to BC$. Les premières fourniront le "cas de base", les secondes l'"induction" : Pour tout i, $E[i,i]$ est l'ensemble des X tels que $X \to w_i$ est dans la grammaire, et les arbres associés sont restreints à leur racine qui est étiquetée par X. Donnons-nous maintenant $i < j$. Pour chaque non-terminal X, X est dans $E[i,j]$ si, et seulement si, il existe un k entre i inclus et j exclus et des symboles non-terminaux B, C tels que $X \to BC$, $B \in E[i,k]$ et $C \in E[k+1,j]$. On peut donc construire $E[i,j]$ en temps linéaire en fonction de $i-j$ dès que les ensembles E "de longueur plus petite" sont connus. De plus, pour chaque triplet k, B, C décrit ci-dessus, on peut associer à la dérivation correspondante l'arbre de racine X, dont la racine a deux fils étiquetés B et C qui sont racines d'arbres isomorphes à ceux qui avaient été associés aux deux dérivations de B vers $w_i \dots w_k$ et C vers $w_{k+1} \dots w_j$.

Au final, on peut construire $E[i,j]$ en procédant par valeurs croissantes de $j-i$ et trouver des arbres dès qu'une dérivation existe. Il suffit alors de consulter $E[1,n]$: S en fait partie si et seulement si w fait partie du langage, auquel cas on obtient de surcroît un arbre d'une dérivation de w (et on obtient même tous les arbres possibles).

Cet algorithme fonctionne pour tous les langages associés à des grammaires (puisqu'il ne nécessite qu'une forme normale de Chomsky, ce qui est toujours possible). Cependant, il est nécessaire de résoudre à peu près $\frac{n^2}{2}$ problèmes, chacun en temps linéaire. L'algorithme est donc cubique, et devient rapidement trop lent pour des mots trop longs.

Algorithme de dérivation LL(1)

Les algorithmes LL(k) (tables prédictives) et LR(k) (décalage-réduction) permettent de régler le problème de la lenteur (ils tournent en temps linéaire) mais nécessitent une grammaire sous forme particulière, ce qui n'est pas toujours possible pour un langage donné.

Nous détaillons l'algorithme LL(1) (Left-to-right parse, Leftmost derivation, 1 token of lookahead). L'idée est la suivante : on va parcourir le mot à tester de gauche à droite et créer une dérivation à gauche de ce mot, en obtenant l'arbre d'analyse de la racine vers les feuilles (top-down, par opposition au CYK). Dans ce cas, à tout moment la dérivation que l'on construit commence par une suite de terminaux qui est un préfixe du mot à tester. Le symbole suivant dans la dérivation est un non-terminal X. Le symbole suivant dans le mot à tester est un terminal a. Plusieurs règles peuvent être appliquées pour remplacer X, mais notre espoir est de pouvoir en choisir une de manière certaine grâce à l'information que a est le premier terminal du mot non encore obtenu. Dans le cas de LL(k), on s'autorise à regarder les k symboles suivants dans le mot ciblé.

Si cet espoir était toujours vérifié, on pourrait appliquer l'algorithme suivant. On commence avec deux listes, une liste cible initialisée au mot à tester et une liste source initialisée au seul symbole S. On regarde le premier élément de chaque liste, on déduit la règle qui doit être appliquée, puis on remplace le premier symbole de la liste source par le membre de droite de la règle utilisée. Ensuite, tant qu'on voit deux terminaux identiques en tête des deux listes on les efface des deux listes. Si cette procédure se termine avec deux listes vides, le mot fait partie du langage et on en connaît une dérivation. Si à un moment aucune règle n'est applicable au vu du prochain symbole de chaque liste, ou si à un moment les premiers symboles de chaque liste sont deux non-terminaux différents, on arrête l'algorithme et on sait que le mot testé n'est pas dans le langage de la grammaire.

Il reste à déterminer quand notre espoir est fondé. Ceci peut se vérifier constructivement pour une grammaire donnée. On reprend l'ensemble des symboles effaçables vu dans la preuve de la proposition 9, et on dit qu'un mot sur V est effaçable s'il n'est constitué que de non-terminaux effaçables. On introduit alors l'ensemble $first(A)$, pour un non-terminal A, qui est l'ensemble des terminaux a qui peuvent commencer un mot produit par une dérivation commençant en A. Celui-ci est construit simultanément pour tous les non-terminaux de la manière suivante. On commence par initialiser tous les $first(X)$ à l'ensemble vide et $first(a)$ à $\{a\}$ pour chaque lettre a, puis pour chaque règle $A \to w$ et chaque couple (u, v) de mots de V tels que $uv = w$, si u est effaçable on ajoute $first(v_1)$ à $first(A)$, et on répète jusqu'à ne rien ajouter (remarquons que ε est effaçable). On peut alors également définir $first(w)$ si w est un mot : c'est l'union des $first(w_i)$ tels que $w_1 \dots w_{i-1}$ est effaçable. D'autre part, on introduit l'ensemble $follow(A)$, qui pour tout non-terminal A est l'ensemble des terminaux a tels que a peut suivre A dans une dérivation commençant en S. Pour le construire, on procède de la manière suivante. On initialise tous les $follow(X)$ et tous les $follow(a)$ à l'ensemble vide. Puis, pour chaque règle $X \to X_1 \dots X_n$ et chaque choix de i et j tels que $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$, si $X_{i+1} \dots X_n$ est effaçable on ajoute $follow(X)$ à $follow(X_i)$ et si $X_{i+1} \dots X_{j-1}$ est effaçable on ajoute $first(X_j)$ à $follow(X_i)$. On répète cette dernière étape tant que des changements se produisent.

Une fois ces deux ensembles obtenus, nous pouvons décider quand il est sensé d'appliquer une règle donnée. Si X est le premier non-terminal de la dérivation et si a est le premier terminal encore à obtenir, alors appliquer une règle $X \to w$ a du sens seulement si a est dans $first(w)$, ou bien si w est effaçable et si a est dans $follow(A)$, et dans aucun autre cas.

En appliquant cette construction, on peut déterminer si une grammaire se prête bien à notre algorithme. Ceci est le cas si pour chaque choix de X et de a, une seule règle est raisonnable. Remarquez que nous n'avons pas supposé la grammaire sous forme de Chomsky. Cela simplifierait considérablement l'algorithme mais avec l'effet secondaire que les arbres obtenus refléteraient peut-être moins la structure du programme que ceux obtenus à partir d'une grammaire non-transformée. Par exemple, certaines structures du langage (pensez aux conditions) peuvent être constituées de plus de deux composants. Un arbre obtenu à partir d'une grammaire sous forme de Chomsky ne reflétera alors pas forcément la syntaxe usuelle de ces structures. Cependant, ce genre de problème peut être réglé par une manipulation subséquente de l'arbre obtenu.

L'algorithme LL(1) ne fonctionne pas toujours. Les opérateurs associatifs à gauche sont particulièrement retors, car ils engendrent souvent des règles de la forme $A \to Aw$, que cet algorithme ne peut pas traiter sans risquer de tomber dans une boucle infinie. Ce problème peut se régler soit en changeant la grammaire pour qu'elle devienne adaptée à l'algorithme, ce qui a pour effet de créer à nouveau des arbres moins adaptés, qui doivent être transformés par après, ou bien en modifiant l'algorithme, par exemple en spécifiant des façons de départager des règles lorsque plusieurs choix sont possibles.

Enfin, mentionnons l'existence des algorithmes LR. Ceux-ci sont similaires aux algorithmes LL, ils fonctionnent en temps linéaire mais seulement pour certaines grammaires (différentes de celles qui se prêtent aux algorithmes LL). Dans les algorithmes LL, il faut deviner quelle règle appliquer avant de l'appliquer, en s'aidant seulement d'informations partielles sur ce qui est produit par la règle. Les algorithmes LR fonctionnent plutôt en lisant le mot jusqu'à reconnaître un membre de droite d'une règle, puis en remplaçant celui-ci par le membre de gauche de la règle correspondante, ce qui peut faire apparaître un membre de droite d'une nouvelle règle, qui sera alors remplacé,... Ces algorithmes génèrent donc l'arbre en partant des feuilles, et correspondent à des dérivations à droite (d'où le 'R' de LR). Certains conflits peuvent apparaître si par exemple deux membres de droite de règles sont suffixes l'un de l'autre, et on a la possibilité de dicter précisément les procédures pour résoudre ces conflits, ou bien de changer la grammaire pour qu'ils n'apparaissent plus. Nous renvoyons le lecteur intéressé à la littérature.

Références

A.Aho, M.Lam, R.Sethi, J.Ullman, *Compilers : Principles, Techniques and Tools*, 2eme édition, Pearson Education, 2007.

Ceci est la "bible" des compilateurs, ouvrage de référence de plus de mille pages expliquant toutes les étapes de la compilation d'un programme. Ce cours s'inspire des chapitres 1,2 et 4. Ce dernier explique, du point de vue de l'informaticien, ce qu'est une grammaire et comment s'en servir pour parser un programme avec les algorithmes LL et LR.

M.Rigo, *Théorie des automates et des langages formels*, notes de cours, université de Liège, 2009–2010.

Ce syllabus aborde les notions de ce cours du point de vue du mathématicien. Le chapitre 6 est consacré aux langages algébriques et aux grammaires.

J.Backus, *The syntax and semantics of the proposed international algebraic language of the Zurich ACM-GAMM conference*. IFIP Congress 1959.

Cet article décrit de fond en comble une grammaire proposée pour servir de base à une langage de programmation. J.Backus n'est pas étranger au problème puisqu'il est l'un des principaux concepteurs de FORTRAN, l'un des premiers langages de programmation de haut niveau.

N.Chomsky, Three Models for the Description of Language, *IRE Trans. Inf. Theory*, 2 :113–124, 1956.

N.Chomsky, On certain formal properties of grammars, *Information and Control*, 2(2) :137–167, 1959.

Bien que nous ne l'ayons pas évoqué dans ce cours, des recherches ont aussi été menées pour donner une structure formelle aux langages naturels (comme le français). Ces deux articles, par le linguiste (et plus si affinités) Noam Chomsky, sont parmi les premiers à tenter cette approche, le second étant nettement plus formel et rigoureux que le premier. Dans ces articles, comme dans celui de Backus, les notations et les notions ne sont pas exactement les mêmes que celles utilisées actuellement, mais sont tout de même reconnaissables.

2 Irrationalité de π (Alexander)

Nous avons démontré que π est irrationnel selon la preuve de Niven. Cette preuve a nécessité d'introduire des outils d'analyse comme la dérivation et l'intégration, notamment l'intégration par parties.

VI. Groupe D

Contenu de cette partie

1 Première partie : Arithmétique & Combinatoire

1 Arithmétique combinatoire (Théo)

L'objectif de cette séance était de regarder des problèmes de théorie des nombres avec des idées combinatoires. Les problèmes vont de problèmes de combinatoire placés discrètement en théorie des nombres à des problèmes utilisant juste des idées combinatoires simples (récurrence astucieuse/tiroirs/maximum).

Les exercices ne sont pas forcément classés par ordre de difficulté, mais plutôt dans un ordre d'intérêt (certains exercices ayant été vus pendant l'année par les élèves concernés) : les plus basiques sont les $1, 2, 5$, les exercices type IMO P1 sont $3, 4, 8, 9, 10, 17$, les exercices $6, 11, 12, 13, 14$ sont entre P1 et P2, les exercices $7, 15, 16$ sont signifcativement plus difficiles.

Exercice 1
Soit A un ensemble de 2022 entiers strictement positifs, dont tous les diviseurs premiers sont inférieurs à 30. Montrer qu'il existe a, b, c, d distincts dans A tel que $abcd$ soit un carré parfait.

Exercice 2
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Parmi une classe de n élèves numérotés de 1 à n, certains sont amis et d'autres ne le sont pas (la relation d'amitié est réciproque, et on ne peut être ami ou non ami avec soi même). Existe-t-il un entier $N \geqslant 1$ et une façon de donner à chaque élève un entier (noté a_i pour l'élève i) tel que i et j sont amis si et seulement si N divise $a_i a_j$.

Exercice 3
Alice et Bob jouent au jeu suivant : Alice écrit un entier strictement positif au tableau. A chacun de ses tours, Bob choisit un entier $a \geqslant 1$, et remplace l'entier n écrit au tableau par $n - a^2$. A chacun de ses tours, Alice choisit un entier $k \geqslant 1$, et remplace l'entier m par m^k. Bob commence : il gagne si au bout d'un nombre fini de tours, il réussit à écrire 0 au tableau, sinon Alice gagne. Lequel des deux joueurs a une stratégie gagnante ?

Exercice 4
Soit p un nombre premier et soient $a_1, \ldots, a_p$ des entiers. Montrer qu'il existe un entier k tel que les nombres

$$a_1 + k, a_2 + 2k, \ldots, a_p + pk$$

donnent au moins $\frac{1}{2}p$ restes distincts modulo p.

Exercice 5
Alice et Bob jouent au jeu suivant : Alice choisit un entier $n > 2$ et un entier c tel que $0 < c < n$. Elle écrit n entiers au tableau. Bob choisit une permutation $a_1, \ldots, a_n$ des entiers. Bob gagne si $(a_1 - a_2)(a_2 - a_3) \ldots (a_n - a_1)$ vaut 0 ou c modulo n. Qui dispose d'une stratégie gagnante ?

Les exos de l'année

Exercice 6
Soit $r > 1$ un rationnel. Alice joue au jeu suivant. Au départ, sur la droite réelle, il y a un pion rouge en 0 et un bleu en 1. A chaque coup, Alice choisit un entier k, et note x, y la position des

deux pions dans l'ordre qu'elle veut. Elle déplace alors alors le pion posé en y en y' tel que $y' - x = r^k(y - x)$. Alice gagne si elle peut déplacer le pion rouge en 1 en au plus 2021 coups.

Pour quels r Alice peut-elle gagner ?

Exercice 7
Déterminer tous les entiers n vérifiant la propriété suivante : si $a_1, \ldots, a_n$ sont des entiers dont la somme n'est pas divisible par n, alors il existe une permutation $(b_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ des $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ tel que n divise $b_1 + 2b_2 + \cdots + nb_n$.

Exercice 8
Soit $n \geqslant 100$. Ivan écrit les nombres $n, n+1, \ldots, 2n$ sur différentes cartes. Il mélange les cartes, et les divise en deux tas. Montrer qu'au moins une des piles contient 2 cartes dont la somme des numéros est un carré parfait.

Exercice 9
Soit $\mathcal{S}$ un ensemble infini d'entiers naturels non nuls contenant quatre entiers a, b, c, d deux à deux distincts tels que $\operatorname{pgcd}(a, b) \neq \operatorname{pgcd}(c, d)$. Démontrer que $\mathcal{S}$ contient trois entiers x, y, z deux à deux distincts tels que $\operatorname{pgcd}(x, y) = \operatorname{pgcd}(y, z) \neq \operatorname{pgcd}(z, x)$.

Pot pourri

Exercice 10
Un entier strictement positif N est dit joli si $N = 1$ ou si N s'écrit comme un produit d'un nombre pair de facteurs premiers (pas forcément distincts). Pour toute paire (a, b) d'entiers strictement positifs, on pose $P(x) = (x + a)(x + b)$.

a) Montrer qu'il existe des entiers strictement positifs distincts (a, b) tels que $P(1), P(2), \ldots, P(50)$ sont jolis.

b) Montrer que si $P(n)$ est joli pour tout entier $n > 0$, alors $a = b$

Exercice 11
Soit $p \geqslant 2$ premier, Alice et Bob jouent au jeu suivant. Chacun leur tour, en commençant par Alice, ils choisissent un $i \in \{0, \ldots, p-1\}$ et un nombre a_i dans $\{0, \ldots, 9\}$. Alice gagne si et seulement si le nombre $a_0 + 10a_1 + \cdots + 10^{p-1}a_{p-1}$ est divisible par p. Montrer qu'Alice a une stratégie gagnante.

Exercice 12
Déterminer tous les entiers n tels que, quelque soient les $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ tels que n ne divise pas leur somme, il existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tels que n ne divise pas $x_j, x_j + x_{j+1}, \ldots, x_j + \cdots + x_{j+n-1}$ (où les indices sont pris modulo n.

Exercice 13
Soit p un nombre premier. Tristan et Abigaëlle jouent au jeu suivant. Tristan écrit un entier $X \geqslant 1$ au tableau et donne une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 1 d'entiers strictement positifs à Abigaëlle. Abigaëlle joue alors une infinité de tours de jeu. Lors du $n^{ème}$tour de jeu,

Abigaëlle remplace, selon son choix, l'entier Y écrit au tableau par l'entier $Y + a_n$ ou par l'entier $Y \cdot a_n$.

Abigaëlle gagne si, au bout d'un nombre fini de tours de jeu, elle parvient à écrire au tableau un multiple de p. Déterminer si elle peut réussir à gagner quels que soient les choix initiaux de Tristan, dans chacun des deux cas suivants :

a) $p = 10^9 + 7$;

b) $p = 10^9 + 9$.

Remarque : On admettra que $10^9 + 7$ et $10^9 + 9$ sont premiers.

Exercice 14

Pour tout nombre premier p, il existe un royaume de p-Landia, qui contient p îles numérotées de 1 à p. Deux villes distinctes m et n sont alors reliées par un pont si p divise $(m^2 - n + 1)(n^2 - m + 1)$. Deux ponts peuvent se superposer, mais il est impossible de passer d'un pont à un autre directement.

Montrer qu'il existe une infinité de p pour lesquels il y a deux villes du royaume de p-Landia qui ne sont pas connectées par une suite de ponts.

Exercice 15

Soit n un entier strictement positif. Montrer que pour tout p premier assez grand, l'équation $x^n + y^n \equiv z^n \pmod{p}$ admet une solution $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ avec $xyz \not\equiv 0 \pmod{p}$

Exercice 16

Alice et Bob jouent au jeu suivant : Alice choisit un entier $k > 2$. Au départ, un entier $n \geqslant k$ est écrit au tableau. Chacun son tour, en commençant par Alice, ils remplacent l'entier m écrit au tableau par m' tel que $k \leqslant m' < m$ et m' est premier avec m. Le premier qui ne peut plus jouer perd.

Un entier n est dit alicien si Alice a une stratégie gagnante, bobesque sinon.

Soit l et l' deux entiers tel que, pour tout nombre premier $p \leqslant k$, p divise l si et seulement s'il divise l'. Montrer que soit l et l' sont tous les deux aliciens, soit ils sont tous les deux bobesques.

Exercice 17

Soit n un entier strictement positif. On suppose que ses diviseurs positifs peuvent être répartis par paires de telle sorte que la somme de chaque paire est un nombre premier. Prouver que ces nombres premiers sont tous distincts et qu'aucun d'eux ne divise n.

Solution de l'exercice 1

Notons qu'il y a 10 nombres premiers inférieurs ou égaux à 30. En particulier, à chaque nombre a dans A, on lui associe le 10-uplet composé des restes modulo 2 des $V_p(a)$ pour p premier inférieur à 30. Il y a $2^{10} = 1024$ possibilités donc par principe des tiroirs deux éléments de A qu'on note a et b ont le même 10-uplet, donc ab est un carré (car pour tout $p < 30$ premier, $V_p(ab) \equiv V_p(a) + V_p(b) \equiv 2V_p(a) \equiv 0 \pmod 2$).

Ensuite il suffit d'enlever a et b de A, réappliquer le même raisonnement permet de trouver c et d dont le produit est un carré. Ainsi $abcd$ est bien un carré.

Solution de l'exercice 2

On trace le graphe dont les sommets sont les entiers de 1 à n et deux sommets sont reliés si les élèves sont amis. On note $e_1, \ldots, e_k$ les arêtes du graphe complémentaire, et $p_1, \ldots, p_k$ des nombres premiers distincts. On pose $N = p_1 \ldots p_k$ et pour tout $1 \leqslant i \leqslant k$ a_i le produit des p_j tels que i n'est pas une extrémité de l'arête e_j.

Montrons que cela marche : soit e_l une arête non présente dans le graphe, i et j ses extrémités, p_l ne divise aucune des valeurs affectées aux extrémités de l'arête, donc N ne divise pas $a_i a_j$.

Soit e une arête du graphe, i, j ses extrémités, et $l \in \{1, \ldots, k\}$. Comme i et j ne peuvent être les deux extrémités de e_l (sinon $e_l = e$), p_l divise a_i ou a_j, donc p_l divise $a_i a_j$ pour tout l. Ainsi N divise $a_i a_j$ ce qui conclut.

Solution de l'exercice 3

Ici une bonne idée est de décomposer tout entier strictement positif n comme un carré fois un nombre squarefree : on remplace chaque valuation p adique de n par le plus petit entier pair inférieur ou égal à celle-ci pour obtenir un carré noté a^2 qui divise n et tel que $\frac{n}{a^2}$ est squarefree. De plus cette décomposition est unique : si $n = a^2 \times b = c^2 \times d$ avec b et d squarefree, on a $V_p(d) \equiv V_p(n) \equiv V_p(b) \pmod 2$ pour tout p premier, donc comme b et d sont squarefree $b = d$ et $a^2 = c^2$. On notera maintenant pour tout $n \geqslant 1$, $sf(n)$ sa partie squarefree.

Ici, si $m > 0$ est écrit au tableau les mouvements d'Alice peuvent soit transformer $s(m)$ en 1 si k est pair, soit en $s(m)$ si k est impair car $m^k = m \times \left(m^{(k-1)/2}\right)^2$, et le nombre sera toujours strictement positif. Il suffit donc à Bob de réussir à diminuer à chaque fois la partie squarefree du nombre écrit (et de garder le nombre strictement positif : ainsi au but d'un nombre fini de tour, la partie squarefree vaudra 1, et donc le nombre sera un carré, Bob pourra alors juste retirer le nombre lui-même. Pour cela, si $m = a^2 b$ est écrit au tableau, avec b sa partie squarefree et $b > 1$ (sinon Bob gagne directement en enlevant a^2), Bob peut retirer a^2 et obtenir $a^2(b-1) = a^2 \times \frac{b-1}{sf(b-1)} sf(b-1)$ dont la partie squarefree est donc $sf(b-1) \leqslant b-1 < b$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 4

La première chose à faire est de regarder à quelle condition deux nombres $a_j + jk$ et $a_i + ik$ donnent le même reste modulo p. Cette condition se réécrit

$$a_j + jk \equiv a_i + ik \mod p$$

$$k \equiv -\frac{a_i - a_j}{i - j} \mod p$$

Pour chaque k entre 0 et $p-1$, on trace le graphe G_k où les sommets sont les (a_i) et on relie a_i et a_j pour $i \neq j$ si $a_i + ik \equiv a_j + jk \pmod p$. L'égalité précédente montre que chaque arête n'est présente que dans un des G_k. Comme il y a p graphes et $\binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{2}$ arêtes, il existe un graphe avec au plus $\frac{p-1}{2}$ arêtes. Notons de plus que chaque composante connexe de G_k est une clique (un graphe complet) par hypothèse. Notons $n_1, \ldots, n_k$ les tailles des composantes connexes. Comme tout graphe connexe à m sommets a au moins $m-1$ arêtes, on a que $\frac{p-1}{2} \geqslant n_1 - 1 + \cdots + n_k - 1 = p - k$, donc $k \geqslant \frac{p+1}{2}$ ce qui conclut.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u>
Supposons qu'Alice peut gagner et donnons nous $n, c, b_1, \ldots, b_n$ qui permettent à Alice de gagner à coup sûr. Déjà notons qu'on ne peut avoir $b_i \equiv b_j \pmod n$ pour $i \neq j$, sinon Bob peut gagner en posant $a_1 = b_i$, $a_2 = b_j$, et n'importe quoi pour le reste. Ainsi $b_1, \ldots, b_n$ est une permutation de $1, \ldots, n$ modulo n. Quitte à les renommer (et vu que le calcul du produit ne dépend que de la congruence modulo n), on peut supposer $b_i = i$ pour tout i vérifiant $1 \leqslant i \leqslant n$.

Si n est composé, on pose $n = ab$ avec $a, b \geqslant 2$, Bob choisit $a_1 = 1, a_2 = a+1$ et $a_3 \equiv a+b+1 \pmod n$. Dans ce cas, en regardant modulo n le produit vaudra 0 modulo n (on aura $-a \times (-b)$. Seul problème : on pourrait avoir $a+b+1 \equiv 1 \pmod n$ ou $a+b+1 \equiv a+1 \pmod n$, et ne pas pouvoir choisir un tel a_3. Le second cas implique que $b \equiv 0 \pmod n$, donc n divise b qui divise lui-même n, donc que $b = n$ ce qui implique $a = 1$ qui est absurde. Dans le cas où $a+b+1 \equiv 1 \pmod n$, donc n divise $a+b$.

Or $ab - a - b = (a-1)(b-1) - 1 > 0$ sauf dans le cas où $a = b = 2$, donc $n > a+b$, ce qui implique que le premier cas est impossible sauf si $n = 4$. Si $n = 4$, on peut prendre $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 2, a_4 = 4$ qui convient.

Si n est premier, on peut essayer de rendre chaque terme du produit valant c mod p pour utiliser petit Fermat. On prend $a_i \equiv -ic$ modulo p, le produit vaut alors $c^p \equiv c \pmod p$. Il suffit alors de montrer que $0, -c, -2c, \ldots, -(p-1)c$ forme bien une permutation des restes modulo p, donc de montrer qu'ils sont deux à deux distincts. Soit $1 \leqslant i < j \leqslant p$, supposons $-ic \equiv -jc \pmod p$. Par hypothèse c est inversible mod p, donc $i \equiv j \pmod p$ ce qui est absurde et permet de conclure.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u>
Posons $r = c/d$ avec c et d premiers entre eux et $c > d$. Notons déjà que la longueur formée par le segment pion rouge-pion bleu est toujours une puissance de r par récurrence immédiate, et que le pion rouge est toujours à gauche strictement du bleu.

Notons aussi que si Alice choisit deux fois d'affilé pour x l'abcisse du point de la même couleur, et choisit k et k', Alice aurait juste pu choisir le même x, et $k + k'$ et obtenir la même situation en un seul coup.

Ainsi si Alice peut déplacer le pion rouge en 1 en au plus 2021 coups, elle peut le faire en déplaçant alternativement le rouge et le bleu.

Si elle déplace d'abord le rouge, quitte à changer l'origine et l'unité de la droite réelle, on peut supposer que le point rouge est en 0 et le bleu en 1, et que sur celle-ci Alice peut déplacer le pion rouge en au plus 2020 coups sur 1. Ainsi dans tous les cas, si Alice peut bouger le pion rouge en bleu en 1 en 2021 coups, elle peut le faire en 2020 coups en alternant un mouvement du bleu et du rouge.

Notons (a, b) les abcisses du pion rouge et du bleu avant mouvement du bleu puis du rouge. Si Alice choisit k, a ne bouge pas lors du premier mouvement mais b devient $r^k(b -$

$a)+a$. Après mouvement du rouge, si Alice choisit l, l'abcisse du rouge devient $r^l(a-(r^k(b-a)+a))+r^k(b-a)+a = a+(r^l-r^{l+k})(b-a)$. Or $b-a$ est de la forme r^h pour un certain entier h, donc a est remplacé par $a+r^{l+h}-r^{l+k+h}$.

Ainsi au bout de k mouvements avec un bleu puis un rouge, on obtient une abcisse de la forme $\sum_{l=1}^{k} r^{a_l}-r^{b_l}$ pour $(a_l)_{1\leqslant l\leqslant k}$ et $(b_l)_{1\leqslant l\leqslant k}$ des entiers. Si Alice réussit à placer le jeton rouge en 1, alors on a l'égalité précédente pour un bon choix de $k\leqslant 1010$ (car elle peut le faire en 200 coups) et des (a_k) et (b_k). Quitte à prolonger (a_l) et (b_l) par 0, l'équation $\sum_{l=1}^{1010} r^{a_l}-r^{b_l}=1$ a une solution qu'on fixe désormais.

Idéalement, on aimerait utiliser un peu d'arithmétique, donc passer modulo un nombre $n>0$. Le must serait que $r\equiv 1 \pmod n$, i.e. que $c\equiv d \pmod n$, soit que n divise $c-d$. On peut donc regarder modulo $c-d$: notons que $(c,c-d)=(d,c-d)=(d,c)=1$, et $c-d>0$. Ainsi c et d sont premiers avec $c-d$, on peut donc regarder l'équation modulo $c-d$, on obtient que $r\equiv \frac{d}{d}\equiv 1 \pmod{c-d}$, donc $1\equiv \sum_{l=1}^{1010} r^{a_l}-r^{b_l}\equiv \sum_{l=1}^{1010} 1-1\equiv 0 \pmod{c-d}$. En particulier, $c-d$ divise 1 donc $c=d+1$. On a donc $r=1+\frac{1}{d}$.

On peut également regarder modulo $c+d$, pour lequel $r\equiv -d/d\equiv -1 \pmod{c+d}$. En particulier $1\equiv \sum_{l=1}^{1010}(-1)^{a_l}-(-1)^{b_l} \pmod{c+d}$. Or $\sum_{l=1}^{1010}(-1)^{a_l}-(-1)^{b_l}$ est entre -2020 et 2020, et vaut 1 modulo $2d+1$. Ainsi $(2d+1)+1\leqslant 2020$ ou $-(2d+1)+1\geqslant -2020$. Dans le premier cas, $2d\leqslant 2018$, donc $d\leqslant 1009$ et dans le second cas, $2d\leqslant 2020$ donc $d\leqslant 1010$. Ainsi r est de la forme $1+\frac{1}{d}$ avec $1\leqslant d\leqslant 1010$.

Réciproquement, si r est de cette forme, et on note $(a,a+1)$ les positions du jeton rouge et du bleu si ceux-ci sont à distance 2, en faisant bouger le jeton bleu pour $k=1$, sa nouvelle position est $a+1+1/d$. En faisant bouger le jeton rouge pour $k=-1$, sa nouvelle abcisse a' vérifie : $a'-(a+1+1/d)=\frac{(a-(a+1+1/d)}{r}=-1$, donc $a'=a+1/d$ et chaque jeton a été translaté de $1/d$.

Ainsi en effectue k double mouvements ainsi, les deux jetons se retrouvent en $(k/d,(k+1)/d)$. Pour $k=d$, $2d\leqslant 2021$ mouvements ont été fait, et le jeton rouge est en 1 : les nombres de la forme $1+\frac{1}{d}$ avec $1\leqslant d\leqslant 1010$ conviennent réciproquement.

Solution de l'exercice 7

On note $f(x_1,\dots,x_n)=x_1+2x_2+\cdots+nx_n$. Fixons nous un n et une suite (a_i) vérifiant les conditions de l'énoncé. On va essayer de faire apparaître la condition sur la somme des a_i, qu'on décompose de la façon suivante $S =: n\wedge S\times S'$. Si on part d'une permutation $b_1,\dots,b_n$ de (a_i), notons $S_0=b_1+\cdots+nb_n$ et notons $S_0=S_0\wedge n\times S_0'$. Ajouter S à S_0 la change en $b_n+2b_1+\cdots+nb_{n-1}$. En particulier, en continuant ainsi, on montre que si S_0+kS est divisible par n pour un certain entier positif k, alors la suite vérifie la condition de l'énoncé, pour cela, il suffit que $n\wedge S$ divise $n\wedge S_0$, puisque ainsi il suffira de prendre k tel que $\frac{n\wedge S_0}{n\wedge S}S_0'+kS'\equiv 0 \pmod{n/(n\wedge S)}$ ce qui admet une solution car S' est bien inversible modulo $n/(n\wedge S)$.

Pour cela essayons de voir comment faire. On note $d=n\wedge S$, on veut donc que d divise S_0. On va donc noter que $f(x_1,\dots,x_n)\equiv f(x_1,\dots,x_d)+f(x_{d+1},\dots,x_{2d})+\cdots+f(x_{n-d+1}\dots,x_n) \pmod d$ donc il suffit de diviser les (a_i) en paquets de somme non divisible par d et appliquer l'hypothèse de récurrence. Problème : il peut y avoir trop de a_i égaux modulo d, puisque leur somme est divisible par d. Mais miracle, si n est impair, d l'est aussi, on peut regrouper des paquets de a_i égaux, car $1 + \dots d = d\frac{d+1}{2}$ est nul modulo d.

Montrons par récurrence forte sur n impair que l'énoncé est vrai. Pour $n = 1$ c'est clair. Fixons nous un n et supposons que l'hypothèse est vraie pour tout $m < n$ impair, et donnons nous une suite (x_i) de somme non divisible par n. Notons que par hypothèse $d < n$ et d est impair. Si $d = 1$, d'après le paragraphe ci-dessus, il est possible de trouver une permutation vérifiant l'énoncé. Sinon, on applique l'algorithme suivant, pour subdiviser les a_i en d-uplets donc l'image par f est 0 modulo d. On applique l'algorithme suivant : si on a d restes égaux modulo d, on en fait un paquet. Sinon on remplit "au hasard", et à la fin du remplissage de chauqe paquet si cela est possible, on choisit le dernier nombre de sorte à ne pas obtenir une somme nulle modulo d, pour pouvoir réarranger l'ordre du d-uplet par hypothèse de récurrence ce qui conviendra. Le seul problème est si à un moment un tel remplissage n'est pas possible. S'il reste au moins un autre groupe à former, alors il y a au moins $d+1$ nombres qu'on ne peut pas placer à la fin du d-uplet, donc $d + 1$ restes égaux modulo d ce qui est absurde. Ainsi cela ne peut arriver qu'à la fin. Notons qu'il y a au moins deux paquets car $d < n$. Si le dernier paquet (dont la somme fait 0 mod n) comporte au moins 3 différents restes modulo d, on peut échanger un des trois avec un élément fixé d'un autre paquet. En effet, il y a au plus un des trois échanges qui rend la somme divisible par d, et au plus un qui rend celle du paquet actuel divisible par d (il suffit donc de choisir le troisième, et de réarranger tout par hypothèse de récurrence). Ainsi le paquet actuel comporte exactement deux restes. Par un raisonnement similaire, si un paquet comporte un reste différent des deux restes du dernier paquet, il est possible de l'échanger avec un des deux restes du paquet actuel. Sinon il n'existe que deux restes possibles, donc une fois les paquets constants effectués, il reste au plus $2(p-1) < 2p$ nombres, donc plus qu'un paquet. Il suffit alors d'échanger avec un paquet constant le reste qu'il n'a pas, et chaque paquet est soit constant, soit de somme non divisible par d, ce qui conclut par hypothèse de récurrence.

Maintenant on peut se demander ce qui advient si on regarde $n = m \times 2^k$ avec m impair. On ne peut plus faire de paquet constant si le reste est impair. Quelques tests montrent que si tous les a_i valent 1, sauf 1 qui vaut $2^k + 1$, f est toujours congrue modulo 2^k à $1 + \cdots + n \equiv 2^{k-1}m(n-1) \pmod{2^k}$, donc jamais divisible par 2^k donc par n. La somme des (a_i) vaut $n+2^k$ qui n'est pas divisible par n sauf si $m = 1$. Ainsi si n est solution, soit n est impair, soit n est une puissance de deux.

Supposons $n = 2^k$, et montrons par récurrence forte sur k que le résultat est vrai. Pour $k = 1$, c'est assez clair car $d = 1$ (car $d < 2$). Supposons l'hypothèse vraie pour tout $l \leqslant k$, et montrons là pour $k + 1$, posons $d = 2^l$ avec $1 \leqslant l \leqslant k$ (le cas $l = 0$ étant clair). En reprenant le raisonnement du cas impair, on peut disloquer les (a_i) en groupes de d, chaque groupe étant soit composé de nombres tous égaux modulo d, soit de nombres dont la somme n'est pas divisible par d, et de telle sorte que chaque résidu soit présent au plus $d - 1$ fois dans la réunion des groupes non constants (puisqu'on groupe d'abord par d les éléments égaux modulo d). Seul problème, si $a_1 \equiv \cdots \equiv a_d$ (i.e. les (a_i) sont tous égaux mod d), $f(a_1, \dots, a_d) \equiv a_1\frac{d(d+1)}{2} \pmod{d} \equiv a_1 2^{l-1} \pmod{2^l}$. En particulier, tout groupe constant modulo d dont le reste modulo d est pair vérifie $f(a_1, \dots, a_d) \equiv 0$, et tout groupe constant modulo d dont le reste modulo d est impair vérifie $f(a_1, \dots, a_d) \equiv 2^{d-1}$.

Deux cas se présentent alors : s'il y a un nombre pair de groupes constants modulo d dont le reste est impair, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence pour réarranger les groupes non constants, et ensuite la somme de f appliquée à chaque groupe constant vaudra $N \times 2^{d-1} \pmod{2^d}$ avec N le nombre de groupes constants dont le reste est impair, donc sera nulle modulo 2^d. Ainsi, si on note $y_1, \ldots, y_n$ le réarrangement global (groupe par groupe), on a $f(y_1, \ldots, y_n) \equiv 0 \pmod{2^d}$ ce qui conclut.

S'il y a un nombre impair de groupes constants de reste impair modulo d, on va fixer un groupe, on note a le résidu présent dans ce groupe, et essayer de faire un échange pour diminuer d'un ce nombre et se ramener au cas précédent. Notons que si la somme d'un groupe n'est pas divisible par d, celui-ci n'est pas constant, ce qui permettra de transvaser des nombres sans vérifier à chaque fois que les groupes sont non constants tant que leur somme n'est pas divisible par d Comme il y a en tout $n/d = 2^{k-l}$ (qui est pair) groupes, il y a forcément soit un groupe constant pair modulo d, soit un groupe non constant. S'il y a un groupe constant pair modulo d, on peut juste échanger un élément de celui-ci avec un des a du groupe constant pour se ramener au cas précédent car les deux groupes auront leur somme non divisible par d. S'il n'y a pas de groupe constant pair, il y a forcément un groupe non constant. Si un groupe non constant possède deux résidus différents de a, alors un des deux peut être échangé avec a pour que chacun des groupe ait une somme non divisible par d.

Sinon, comme le groupe est non constant, il possède deux résidus : a et un certain résidu b. Si on peut échanger un a du groupe constant et un b du groupe non constant (de sorte à ce que la somme du non constant ne soit pas divisible par d), le problème sera résolu puisque le groupe non constant restera non constant d'après la valeur de sa somme modulo d.

Supposons donc que nous sommes dans le cas contraire. Si un groupe constant impair contient un résidu autre que a ou b, on peut échanger un de ses nombres avec b pour obtenir deux groupes de somme non divisible par d ce qui permet de conclure. Ainsi on peut se restreindre au cas où les groupes constants modulo d impairs ne contiennent que des a ou que des b. Si un groupe non constant contient un reste différent de a et b, qu'on appelle c, forcément il contient uniquement des a et des c (sinon il contient deux résidus différents de a). Par le même argument que précédemment, on peut supposer qu'on ne peut pas échanger a du groupe constant et c de ce groupe. En particulier, comme a, b, c sont différents modulo d, on peut échanger un c et un b des deux groupes non constants de sorte à ce que la somme de chaque reste non divisible par d. S'il y avait au moins 2 b ou 2 c dans un des deux groupes, un groupe non constant contient désormais b et c, donc on peut échanger a du groupe constant avec b ou c donc conclure. Sinon, il y a au moins $2(d-1)$ fois a, or en tout il y a au plus $d-1$ fois a dans les groupes non constants, on a donc une contradiction.

Récapitulons le cas qu'il reste à traiter : il n'y a aucun groupe constant pair, au moins 1 groupe non constant formé de a et de b modulos d, et tous les nombres valent soit a soit b modulo d. Dans ce cas, s'il y a au moins 2 groupes non constants, a ou b apparaît au moins d fois ce qui est absurde. Il y a donc exactement un groupe non constant de somme non divisible par d. Comme la somme de tous les éléments est divisible par d, et la somme des groupes constant l'est aussi, mais pas celle de l'unique groupe non constant, on a une contradiction.

Ainsi dans tous les cas on peut se ramener à un nombre pair de groupes constants modulo d de reste impair, et utiliser l'argument du cas précédent pour conclure. Ceci conclut l'hérédité, et donne que toute puissance de 2 est bien solution.

Ainsi les solutions sont les entiers impairs et les puissances de 2.

Solution de l'exercice 8

On regarde le graphe dont les sommets sont les numéros de n à $2n$, qu'on relie si leur sommet est un carré. L'existence de deux tels cas est équivalent au caractère biparti du graphe, donc à l'inexistence de cycle de longueur impaire. On cherche donc des cycles de longueur impair, le plus simple étant un triangle, i.e. des entiers $a < b < c$ tels que $a+b, b+c, c+a$ sont des carrés ce qui suffira. La somme des 3 étant divisible par 2, il semble bon de supposer $a+b$ et $b+c$ sont impairs.

$(a+b) = (2k-1)^2$, $b+c = (2k+1)^2$ et $a+c = (2k)^2$ est équivalent à $a = \frac{(2k-1)^2+(2k+1)^2-4k^2}{2} = 2k^2+1$, $c = \frac{(2k+1)^2+4k^2-(2k-1)^2}{2} = 2k^2+4k$ et $b = 2k^2-4k$ (l'implication est claire, et la réciproque se calcule facilement), on veut donc montrer qu'il existe $k \geqslant 1$ tel que $2k^2+4k \leqslant 2n$ et $2k^2-4k \geqslant n$. Il suffit pour cela d'avoir $2(k+2)^2 \leqslant 2n+4$ donc $k \leqslant \sqrt{n+2}-2$ et $2(k-2)^2 \geqslant n+8$, donc $k \geqslant 2+\sqrt{(n+8)/2}$, on cherche donc à savoir quels sont les n tels que $\sqrt{n+2}-2-2-\sqrt{(n+8)/2} \geqslant 1$, donc tels que $\sqrt{n+2} \geqslant 5+\sqrt{(n+8)/2}$, i.e. $n+2 \geqslant 25+(n+8)/2+5\sqrt{2(n+8)}$ donc $n \geqslant 54+10\sqrt{2(n+8)}$, donc il suffit d'avoir $(n-54)^2 \geqslant 200(n+8)$, donc $n^2+1316-308n \geqslant 0$, donc $(n-158)^2 \geqslant 22400$, or $22400 \leqslant 150^2$ donc il reste juste à traiter $100 \leqslant n \leqslant 308$.

On calcule désormais les valeurs de $4k^2-2k$ et $4k^2+4k$: pour $k=9$, on obtient 126 et 198, donc tout n entre 100 et 126 vérifie l'énoncé. Pour $k=10$, on obtient 160 et 240 donc l'énoncé est vraie pour n entre 120 et 160. Pour $k=11$, on obtient 198 et 286 donc l'énoncé est vrai entre 143 et 198. Pour $k=12$, on obtient 240 et 336, donc l'énoncé est vrai entre 168 et 240. Pour $k=13$, on obtient 286 et 390 donc l'énoncé est vrai entre 195 et 286. Pour $k=14$, on obtient 336 et 448, donc l'énonc est vrai entre 224 et 336 ce qui conclut les cas restants.

Solution de l'exercice 9

Soit k le PGCD des éléments de $\mathcal{S}$. Si l'on divise chaque élément de $\mathcal{S}$ par k, on obtient un ensemble $\mathcal{S}'$ qui vérifie toujours l'énoncé et, réciproquement, si $\mathcal{S}'$ vérifie l'énoncé, $\mathcal{S}$ le vérifie aussi. On remplace donc $\mathcal{S}$ par $\mathcal{S}'$, c'est-à-dire que l'on suppose désormais que $k=1$.

Soit x et y deux éléments de $\mathcal{S}$ tels que $x \wedge y \neq 1$. Il suffit, par exemple, de choisir $(x,y) = (a,b)$ ou $(x,y) = (c,d)$. Si $\mathcal{S}$ admet un élément z premier avec x et y, on a $x \wedge z = y \wedge z = 1 \neq x \wedge y$, ce qui constitue le résultat souhaité.

Sinon, parmi les facteurs premiers de xy, il en existe au moins un, disons p, qui divise une infinité d'éléments de $\mathcal{S}$. Notons $\mathcal{S}_p$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{S}$ qui sont divisibles par p. Puisque $k=1$, il existe un élément t de $\mathcal{S}$ qui n'appartient pas à $\mathcal{S}_p$. Comme $\mathcal{S}_p$ est infini, et puisque la fonction $n \mapsto t \wedge n$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs lorsque n varie, il existe deux éléments u et v de $\mathcal{S}_p$ tels que $t \wedge u = t \wedge v$. Puisque p divise $u \wedge v$ mais pas $u \wedge v$, on en conclut que $t \wedge u = t \wedge v \neq u \wedge v$, ce qui donne de nouveau le résultat souhaité.

Solution de l'exercice 10

a) On désire trouver des entiers a et b tels que le nombre de facteurs premiers des entiers $x+a$ et $x+b$ ont la même parité. Cela revient à trouver deux suites de 50 entiers consécutifs $a+1, \ldots, a+50$ et $b+1, \ldots, b+50$ tels que le nombre de facteurs premiers de $a+1$ et $b+1$ aient la même parité, le nombre de facteurs premiers de $a+2$ et $b+2$ aient la même parité, etc...

Si on pose $f(x) = 0$ si le nombre de facteurs premiers de x est pair et $f(x) = 1$ s'il est impair, on constate qu'il n'y a que 2^50 suites de 0 ou 1 possibles pour la suite $f(a+1), \ldots, f(a+50)$.

Ainsi, parmi les suites $(f(1), \ldots, f(50))$; $(f(51), \ldots, f(100))$; $\ldots$; $(f(2^{50}+1), \ldots f(2^{50}+50))$, il y a deux suites égales. On dispose donc de deux entiers a et b tels que $(f(a+1), \ldots f(a+50))$ et $(f(b+1), \ldots, f(b+50))$ soient égales. Les entiers a et b conviennent donc.

b) On peut se convaincre, à la lumière de la question précédente, que la fonction $f(x)$ introduite à la question précédente n'est pas périodique à partir d'un certain rang et donc que les entiers a et b ne peuvent pas être distincts, mais on propose un raisonnement rigoureux :

On suppose par l'absurde que $a \neq b$. On observe que $P(k(b-a)-a) = k(k+1)(b-a)^2$ pour k un entier suffisamment grand pour que $k(b-a)-a$ soit strictement positif. Le nombre $P(k(b-a)-a)$ admet cond un nombre pair de facteurs premiers si et seulement si $k(k+1)$ admet un nombre pair de facteurs premiers. Comme par l'absurde c'est le cas pour tout entier k suffisamment grand, cela implique que $f(k) = f(k+1)$ pour tout entier k suffisamment grand et donc que la fonction f soit constante à partir d'un certain rang. Mais pour tout nombre premier p, $f(p) = 1$ et pour tout entier k, $f(k^2) = 0$. La fonction n'est donc pas constante donc on a obtenu la contradiction désirée.

Solution de l'exercice 11
Notons que si $p = 2$ ou 5, Alice peut remplacer a_0 par p au premier tour, faire n'importe quoi ensuite et gagner.

Sinon, notons w l'ordre de 10 modulo p, qui divise $p-1$ par petit Fermat. En fait, on peut "disloquer" un peu le nombre $a_0 + \cdots + 10^{p-1}a_{p-1}$ en $n := \frac{p-1}{w}$ nombres $a_0 + \cdots + 10^{w-1}a_{w-1}$, $a_w + \cdots + 10^{w-1}a_{2w-1}, \ldots, a_{(n-1)w} + \cdots + 10^{w-1}a_{nw-1}$, dont la somme vaut $a_0 + \cdots + 10^{p-1}a_{p-1}$ modulo p. Alice peut donc commencer par jouer $a_p = 0$ pour se simplifier la vie

Une première approche peut donc être d'essayer de faire gagner Alice sur chacun des sous-nombres : il suffit de trouver une stratégie pour que chaque sous-nombre vale 0 modulo p.

Typiquement, si w est pair, $(10^{w/2})^2 \equiv 1 \pmod p$ et $10^{w/2} \not\equiv 1 \pmod p$ par définition de l'ordre, donc $10^{w/2} \equiv -1 \pmod p$. Ainsi, si sur un des n nombres, Bob remplace la i-ième décimale par $x \in \{0, \ldots, 9\}$, si $i > w/2$, Alice remplace la $i - w/2$-ième décimale du même nombre par x, sinon elle remplace la $i + w/2$-ième décimale du nombre par x. Cette stratégie correspond juste à associer les (a_i) par paires internes à chaque nombre, pour deux puissances de 10 qui ont des restes opposés modulo p. Alice peut alors toujours jouer dans la paire formée puisqu'elle a groupé les décimales par paires. En particulier, à la fin le sous nombre sera de la forme $b_0 10^0 + b_1 10^1 \cdots + b_0 10^{w/2} + b_1 10^{w/2+1} = b_0(10^0 + 10^{w/2}) + \cdots + b_{w/2-1}(10^{w/2-1} + 10^{w-1})$ et vaut donc 0 mod p. Ainsi chaque sous-nombre vaut 0 modulo p, donc Alice a bien une stratégie gagnante.

Maintenant reste à voir ce qu'on peut dire si w est impair. Dans ce cas, il y a $(p-1)/w$ sous-nombres, donc un nombre pair de sous-nombres. Alice peut donc groupes les $(p-1)/w$ nombres en paires. Si Bob affecte la valeur a à la i-ième décimale d'un nombre, Alice affecte la valeur $9-a$ à la i-ième décimale de l'autre nombre de la paire. Il est relativement clair qu'une telle stratégie est possible (on peut voir qu'en fait, la stratégie d'Alice consiste à faire des paires avec chacune des décimales, et toujours jouer sur le second élément de la paire). Cette stratégie n'assure pas que chaque sous-nombre sera divisible par p, mais par contre la somme de deux sous-nombres elle vaudra modulo p $9(10^0 + \cdots + 10^{w-1}) = 10^w - 1 \equiv 0 \pmod p$. Ainsi la somme des sous-nombres est bien divisible par p, donc Alice a une stratégie gagnante dans tous les cas.

Solution de l'exercice 12
Notons que $n = 1$ convient. Si n n'est pas premier, on pose $n = ab$ avec $a, b \geqslant 2$. Prendre $a_1 = \cdots = a_{n-1} = b$, et $a_n = n$. La sommes des a_i vaut $nb + n - b$ qui n'est pas divisible par b. Pourtant, si on fixe x_i, soit $x_i + \cdots + x_{i+a} = ab$ est divisible par n, soit $x_i + \cdots + x_{i+a+1} = ab + n$ est divisible par n. Or $n = ab \geqslant 2a > a+1$ ce qui donne le résultat voulu.

On prendra désormais les indices modulo n. Si n est premier, supposons l'énoncé faux, donnons nous des (x_i) tels que la propriété de l'énoncé soit faux. Pour tout $i \geqslant 1$, il existe

$i+n > k_i > i$ tel que n divise $x_i+\dots+x_{k_i-1}$ (car n ne divise pas $x_i+\dots+x_{i+n-1}$ par hypothèse). On définit $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = k_{a_n}$. Par principe des tiroirs, il existe $j_1 < j_2$ dans $\{0,\dots,n\}$ tels que $a_{j_1} = a_{j_2}$. En particulier, $x_{a_{j_1}} + \dots + x_{a_{j_1+1}-1} x_{a_{j_1+1}} + \dots + x_{a_{j_1+2}-1} + \dots + x_{a_{j_2-1}} + \dots + x_{a_{j_2}-1} = 0$, donc x divise $\frac{a_{j_2}-a_{j_1}}{p}(x_1+\dots+x_n)$. Or comme $a_{k+1}-a_k < p$ pour tout $k \geqslant 0$, $a_{j_2}-a_{j_1} < (j_2-j_2)p$ donc $0 < \frac{a_{j_2}-a_{j_1}}{j_2-j_1} < p$, Ainsi p ne divise ni $x_1+\dots+x_n$ ni $\frac{a_{j_2}-a_{j_1}}{p}$, ce qui est absurde. Ainsi tout nombre premier vérifie l'énoncé.

Les solutions sont donc exactement les n premiers et $n = 1$.

<u>*Solution de l'exercice 13*</u>

Ici Abigail a beaucoup trop de possibilité : à chaque fois elle peut potentiellement obtenir deux résultats différents, donc si Tristan a un espoir de gagner, il aimerait qu'au n-ième tour, Abigail n'ait qu'une possibilité modulo p : b_n. Au départ, il choisir $X = b_0$. Puis, à partir de b_n, pour n'avoir qu'une possibilité, il voudrait choisir a_{n+1} tel que $a_{n+1}b_n \equiv a_{n+1}+b_n \pmod p$, i.e. $a_{n+1} \equiv \frac{b_n}{1-b_n} \pmod p$. En particulier, on aura $b_{n+1} \equiv \frac{b_n^2}{b_n-1} \pmod p$. Ceci étant dit, on remarque qu'avoir $b_n \equiv 1 \pmod p$ est un problème pour Tristan.

Donnons ainsi la stratégie suivante pour Tristan : Tristan un X non congru ni à 0 ni à 1 mod p. Il pose $b_0 = X$. Puis tant que b_n ne vaut pas 1 modulo p, il pose $a_{n+1} \equiv \frac{b_n}{b_n-1} \pmod p$ et $b_{n+1} \equiv \frac{b_n^2}{b_n-1} \pmod p$. On montrer par récurrence immédiate qu'Abigail, au bout de n choix, aura écrit $b_n \pmod p$ au tableau.

On peut espérer que pour tout n, a_n soit toujours défini et b_n soit toujours différent de 0 et 1 modulo p. Notons que si $b_n \not\equiv 0,1 \pmod p$, $b_{n+1} \not\equiv 0 \pmod p$. De plus $b_{n+1} \equiv 1 \pmod p$ équivaut à $b_n^2 - b_n + 1 \equiv 0 \pmod p$. Ce polynôme a une racine modulo p si et seulement si son discriminant, -3 est un carré modulo p.

Or par réciprocité quadratique

$$\left(\frac{-3}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{3}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}(-1)^{\frac{2(p-1)}{4}}\left(\frac{p}{3}\right) = \left(\frac{p}{3}\right)$$

.

En particulier cela nous donne la question a : comme $p \equiv 2 \pmod 3$, $\left(\frac{-3}{p}\right) = -1$ donc l'équation $x^2 - x + 1 \equiv 0 \pmod p$ n'a pas de solution : ainsi b_{n+1} ne peut valoir 1 modulo p, donc Tristan gagne.

Pour la question b, malheureusement on ne peut pas assurer que le procédé précédent marche. Une option serait que b_n boucle rapidement. Comme $b_{n+1} \equiv b_n + a_{n+1} \equiv b_n a_{n+1}$, si $b_{n+1} \equiv b_n$, $a_{n+1} \equiv 0 \pmod p$ donc $b_{n+1} \equiv 0 \pmod p$. Le mieux qu'on puisse espérer est donc d'avoir une boucle de taille 2, i.e. $b_2 \equiv b_0 \pmod p$.

Or

$$b_2 \equiv \frac{b_1^2}{b_1 - 1} \equiv \frac{\frac{b_0^4}{(b_0-1)^2}}{\frac{b_0^2}{b_0-1} - 1}$$

L'équation (avec $x \not\equiv 0 \pmod p$) $x \equiv \frac{\frac{x^4}{(x-1)^2}}{\frac{x^2}{x-1}-1}$ est équivalente à $1 \equiv \frac{x^3}{x^2(x-1)-(x-1)^2} \equiv \frac{x^3}{x^3-2x^2+2x-1}$ donc à $2x^2 - 2x + 1 \equiv 0 \pmod p$ et celle-ci a un sens sous réserve d'avoir x différent de 0 et 1 mod x et $\frac{x^2}{x-1}$ différent de 0 ou 1 mod p.

L'équation $2x^2-2x+1 \equiv 0 \pmod p$ est une équation de degré 2, qui a une solution modulo p si et seulement si son discriminant qui vaut -4 est un carré modulo p. Or -4 est un carré si et seulement si -1 en est un. Or dans la b, $p \equiv 1 \pmod 4$ donc -1 est bien un carré : il existe une racine modulo p de $2x^2 - 2x + 1$ qu'on notera y. 0 et 1 n'étant pas racine y est différent de 0 ou 1. De plus, on ne peut pas avoir $\frac{y^2}{y-1} \equiv 0$ ou 1 modulo p : pour 0 c'est clair, pour 1, cela impliquerait avoir $y^2 - y \equiv 1$, donc $2y^2 - 2x \equiv 2$. Or $2y^2 - 2y \equiv -1$, et $2 \not\equiv -1 \pmod p$. Ainsi si on prend $X = y$, on obtient par récurrence immédiate que $b_n \equiv b_0$ si n est pair, b_1 si n est impair, et est différent de 0 et 1 pour tout $n \geqslant 0$. Ainsi Abigail ne peut gagner : dans les deux cas Tristan gagne.

Solution de l'exercice 14

On peut modéliser le problème par un graphe, dont les villes sont les éléments de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et (m, n) sont reliés si et seulement si p divise $(m^2 - n + 1)(n^2 - m + 1)$.

Plus simplement on définit $f : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ qui à x associe $x^2 + 1$. Deux sommets (m, n) sont reliés si et seulement si $m = f(n)$ ou $n = f(m)$. On peut donc tracer les arêtes de la forme $(m, f(m))$ et obtenir le graphe voulu : il a donc n arêtes.

Idéalement on aimerait montrer que pour des bons nombres premiers, le graphe n'est pas connexe. Pour cela, il suffit de trouver une infinité de nombres premiers p pour lesquels il y a $n - 2$ arêtes : il suffit donc de montrer qu'il y a une infinité de nombres premiers p pour lesquels on a deux arêtes de la forme (a, a), i.e. f a deux points fixes.

Or $f(n) \equiv n$ est équivalent à $n^2 - n + 1 \equiv 0$, dont le discriminant vaut -3.

Or par réciprocité quadratique si $p > 3$,

$$\left(\frac{-3}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{3}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}(-1)^{\frac{2(p-1)}{4}}\left(\frac{p}{3}\right) = \left(\frac{p}{3}\right)$$

Ainsi si $p \equiv 1 \pmod 3$, -3 est un carré non nul, donc $f(n) \equiv n$ a deux solutions modulo p. Ainsi en enlevant les deux boucles, il y a $n - 2$ arêtes, donc le graphe n'est pas connexe : on a le résultat voulu.

Solution de l'exercice 15

Ici finalement la valeur de x, y ou z n'est pas très importante : il est important de savoir quels sont les nombres qui peuvent être écrit comme des puissances n-ième modulo p. Donnons nous y une racine primitive modulo p, et notons $d = PGCD(p-1, n)$. Il existe a, b deux entiers tels que $a(p-1) + bn = d$, donc $y^d \equiv y^{a(p-1)+bn} \equiv (y^b)^n$, donc $y^{kd} \equiv (y^{bd})^n$. Ainsi tous les nombres de la forme y^{kd} pour $0 \leqslant k < \frac{p-1}{d}$ sont distincts et des puissances q-ième, il y en a donc au moins $\frac{p-1}{d}$.

De plus, par Petit Fermat, toute puissance n-ième est racine de $X^{\frac{p-1}{d}} - 1$, car si z est premier avec p, $(z^n)^{\frac{p-1}{d}} = (z^{\frac{n}{d}})^{p-1} \equiv 1 \pmod p$. Comme p est premier, $X^{\frac{p-1}{d}} - 1$ a au plus $\frac{p-1}{d}$ racines, il y a donc au plus $\frac{p-1}{d}$ puissances d-ième. Ainsi il y a exactement $\frac{p-1}{d}$ puissances d-ième.

Soit $a \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$, on note $D(a) = \{az^q | z \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*\}$ qui est donc de cardinal $\frac{p-1}{d}$. Montrons que si $a \neq b$ sont deux éléments de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$, $D(a)$ et $D(b)$ sont soit disjoints soit égaux.

Supposons $D(a)$ et $D(b)$ non disjoints, il exise alors z et z' dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ tels que $az^q = bz'^q$ donc pour tout $z'' \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$, $az''^q = b(z'z''z^{-1})^q$ est dans $D(b)$. Ainsi $D(a) \subset D(b)$, donc par smétrie $D(b) \subset D(a)$: on a bien $D(a) = D(b)$.

Ainsi l'ensemble des $D(a)$ pour $a \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ forme une partition (avec répétition) de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$. Il existe donc $a_1, \ldots, a_q$ tels que les $(D(a_i))_{1 \leqslant i \leqslant q}$ forment une partition de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$. On a alors $p - 1 = \frac{p-1}{d} \times q$ donc $q = d \leqslant n$. Pour avoir une solution de l'équation $x^n + y^n \equiv z^n$

$\pmod p$, il suffit d'avoir trois éléments c, d, e appartenant à un même $D(a_i)$ tels que $c + d = e$. En effet, si on pose $c = a_i z^n, d = a_i z'^n$ et $e = a_i z''^n$, on a alors $z^n + z'^n = z''^n$, ce qui donne le résultat voulu. Il suffit alors de montrer que si on dispose de n couleurs et on colorie chaque élément de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ (en fonction du i tel qu'il appartient à $D(a_i)$), on obtient forcément pour p assez grand trois élément (x, y, z) tels que $x + y = z$. Plus simplement, on peut oublier la condition modulo p et la primalité de p, et montrer que si m est assez grand, pour tout coloriage à au plus n couleurs des entiers de 1 à m contient trois entiers a, b, c de même couleur tels que $a + b = c$.

Trouver un tel triplet n'est pas facile à première vue. Une idée est d'essayer de réécrire cela de la forme $a = c - b$: en fait, écrire chaque nombre comme une différence de deux autres est pertinent. On prend un graphe G dont les entiers sont les sommets de 1 à $n + 1$, et dont l'arête entre a et b est présente pour tout $a \neq b$ et coloriée de la couleur de $|a - b|$. Si on trouve un triangle monochrome dans ce graphe, par exemple entre $f < g < h$, cela signifie que $h - g, h - f$ et $g - f$ sont de même couleur. Or $h - f = h - g + g - f$ donc le triplet $(g - f, h - g, h - f)$ convient. Il suffit donc de montrer que si on a un graphe à N sommets (qui vaut $m + 1$ ici), dont les arêtes sont coloriées d'au plus n couleurs, pour N assez grand on a un triangle monochrome.

Ce dernier résultat est plus simple à prouver : on peut juste faire une récurrence sur n. Pour $n = 1$, $N \geqslant 3$ suffit. Pour l'hérédité, supposons que pour un $n \geqslant 1$ fixé, il existe un entier $s(n)$ tel que si $N \geqslant s(n)$, il y a un triangle monochrome dans tout graphe dont les arêtes sont coloriées à N sommets. Posons $s(n + 1) = (n + 1)s(n) + 1$ et fixons $N \geqslant s(n + 1)$ et G un graphe à n sommets, montrons qu'il a un triangle monochrome. Fixons v un sommet de G, comme il a $(n + 1)s(n)$ voisins, au moins $s(n)$ sont reliés à v par la même couleur notée c. Si parmi ces $s(n)$ sommets, deux sont relié en couleur c, on a bien un triangle monochrome. Sinon, en regardant le graphe avec ces $s(n)$ sommets, qui contient au plus n couleurs d'arêtes, par hypothèse de récurrence celui-ci contient un triangle monochrome, donc G aussi, ce qui conclut l'hérédité.

Ainsi par récurrence on a le résultat voulu, d'où la preuve du résultat souhaité.

Solution de l'exercice 16

Soit $n \geqslant k$, on définit le radical de n $r(n)$ comme le produit des nombres premiers divisant n et inférieurs ou égaux à k (c'est un nombre squarefree), et pour tout nombre squarefree l dont les facteurs premiers valent au plus k, on note A_l tous les entiers supérieurs ou égaux à k dont le radical vaut l.

Tout d'abord fixons nous un tel l, $p_1, \ldots, p_u$ ses facteurs premiers et notons j le minimum de A_l. Si j admet un diviseur premier strictement plus grand que k, on a $j \geqslant k(p_1 \ldots p_u)$. Soit m le plus grand entier tel que $(p_1 \ldots p_u)^m < k$. On a alors $j > (p_1 \ldots p_u)^m \geqslant k$ ce qui contredit la minimalité de j. Ainsi le minimum de A_l n'a que des facteurs premiers inférieurs ou égaux à k.

Montrons maintenant par récurrence forte sur $n \geqslant k$ que n est alicien si et seulement si son radical l'est. L'initialisation pour $n = k$ l'est car n vaut son radical. Soit $m > k$, supposons l'hypothèse vraie pour tout nombre strictement inférieur à m. Notons r le radical de m. Si r est alicien, il mène à une position perdante x, donc au minimum de $A_{r(x)}$, auquel mène aussi m car ce minimum n'a que des facteurs premiers inférieurs ou égaux à k et les mêmes que x.

Si m est alicien, il mène à une position perdante y, qu'on peut supposer le minimum de $A_{r(y)}$ car ce minimum n'a que des facteurs premiers inférieurs ou égaux à k et les mêmes que

y. Si $r > y$, r est alicien car y est perdant. Notons qu'on a pas $r = y$, donc il reste le cas $y > r$. Dans ce cas y mène à r donc r est alicien.

Ainsi un nombre est alicien si et seulement si son radical l'est, d'où le résultat.

Solution de l'exercice 17

Examinons l'hypothèse donnée. Étant donné un couple (d_1, d_2) de diviseurs, si ces diviseurs admettent un diviseur premier commun p, ce diviseur divise également strictement leur somme, qui n'est donc pas un nombre premier. En conclusion, dans un couple (d_1, d_2), les nombres d_1 et d_2 sont premiers entre eux. En particulier, $d_1 d_2 \leqslant n$.

Or, le produit de tous les diviseurs de n vaut $n^{d(n)/2}$, avec $d()$ le nombre de diviseurs de n, et il y a $d(n)/2$ paires de diviseurs et le produit de chaque paire vaut au plus n. Donc le produit des produits de chaque n vaut au plus $n^{d(n)/2}$. Comme ce produit est effectivement égal à $n^{d(n)/2}$ donc il y a égalité dans chaque paire. En conclusion, dans chaque paire, $d_1 d_2 = n$. Autrement dit, les paires de diviseurs sont de la forme $\left(d, \frac{n}{d}\right)$.

A présent, on résout le problème. Soit d un diviseur de n et $p = d + \frac{n}{d}$ le nombre premier somme des éléments de la paire $\left(d, \frac{n}{d}\right)$. Si p divise n, p divise d ou n/d et est donc strictement inférieur à la somme $d + \frac{n}{d} = p$ ce qui est absurde. Ainsi, les nombres premiers des diverses paires ne divisent pas n.

On montre que les nombres premiers sont distincts. En effet, soient d_1 et d_2 deux diviseurs, il s'agit de montrer que $d_1 + \frac{n}{d_1} \neq d_2 + \frac{n}{d_2}$. Mais l'égalité est équivalente à $(n - d_1 d_2)(d_1 - d_2) = 0$. Or les éléments d_1 et d_2 sont supposés être distincts et dans des paires distinctes. Ainsi, on ne peut ni avoir $d_2 = d_1$ ni avoir $d_2 = \frac{n}{d_1}$. On a donc le résultat désiré.

2 Algorithmes gloutons (Arthur)

Ce cours est inspiré des cours d'Evan Chen, et de Cody Johnson sur les algoritmes gloutons, ainsi que du blog de Dragomir Grozev. La terminologie constructif/glouton qui est utilisée dans ce cours n'est pas standard. On suppose ici que tous les graphes sont finis.

Dans ce cours, nous allons nous intéresser aux algorithmes constructifs et aux algorithmes gloutons. Un algorithme est décrit comme une suite d'instructions. Pour utiliser cette technique de démonstration en mathématiques, il est toujours crucial de montrer deux propriétés. La première est **la terminaison** ; c'est à dire que l'algorithme finit toujours par renvoyer un résultat. La seconde est **la correction** ; c'est à dire que le résultat calculé est correct.

Regardons ensemble un exemple simple d'algorithme constructif :

Exercice 1 (Putnam 1979, facile)

On place n points rouges et n points bleus dans le plan en position générale. Montrez qu'on peut les joindre avec n segments, chacun joignant un point bleu à un point rouge, tel que deux segments ne s'intersectent jamais.

Solution de l'exercice 1

Voici une rédaction acceptable pour cet exercice :

- **Instructions** : On commence par relier les points par des segments arbitrairement (qui peuvent se croiser). Tant qu'il y a un croisement, on décroise.
- **Terminaison** : À chaque tour de boucle, la somme des longueurs diminue strictement (on applique l'inégalité triangulaire deux fois). Comme il n'y a qu'un nombre fini d'appariements possibles, l'algorithme termine.

— **Correction** : Lorsque l'algorithme sort de la boucle, la solution n'a plus de croisements.

Question bonus pour les informaticiens : comment construire un tel couplage en temps polynomial ?

En mathématiques, un algorithme **constructif** aura souvent cette forme : on commence par considérer une solution arbitraire, et on essaye de faire des corrections locales jusqu'à obtenir une solution globale au problème. Au contraire, un algorithme **glouton** exécute des choix locaux dans un ordre précis, ces choix étant immuables. Voici un exemple d'algorithme glouton :

Exercice 2 (facile)
Soit G un graphe simple, et soit Δ le degré maximal d'un sommet. Prouvez que le nombre chromatique de G est au plus $\Delta + 1$.

Solution de l'exercice 2
On numérote les couleurs à partir de 1.

— **Instructions** : On colorie les sommest de G un par un. Lorsqu'on veut colorier v, on choisit la plus petite couleur qui n'apparaît pas parmi ses voisins.

— **Terminaison** : La terminaison est claire.

— **Correction** : Comme chaque sommet a un degré d'au plus Δ, la couleur maximale qu'on donne à un sommet est $\Delta + 1$, et il est clair que l'algorithme renvoie une coloration valide.

Algorithmes de remplissage

Dans un certain nombre de problèmes, nous voulons placer un grand nombre d'objets quelque part afin qu'ils ne s'intersectent pas. Nous allons voir deux méthodes pour résoudre ces problèmes, que j'appelle "problèmes de remplissage". La première méthode est le remplissage "glouton" : étant donné un objet, on suit une heuristique pour décider où le placer. C'est l'objet de cet exercice :

Exercice 3 (C4 IMOSL 2001, moyen)
Un ensemble de trois entiers positifs $\{x, y, z\}$ est appelé historique si $\{z - y, y - x\} = \{1776, 2001\}$. Montrez que l'ensemble de tous les entiers positifs peut être écrit comme l'union d'ensembles historiques deux-à-deux disjoints.

Solution de l'exercice 3
Ici, contrairement à d'habitude, on construit un algorithme qui ne termine pas !

— **Instructions** : Au début du processus, tous les nombres sont blancs. On répète indéfiniment les instructions suivantes : Soit x le plus petit sommet colorié en blanc, et soit $z := x+1776+2001$. Si $x+1776$ est blanc, on ajoute $\{x, x+1776, z\}$ à nos ensembles historiques, on colorie x en rouge, $x+1776$ en vert et z en bleu. Sinon, on ajoute $\{x, x+2001, z\}$ à nos ensembles historiques, on colorie x en rouge, $x + 2001$ en violet et z en bleu.

— **Correction** : À chaque tour de boucle x est colorié en blanc, et $z := x + 1776 + 2001$ aussi car il est strictement plus grand que tous les nombres coloriés jusqu'à présent. Dans le premier cas, il est donc clair que l'ensemble historique ajouté est disjoint des précédents. Dans le second cas, $y := x + 2001$ ne peut être colorié ni en violet, ni en rouge, ni en vert (car x tous les nombres rouges sont strictement inférieurs à x et x est blanc). Supposons donc que y est colorié en bleu. Dans ce cas $y-2001-1776 = x-1776$ est colorié en rouge, mais alors, d'après les règles choisies, x devrait être colorié en vert, ce qui est absurde. L'ensemble historique ajouté est donc aussi disjoint des précédents. Enfin, à chaque tour de boucle, on ajoute le plus petit nombre blanc dans l'union, donc tout nombre finit par être ajouté dans l'union. Les ensembles historiques ajoutés par l'algorithme lors de son exécution infinie forment donc une partiation des entiers positifs.

La deuxième technique de remplissage couramment utilisée est la "compression" : on groupe les objets ensembles dans des "packs" qui sont plus faciles à placer. Nous allons voir un exemple avec cet exercice :

Exercice 4 (P5 IMO 2014, moyen)
Pour chaque entier positif n, une banque produit des pièces de valeur $\frac{1}{n}$. Étant donnée une collection finie de ces pièces de valeur totale au plus $k - \frac{1}{2}$, prouvez qu'il est possible de diviser cette collection en au plus k groupes de pièces, chacun de valeur totale au plus 1. Une valeur peut apparaître plusieurs fois dans la collection donnée.

Solution de l'exercice 4
Tant qu'on peut, on compresse les pièces de la manière suivante :

— Si deux pièces de valeur $\frac{1}{2m}$ apparaîssent, on le remplace par une pièce de valeur $\frac{1}{m}$.

— Si une pièce de valeur $\frac{1}{k}$ apparaît k fois, on les retire et on diminue k de 1.

Ensuite, on met dans le groupe G_0 les pièces de valeur $\frac{1}{2}$, et dans le groupe G_i, on met les pièces de valeur $\frac{1}{2i+1}$ et $\frac{1}{2i+2}$. Grâce aux propriétés de l'algorithme de compression, chaque groupe est de valeur totale au plus 1, mais il reste les pièces de valeur inférieure ou égale à $\frac{1}{2k+1}$ à placer. Dès qu'il y a de la place suffisante dans un groupe, on place une petite pièce dedans.

Si à un moment on se retrouve bloqué, c'est que chaque groupe a une valeur totale d'au moins $1 - \frac{1}{2k+1}$, mais alors la valeur totale des pièces est au moins :

$$k\left(1 - \frac{1}{2k+1}\right) > k - \frac{1}{2}$$

ce qui est absurde.

Ordonnancement

Exercice 5 (Tri topologique, facile)
On vous donne un graphe $G(V, E)$ simple, orienté et acyclique. Montrez qu'il existe une numérotation des sommets tel que s'il y a un arc qui va du sommet u vers le sommet v, le numéro de u est plus grand que le numéro de v. Une telle numérotation est appelée **tri topologique** de G.

Solution de l'exercice 5

— **Instructions** : Tant que le graphe n'est pas vide, on considère un sommet qui n'a pas de fils, on lui donne le plus petit entier pas encore donné à un sommet et on le supprime.

— **Terminaison et Correction** : Comme le graphe est acyclique, il existe toujours un sommet qui n'a pas de fils. À chaque tour de boucle, on élimine donc un sommet, et il y a un nombre fini de sommets.

Exercice 6 (Théorème de Dirac, moyen)
Soit $G(V, E)$ un graphe à au moins 3 sommets, où chaque sommet a un degré d'au moins $\frac{|V|}{2}$. Montrez que G admet un cycle passant par chaque sommet exactement une fois (ie un **cycle hamiltonien**).

Solution de l'exercice 6
On dispose les sommets de G arbitrairement en cercle. Si les sommets i et $i+1$ du cycle ne sont pas reliés, alors on cherche un indice j du cycle tel que les paires (i, j) et $(i+1, j+1)$ sont reliés. Ainsi, en inversant l'ordre des sommets $i+1, \dots, j$ le long du cercle, on augmentera strictement le nombre de paires de sommets reliés côte à côte sur le cercle. Un tel indice j existe toujours par l'argument suivant. Soient V_i les sommets reliés à i, V_{i+1} les sommets reliés à $i+1$, et :

$$S_i := \{v + 1 \mid v \in V_i\}$$

On cherche un sommet commun entre S_i et V_{i+1}, qui doit exister par le principe des tiroirs, puisque $i+1$ n'est ni dans S_i, ni dans V_{i+1}.

Exercice 7 (P6 IMO 2022, difficile)
Soit n un entier positif. Un carré nordique est un plateau $n \times n$ qui contient tous les nombres de 1 à n^2, tel que chaque case contient exactement un nombre. Deux cases sont adjacentes si elles partagent une arête. Chaque case qui est plus petite que toutes ses cases adjacente est appelée vallée. Un chemin montant est une suite de une ou plusieurs cases tel que :

— la première case de la suite est une vallée

— chaque case de la suite est adjacente à la précédente

— les nombres écrits dans les cases de la suite sont croissants

Trouvez, en fonction de n, le plus petit nombre possible de chemins montants dans un carré nordique.

Solution de l'exercice 7
https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/2022_IMO_Problems/Problem_6

Introduction aux centroïdes

Exercice 8 (Centroïde, facile)
Soit $A(V, E)$ un arbre. Montrez qu'il existe un sommet $v \in V$ tel que si on retire v de A, toutes les composantes connexes formées sont de cardinal au plus $\frac{|V|}{2}$. Un tel sommet est appelé **centroïde** de A.

Solution de l'exercice 8
On place un jeton sur un sommet quelconque de A. Tant que le jeton n'est pas sur un centroïde, on déplace le jeton vers l'unique sommet adjacent dont la composante est de cardinal strictement supérieur à $\frac{|V|}{2}$. Il n'y a qu'un nombre fini de sommets dans A, et il est impossible

de passer deux fois par un même sommet ; l'algorithme doit donc terminer et renvoyer un centroïde. En effet, si on déplace le jeton le long d'une arête, c'est que le côté où on se déplace est de cardinal strictement supérieur à $\frac{|V|}{2}$, l'autre côté est donc de cardinal strictement inférieur à $\frac{|V|}{2}$ et on ne peut jamais se déplacer dans l'autre sens sur cette arête.

Le centroïde est très utile en informatique, pour créer des structures de données efficaces sur les arbres.

Exercice 9 (Split IOI 2019, difficile)
Soit $G(V, E)$ un graphe non-orienté connexe, et soient $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant c \leqslant |V|$ trois entiers tels que $a + b + c = |V|$. On suppose que pour tout $v \in V$, il existe une composante connexe de $G \backslash \{v\}$ de cardinal au moins a. Montrez qu'il est possible de partitionner V en trois ensembles A, B, C tels que $|A| = a, |B| = b, |C| = c$, et que, parmi les restrictions G_A de G aux sommets de A, G_B de G aux sommets de B et G_C de G aux sommets de C, il y a au moins deux graphes connexes.

Solution de l'exercice 9
https://ioinformatics.org/page/ioi-2019/51

Introduction à la représentation de Tarjan

Dans tout graphe non-orienté, on peut toujours considérer l'arbre du parcours en profondeur d'abord (DFS pour depth first search). Cela partitionne les arêtes du graphe en deux ensembles : un arbre enraciné en le sommet de départ du DFS, et des arêtes dites "de remontée" qui relient deux sommets, où l'un des deux est un ancêtre de l'autre dans l'arbre. L'arbre du DFS est aussi très intéressant à considérer dans le cas orienté, il décompose alors le graphe en quatre ensemble d'arcs.

Exercice 10 (Problème A807, Komal 2021, moyen)
Soit $n \geqslant 2$ et soit G un graphe non-orienté simple, qui a la propriété que chacune de ses arêtes est contenue dans au plus n cycles. Prouvez que le nombre chromatique de G est au plus $n + 1$.

Solution de l'exercice 10
On utilise l'arbre du DFS. Colorions les sommets par profondeur croissante, et pour une même profondeur, par nombre d'arcs de remontée décroissant. Supposons que l'on veuille colorier v, et soit u le parent de v, et t le parent de u, s'il existe. Comme l'arête (u, v) est dans au plus n cycles, il y a au plus n arcs de remontée qui relient v à un ancêtre : v est relié à au plus $n + 1$ sommets déjà coloriés. S'il est adjacent à au plus n couleurs différentes, on peut choisir une couleur restante et colorier v avec. Sinon, v a exactement n arcs de remontée, et il est adjacent à $n + 1$ couleurs. Le sommet v est le premier fils de u considéré, sinon (t, u) serait dans plus de n cycles. Pour la même raison, u n'a aucune arête de remontée. On peut donc recolorier v dans la couleur de u et u en la couleur de l'extrémité la plus haute d'une arête de remontée de v.

Exercice 11 (moyen)
On vous donne un graphe G simple non-orienté et biconnexe, c'est à dire que si on retire n'importe quel sommet du graphe, il reste connexe. Montrez que si G n'est pas biparti, pour chaque sommet v de G, il existe un cycle impair simple passant par v.

Solution de l'exercice 11
On enracine l'arbre du DFS au sommet v. On considère l'arc de remontée le plus haut qui forme un cycle impair. À chaque étape, on XOR notre cycle impair actuel avec le cycle formé par l'arc de remontée qui part plus bas qu'un sommet de notre cycle impair, et qui remonte le plus haut possible. On démontre aisément que l'ensemble d'arêtes formé est un cycle, et comme chacun de ces arcs de remontée forme un cycle pair, le cycle résultant est toujours impair. On répète ce processus tant que le cycle ne passe pas par v. Cet algorithme est correct et termine car, comme le graphe est biconnexe, l'arc choisi remonte strictement plus haut que le sommet le plus haut du cycle actuel ; à chaque étape, le sommet le plus haut du cycle est de plus en plus haut. Comme l'arbre du DFS a une profondeur finie, l'algorithme termine.

Configurations maximales

Exercice 12 (PUMaC Finals, moyen)
Soit G un graphe et soit k un entier positif. Une k-étoile est un ensemble de k arêtes avec une extrémité commune, et un k-couplage est un ensemble de k arêtes qui ont toutes des extrémités différentes. Prouvez que si G a strictement plus de $2(k-1)^2$ arêtes, il contient une k-étoile ou un k-couplage.

Solution de l'exercice 12
On construit un couplage maximal C gloutonnement, en choisissant arbitrairement deux sommets adjacents non reliés jusqu'à ce qu'on ne puisse plus. Si on arrive à choisir au moins k arêtes de cette manière, C est un k-couplage. Sinon, chaque arête possède une extrémité dans C. Comme il y a au plus $2(k-1)$ sommets dans C, par le principe des tiroirs, il existe un sommet de C qui fait partie d'au moins k arêtes, et on a une k-étoile.

Avec un algorithme glouton simple, on peut donc décomposer chaque graphe en deux ensembles de sommets, le premier admet un couplage parfait, le second est indépendant (il n'y a aucune arête reliant deux sommets de l'ensemble). De manière générale, l'algorithme glouton permet de construire des configurations maximales explicitement.

Exercice 13 (P6 IMO 2014, difficile)
Prouvez que pour tout n suffisament grand, dans tout ensemble de n droites en position générale, il est possible de colorer en bleu au moins $\sqrt{n}$ de ses droites de sorte qu'il n'y ait aucune région finie de cet ensemble de bord entièrement bleu.

Solution de l'exercice 13
https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/2014_IMO_Problems/Problem_6

3 Problèmes de construction en arithmétique (Paul et Martin)

Le but de ce TD est de se familiariser avec le processus de construction d'entiers vérifiant certains propriétés.

Les problèmes de construction peuvent être des problèmes à part entière ("Montrer qu'il existe une infinité d'entiers avec la propriété suivante" ou "Montrer qu'il existe une suite infinie d'entiers vérifiant la propriété suivante" ou "Montrer que pour tout n, il existe un ensemble de n entiers vérifiant la propriété suivante") ou bien peuvent intervenir au milieu d'un exercice, par exemple pour obtenir une contradiction.

Pour résoudre des problèmes de construction, il est bon d'avoir quelques résultats d'existence en tête :

- Le théorème des restes chinois : celui-ci donne l'existence d'une infinité de solutions (et donc d'entiers suffisamment grands) à un système de congruences bien posé. On peut donc construire à notre guise un entier vérifiant un certain cahier des charges.
- Le théorème de Zsigmondy 1 : Pour tout triplet $(a, b, n) \neq (2, 1, 3)$, le nombre $a^n + b^n$ admet un facteur premier primitif, c'est-à-dire un nombre premier divisant $a^n + b^n$ mais ne divisant aucun nombre de la forme $a^k + b^k$ pour $k \leqslant n$.
- Le théorème de Zsigmondy 2 : Soit (a, b, n) un triplet d'entier tel que $(a, b, n) \neq (2, 1, 6)$ ou tel que $n = 2$ mais $a + b$ n'est pas une puissance de 2. Alors le nombre $a^n - b^n$ admet un facteur premier primitif.
- Le postulat de Bertrand : Pour tout n, il existe un nombre premier p compris (strictement) entre n et $2n$. Une conséquence intéressante est que pour tout n, il existe un nombre premier p tel que $p \mid n!$ mais p^2 ne divise pas $n!$.
- Le théorème de la progression arithmétique de Dirichlet : pour tout couple (a, b) d'entiers positifs premiers entre eux, il existe une infinité de nombres premiers de la forme $an + b$. Il est à noter que le cas $b = 1$ admet une démonstration élémentaire.

Donnons également quelques conseils sur les stratégies à aborder pour résoudre les exercices de construction.

- L'algorithme glouton : lorsque l'on souhaite construire une permutation de $\mathbb{N}$ vérifiant certaines propriétés, une bonne stratégie est d'utiliser un algorithme glouton pour caser l'entier de votre choix. Cela présente de la façon suivante : supposons que l'on a construit $a_1, \ldots, a_k$ les termes de notre suite. On note x le plus petit entier strictement positif qui n'apparaît pas parmi les a_k. On cherche alors à caser x parmi les prochains termes que l'on va construire.
- La récurrence (première vision) : supposons que l'on cherche à construire un ensemble arbitrairement grand avec une certaine propriété. On peut procéder par récurrence, en construisant un ensemble de taille $1, 2, 3 \ldots$, puis on suppose avoir construit un ensemble de taille $n - 1$, et on l'adapte pour construire un ensemble de taille n.
- La récurrence (deuxième vision) : Supposons que l'on cherche à construire une infinité d'entiers vérifiant une certaine propriété. On peut commencer par en trouver un, puis montrer que si N vérifie la propriété, alors $f(N)$ vérifie aussi la propriété. Chercher les nombres de la forme $kN + b$.
- Se simplifier la vie : la stratégie pour attaquer un problème est la suivante : vous établissez un cahier des charges sur les entiers à construire et vous cherchez des entiers qui vérifient ce cahier des charges. Souvent, le cahier des charges contient plusieurs degrés de liberté, que vous pouvez utiliser pour vous simplifier la vie au maximum : supposer que tel paramètre est un nombre premier, une puissance de 2 etc...

Exercices

Les exercices suivant sont centrés autour du théorème des restes chinois.

Exercice 1
Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, il existe des entiers a, b tels que $4a^2 + 9b^2 - 1$ est divisible par n.

Exercice 2
(Lemme de Schür) Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme non constant. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers qui divisent $P(n)$ pour au moins un $n \in \mathbb{Z}$. Montrer qu'en fait, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, il existe une infinité d'entiers $n > 0$ tels que $P(n)$ a au moins r facteurs premiers distincts.

Exercice 3
(IMO SL 1999, N3) Montrer qu'il existe une infinité de couples d'entiers (a, b) vérifiant $a(a+1) \mid b^2 + 1$.

Exercice 4
Montrer qu'il existe un sous-ensemble A de $\mathbb{N}^\star$ de cardinal 2022 tel que pour tout sous-ensemble B de A, la moyenne arithmétique des éléments de B est une puissance parfaite.

Les exercices suivant sont centrés autour de l'usage de l'algorithme glouton pour construire des suites d'entiers vérifiant certaines propriétés.

Exercice 5
Déterminer s'il existe une suite infinie d'entiers (a_n) d'entiers strictement positifs vérifiant les deux propriétés suivantes :

— Tout entier strictement positif apparaît exactement une fois dans la suite (a_n).
— Pour tout entier $n \geqslant 1$, $\prod_{i=1}^n a_i$ s'écrit comme une puissance $n-$ème d'un entier.

Exercice 6
Montrer qu'il existe une suite (a_n) à valeurs dans $\mathbb{N}^\star$ avec les deux propriétés suivantes :

— Tout entier strictement positif apparaît exactement une fois dans la suite (a_n).
— Pour tout $n \geqslant$, le nombre $a_1 + \ldots + a_n$ est divisible par n.

Exercice 7
(France TST 2019/2020) Soit $a_0, a_1, \ldots$ une suite d'entiers positifs, et soit (b_n) la suite définie par $b_n = \gcd(a_n, a_{n+1})$ pour tout $n \geqslant 0$. Montrer qu'il est possible de choisir la suite (a_n) de sorte que tout entier naturel non nul soit égal à exactement un des termes $a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots$.

Les exercices suivant utilsient diverses idées/théorèmes pour construire des entiers aux propriétés fixées.

Exercice 8
(IMO SL 2014 N4)Soit $n > 1$ un entier. On pose

$$a_k = \left\lfloor \frac{n^k}{k} \right\rfloor$$

Montrer qu'il existe une infinité de termes de la suite a_k qui sont impairs.

Exercice 9
(Iran 2012) Soit $t > 0$ un entier. Montrer qu'il existe un entier n premier avec t tel qu'aucun des termes de la suite $n + t, n^2 + t, n^3 + t, \ldots$ ne soit une puissance parfaite.

Exercice 10
Pour $a \geqslant 2$, on dit qu'un entier positif n est $a-$martinien s'il existe $t_1, \ldots, t_k$ des entiers tels que l'écriture en base 10 de n soit la concaténation des écritures en base 10 des t_i, et vérifiant $n = t_1^a + \ldots + t_k^a$. Etant donné $\ell + 1$ entiers $r, a_1, \ldots, a_\ell$, montrer qu'il existe n qui est a_j-martinien pour $j = 1, \ldots, \ell$ est congru à r modulo 2021.

Exercice 11
(MEMO TST Croatie 2009 P4) Montrer qu'il existe une infinité d'entiers n tels que n^2+1 divise $n!$, et une infinité telle que $n^2 + 1$ ne divise pas $n!$.

Exercice 12
(BXMO 2022) Un sous-ensemble A de $\mathbb{N}$ est dit *convenable* si chaque entier $n > 0$ admet au plus un facteur premier p tel que $n - p \in A$.

1. Montrer que l'ensemble des carrés parfaits est convenable.
2. Donner un ensemble convenable infini et ne contenant aucun carré parfait.

Exercice 13
(RMM 2015 P1) Existe-t-il une suite infinie d'entiers strictement positifs $a_1, \ldots$ telle que a_m et a_n sont premiers entre eux ssi $|m - n| = 1$?

Exercice 14
(RMM 2012 P4) Montrer qu'il existe une infinité d'entiers n tels que $2^{2^n+1} + 1$ est divisible par n, mais $2^n + 1$ ne l'est pas.

Exercice 15
(BXMO 2020) Existe-t-il un entier n admettant exactement 2020 diviseurs d vérifiant que $\sqrt{n} < d < 2\sqrt{n}$?

Exercice 16
(JBMO SL 2021 N4) Paul et Martin jouent au jeu suivant. D'abord, Martin choisit un ensemble infini S de nombres premiers. Paul donne ensuite une suite infinie d'entiers $x_1, x_2, \ldots$. Martin choisit ensuite un entier M et un nombre premier p de S. Paul gagne si il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont divisibles par p^M. Sinon, Martin gagne.

Quel joueur dispose d'une stratégie gagnante ?

Exercice 17
(USAMO 2017 P1) Montrer qu'il existe une infinité de couples (a, b) d'entiers avec $a, b > 1$ et a et b premier entre eux et tels que $a + b \mid a^b + b^a$.

Exercice 18
(EGMO 2017 P5) Soit $n \geqslant 2$ un entier. Un $n-$uplet $(a_1, \ldots, a_n)$ d'entiers strictement positifs (pas forcément distincts) est dit *onéreux* s'il existe un entier strictement positif k tel que

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3)\dots(a_n + a_1) = 2^{2k-1}$$

1) Trouver tous les entiers $n \geqslant 2$ pour lesquels il existe un $n-$uplet onéreux.

2) Montrer que pour tout entier positif impair m, il existe un entier $n \geqslant 2$ tel que m appartient à un $n-$uplet onéreux.

Solutions

Exercice 1
Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, il existe des entiers a, b tels que $4a^2 + 9b^2 - 1$ est divisible par n.

Solution de l'exercice 1
On décompose $n = 2^x \prod p_i^{a_i}$ en produit de facteurs premiers. On va trouver des valeurs de a et b tels que $p_i^{a_i} \mid 4a^2+9b^2-1$ et on va en déduire des valeurs de a et de b tels que $n \mid 4a^2+9b^2-1$ à l'aide du théorème des restes chinois.

Puisque 3 est inversible modulo 2^x, on a $2^x \mid (3 \cdot 3^{-1})^2 - 1$ donc on peut prendre $a = 0 \mod 2^a$ et $b = 3^{-1} \mod 2^x$.

Puisque 2 est inversible modulo $p_i^{a_i}$, on a $p_i^{a_i} \mid (2 \cdot 2^{-1})^2 - 1$ donc on peut prendre $a = 2^{-1} \mod p_i^{a_i}$ et $b = 0 \mod p_i^{a_i}$.

D'après le théorème des restes chinois, les systèmes

$$\begin{cases} a & \equiv & 0 & & \mod 2^x \\ a & \equiv & 2^{-1} & & \mod p_1^{a_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a & \equiv & 2^{-1} & & \mod p_r^{a_r} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b & \equiv & 3^{-1} & & \mod 2^x \\ b & \equiv & 0 & & \mod p_1^{a_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ b & \equiv & 0 & & \mod p_r^{a_r} \end{cases}$$

admettent des solutions a et b modulo n, de sorte que n divise $4a^2 + 9b^2 - 1$.

Exercice 2
(Lemme de Schür, variante du IMO SL 2009 N3) Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme non constant. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers qui divisent $P(n)$ pour au moins un $n \in \mathbb{Z}$. Montrer qu'en fait, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, il existe une infinité d'entiers $n > 0$ tels que $P(n)$ a au moins r facteurs premiers distincts.

Solution de l'exercice 2
On peut supposer que $P(0) \neq 0$, sinon, c'est très facile.

Pour la première partie, si, par l'absurde, il n'existe que N nombres premiers distincts $p_1, \dots, p_N$ qui divisent un nombre de la forme $P(n)$, alors pour tout entier a, le nombre $n = a \times p_1 \times \dots \times p_N \times P(0)$ vérifie $P(n) = P(0) \times (1 + x)$ où x est un entier divisible par $n/P(0)$; en particulier si $a > 2$, $|1 + x| > 1$ a un diviseur premier p différent des p_i.

La deuxième partie est conséquence facile des restes chinois.

Exercice 3
(IMO SL 1999, N3) Montrer qu'il existe une infinité de couples d'entiers (a, b) vérifiant $a(a+1) \mid b^2+1$.

Solution de l'exercice 3
On dispose du lemme important suivant : soit $p \equiv 3 \mod 4$ un nombre premier divisant un nombre de la forme a^2+b^2 avec a et b entiers. Alors $p \mid a$ et $p \mid b$.

Preuve : Supposons que ce n'est pas le cas et que a et b sont premiers avec p. Alors $a^2 = -b^2 \mod p$, donc $(ab^{-1})^2 = -1 \mod p$. Si on note $c = ab^{-1}$, on a alors $c^4 = 1 \mod p$, donc l'ordre de c mod p divise 4. Comme il ne peut pas valoir 1 ou 2, car alors on aurait p divisant c^2-1, il vaut 4, et donc 4 divise $p-1$, ce qui est exclus.

En particulier, les nombres premiers divisant b^2+1 sont de la forme $4k+1$.

Ainsi, on cherche a tel que a et $a+1$ ont pour facteurs premiers des nombres de la forme $4k+1$.

On peut pour cela s'inspirer de la preuve de l'infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo 4, et considérer par exemple un entier a de la forme $a = (4k^2+1)^2$ (on pourra s'inspirer du lemme pour vérifier que $a(a+1)$ est divisible par 2 et par des nombres premiers congrus à 1 modulo 4).

Alors le nombre $a(a+1)$ est de la forme $\prod q_i^{\alpha_i}$ avec $q_i = 1 \mod 4$. On sait que pour chaque q_i, il existe une entier x_i tel que $x_i^2 = -1 \mod q_i$ (-1 est un résidu quadratique modulo q_i). Il faut vérifier qu'il existe y_i tel que $y_i^2 = -1 \mod q_i^{\alpha_i}$. Ce résultat correspond au lemme de Hensel, que l'on redémontre ici.

On procède par récurrence sur α_i. Supposons que l'on ait y_i tel que $y_i^2 = -1 \mod q_i^{\alpha_i}$. On regarde $(y_i + kq_i^{\alpha_i})^2 = y_i^2 + 2y_ikq_i^{\alpha_i} + k^2q_i^{2\alpha_i} \equiv y_i^2 + 2y_ikq_i^{\alpha_i} \mod q_i^{\alpha_i+1}$. Par hypothèse de récurrence, on a $y_i^2+1 = k'q_i^{\alpha_i}$. On choisit alors k tel que $2y_ik + k' = 0 \mod q_i$. Alors $(y_i + kq_i^{\alpha_i})^2 = -1 \mod q_i^{\alpha_i+1}$, ce qui achève la récurrence.

Conclusion : pour tout i, il existe y_i tel que $y_i^2 = -1 \mod q_i^{\alpha_i}$. Par les restes chinois, on obtient b tel que $b^2+1 = 0 \mod a(a+1)$, comme voulu. On a construit un couple (a, b), on peut en construire une infinité par ce procédé.

Exercice 4
Montrer qu'il existe un sous-ensemble A de $\mathbb{N}^\star$ de cardinal 2022 tel que pour tout sous-ensemble B de A, la moyenne arithmétique des éléments de B est une puissance parfaite.

Solution de l'exercice 4
On commence par montrer qu'il existe un sous-ensemble A de $\mathbb{N}^\star$ de cardinal 2022 tel que pour tout sous-ensemble B de A, la moyenne arithmétique des éléments de B est entière.

Pour cela, on prend 2022 entiers $\{a_1, \ldots, a_{2022}\}$. Pour tout sous-ensemble B, on note $m(B)$ la moyenne arithmétique des éléments du sous-ensemble B. Alors $|B|m(B)$ est entier pour tout B, avec $|B| \leqslant 2022$, de sorte que l'ensemble $\{2022!a_1, 2022!a_2, \ldots, 2022!a_{2022}\}$ convient. On note $A' = \{b_1, \ldots, b_{2022}\}$ les entiers obtenus.

Maintenant, on veut multiplier chaque entier par une nouvelle constante de sorte que les $m(B)$ (où $m(B)$ désigne la moyenne arithmétique des éléments du sous-ensemble B de A') soient des puissances parfaites.

Pour cela, on écrit $m(B) = \prod p_i^{\alpha_i(B)}$. On veut multiplier tous les entiers par un nombre $k = \prod p_i^{\beta_i}$, de sorte que la moyenne devienne $km(B) = \prod p_i^{\alpha_i(B)+\beta_i}$.

On va utiliser les restes chinois pour cela, et le plus simple est que $km(B)$ soit de la forme $a^{p(B)}$ avec $p(B)$ un nombre premier. On se donne donc $2^{2022} - 1$ nombres premiers tous supérieux ou égaux aux $\alpha_i(B)$, et on choisit β_i vérifiant pour tout B :

$$\beta_i \equiv -\alpha_i(B) \mod p(B)$$

L'ensemble $\{kb_1, \ldots, kb_2\}$ vérifie alors la propriété voulue.

Exercice 5
Déterminer s'il existe une suite infinie d'entiers (a_n) d'entiers strictement positifs vérifiant les deux propriétés suivantes :

— Tout entier strictement positif apparaît exactement une fois dans la suite (a_n).

— Pour tout entier $n \geqslant 1$, $\prod_{i=1}^{n} a_i$ s'écrit comme une puissance $n-$ème d'un entier.

Solution de l'exercice 5
On montre que oui, on utilise l'algorithme glouton.

On commence avec $a_1 = 1$. On suppose construits les k premiers termes et on note x le plus petit entier qui n'apparaît pas dans la suite. On construit a_{k+1} de sorte à pouvoir faire apparaître $a_{k+2} = x$.

Etablissons le cahier des charges en posant $\prod a_i = \prod p_i^{kb_i}$ et $x = \prod p_i^{c_i}$. Donc on veut $a_{k+1} = \prod p_i^{d_i}$ de sorte que pour tout i, on a

$$\begin{aligned} d_i + kb_i &\equiv 0 \mod k+1 \\ d_i + kb_i + c_i &\equiv 0 \mod k+2 \end{aligned}$$

Encore une fois, ce système admet une solutiuon suffisamment grande avec le théorème des restes chinois.

On peut donc caser x, ce qui achève la récurrence et conclut.

Exercice 6
Montrer qu'il existe une suite (a_n) à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ avec les deux propriétés suivantes :

— Tout entier strictement positif apparaît exactement une fois dans la suite (a_n).

— Pour tout $n \geqslant$, le nombre $a_1 + \ldots + a_n$ est divisible par n.

Solution de l'exercice 6
On applique un algorithme glouton. On commence avec $a_1 = 1$. On suppose que $a_1, \ldots, a_k$ sont construits et on note x le plus petit entier strictement positif qui n'apparaît pas dans l'ensemble $\{a_1, \ldots, a_k\}$. On veut a_{k+1} tel qu'on puisse poser $a_{k+2} = x$. Pour cela, on note $s = a_1 + \ldots + a_k$. Il faut que

$$\begin{aligned} s + a_{k+1} &\equiv 0 \mod k+1 \\ s + a_{k+1} + x &\equiv 0 \mod k+2 \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} a_{k+1} &\equiv -s \mod k+1 \\ a_{k+1} &\equiv -s - x \mod k+2 \end{aligned}$$

qui possède une infinité de solutions (et donc une solution qui n'est pas déjà dans la suite (a_i).

On peut donc s'arranger pour placer x, ce qui achève la récurrence et guarantit l'existence de la suite.

Exercice 7
(France TST 2019/2020) Soit $a_0, a_1, \dots$ une suite d'entiers positifs, et soit (b_n) la suite définie par $b_n = \gcd(a_n, a_{n+1})$ pour tout $n \geqslant 0$. Montrer qu'il est possible de choisir la suite (a_n) de sorte que tout entier naturel non nul soit égal à exactement un des termes $a_0, b_0, a_1, b_1, \dots$.

Solution de l'exercice 7
On utilise un algo glouton, on commence par $a_0 = 2, a_1 = 9$, de sorte que $b_0 = 1$.

On suppose que $a_0, \dots, a_n$ et $b_0, \dots, b_{n-1}$ sont construits, avec a_n ayant un diviseur d n'apparaissant pas dans les suites a et b, et on note x le plus petit entier n'apparaissant pas dans les suites a et b. On va chercher à caser $x = b_{n+2}$.

$$\begin{array}{ccccccc} a_n & & a_{n+1} & & a_{n+2} & & a_{n+3} \\ & b_n & & b_{n+1} & & b_{n+2} & \end{array}$$

Soit $d = \prod p_i^{c_i}$, $a_n = \prod p_i^{e_i}$ et enfin $x = \prod p_i^{f_i}$. Une raison pour laquelle on ne peut pas guarantir $x = b_{n+1}$ est si $d_i, e_i > c_i$. On a donc la situation suivante, on doit alors choisir ε_i et boucher les trous

$$\begin{array}{ccccccc} \prod p_i^{e_i} & & \prod p_i^{c_i+\varepsilon_i} & & ? & & ? \\ & \prod p_i^{c_i} & & ? & & \prod p_i^{f_i} & \end{array}$$

Pour cela, on choisit j_1, j_2 tels que $e_j = f_j = c_j = 0$ et tel que p_j n'est diviseur premier d'aucun terme des suites (pour $j = j_1, j_2$). On prend alors $\varepsilon_i = 0$ si $i \neq j_1, j_2$ et on complète ensuite comme suit :

$$\begin{array}{ccccccc} \prod p_i^{e_i} & & p_{j_1}^3 p_{j_2} \prod p_i^{c_i} & & p_{j_1} p_{j_2}^3 \prod p_i^{f_i} & & \prod p_i^{f_i} q \\ & \prod p_i^{c_i} & & p_{j_1} p_{j_2} \prod p_i^{\min(c_i, f_i)} & & \prod p_i^{d_i} & \end{array}$$

(la complexité de la construction vient du fait qu'il faut s'assurer à chaque étape qu'on n'écrit pas deux fois le même nombre)

avec q encore un autre facteur premier suffisamment grand pour ne jamais apparaître dans la suite, de sorte que a_{n+3} possède un diviseur qui n'apparaît pas dans la liste.

On a complété l'hérédité de notre algorithme.

Exercice 8
(IMO SL 2014 N4)Soit $n > 1$ un entier. On pose

$$a_k = \left\lfloor \frac{n^k}{k} \right\rfloor$$

Montrer qu'il existe une infinité de termes de la suite a_k qui sont impairs.

Solution de l'exercice 8
Si n est impaire, tout $k = n^r$ fera l'affaire.

On se concentre sur le cas n pair. L'idée est que n^k soit très proche d'un multiple de k, de sorte que l'on contrôle le terme a_k. D'autre part, l'idée de prendre $k = n^r$ n'est pas à jeter, on pourrait regarder des k de la forme $n^r p$ avec p à choisir.

Quel est le cahier des charges ? $\frac{n^k}{k} = \frac{n^{n^r p - r}}{p}$. Comme on aime les histoires de p divisant des nombres de la forme $n^s - 1$, on peut chercher p et r tels que $p \mid n^{n^r p - r} - 1$, ou encore $n^r p = r \mod \omega_p$, où ω_p est l'ordre de n modulo p.

Par Zsigmondy, pour q premier, $n^q - 1$ admet une facteur premier primitif p (à exceptions près), c'est-à-dire que q est l'ordre de n modulo p. Cette astuce est pratique, car regarder modulo l'ordre revient à regarder modulo un nombre premier, ce qui est très confortable. En particulier, $p = 1 \mod q$, et il reste à prendre r de sorte que $r = 1 \mod q$ et $n^r = 1 \mod q$, ce qui peut se faire en premier $r = (q-1)^2$.

Bref, prendre q grand, $r = (q-1)^2$, p facteur premier primitif de $n^q - 1$ et $k = n^r p$. Tout cela donne

$$\left\lfloor \frac{n^k}{k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n^{n^r p}}{n^r p} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n^{n^r p - r}}{p} \right\rfloor = \frac{n^{n^r p - r} - 1}{p}$$

qui est bien impair.

Exercice 9
(Iran 2012) Soit $t > 0$ un entier. Montrer qu'il existe un entier $n > 1$, premier avec t tel qu'aucun des termes de la suite $n + t, n^2 + t, n^3 + t, \ldots$ ne soit une puissance parfaite.

Solution de l'exercice 9
Oublions premièrement la condition que n doit être premier à t.

Si, pour un entier N, on choisit $n \equiv 1 \pmod N$, on a $n^k + t \equiv t + N \pmod N$ pour tout k ; en particulier, si $N = (t+1)^2$, on sait que pour tout $p \mid t+1$ premier, $v_p(n^k + t) = v_p(t+1)$. C'est super car ça signifie qu'on contrôle très bien les valuations $p-$adiques des $n^k + t$, au moins pour les p qui divisent $t + 1$. En particulier, si $t + 1$ n'est pas une puissance, le problème est résolu. Mais même si $t + 1$ est une puissance $\ell-$ième (mais pas une puissance $m-$ème pour $m > \ell$), alors si un terme $n^k + t$ est une puissance, ça doit être une puissance $d-$ième pour un diviseur d de ℓ.

Si de plus, par hasard, n était une puissance ℓ-ième, on aurait que $n^k + t$ devrait être une puissance $d-$ème à distance t de la puissance $d-$ème n^k ; si finalement $\sqrt[\ell]{n} \geq t$, on aurait une contradiction puisque pour tout $x > 0$, $(x+1)^d > x^d + x$ et que donc, avec $x = \sqrt[d]{n} > t$, on aurait que $n^k + t$ est encadré entre deux puissances $d-$ème.

On cherche donc un entier n, premier à t, congru à 1 modulo $(t+1)^2$, et qui est une puissance $\ell-$ème d'un entier au moins égal à t ; il suffit de choisir $n = (1 + t(t+1)^2)^\ell$.

Exercice 10
Pour $a \geqslant 2$, on dit qu'un entier positif n est $a-$martinien s'il existe $t_1, \ldots, t_k$ des entiers tels que l'écriture en base 10 de n soit la concaténation des écritures en base 10 des t_i, et vérifiant $n = t_1^a + \ldots + t_k^a$. Etant donné $\ell + 1$ entiers $r, a_1, \ldots, a_\ell$, montrer qu'il existe n qui est a_j-martinien pour $j = 1, \ldots, \ell$ est congru à r modulo 2021.

Solution de l'exercice 10
L'idée est de partir du nombre 1, qui est clairement $a-$martinien pour tout entier a, et de

construire des nombres martienens plus grands à partir. L'idée la plus simple est toujours la meilleure ; montrons le résultat suivant :

Lemme 1. Soit n un entier $a-$martinien, il existe un entier m_0 tel que pour tout $m \geq \lceil \log_{10}(n) \rceil$ divisible par a, $10^m + n$ est $a-$martinien.

En effet, si $n = t_1^a + \ldots + t_k^a$ où l'écriture en base 10 de n est la concaténation des (écritures en base 10 des) t_i, pour m assez grand, l'écriture en base 10 de $10^m + n$ va être la concaténation des écritures en base 10 de 10^{m-s-t}, de t nombres 0 et des t_i, où $0 \leq t \leq m - s$, et $s = \lceil \log_{10}(n) \rceil$. Si on peut choisir un t tel que $\left(10^{m-s-t}\right)^a = 10^m$, alors notre $10^m + n$ est bien $a-$martinien. Il suffit pour cela que $m(a-1) - as$ soit une entier divisible par a inférieur à $a(m-s)$, ce qui est bien le cas pour notre m.

Dès lors, si on définit une suite par $x_1 = 1$, et $x_{n+1} = x_n + 10^m$ où m est un entier divisible par $\varphi(2021) \times \prod_{i=1}^{\ell} a_i$ supérieur à $\lceil \log_{10}(x_n) \rceil$, on voit par le théorème d'Euler-Fermat que x_r est un entier qui satisfait les conditions de l'énoncé.

Exercice 11
(MEMO TST Croatie 2009 P4) Montrer qu'il existe une infinité d'entiers n tels que n^2+1 divise $n!$, et une infinité telle que n^2+1 ne divise pas $n!$.

Solution de l'exercice 11
Une infinité ne divise pas : On cherche n tel que n^2+1 soit divisible par un facteur premier plus grand que n, de sorte que p divisera n^2+1 mais pas $n!$.

Soit p premier congru à $1 \bmod 4$. -1 admet une racine carrée x et $p - x$. On a $p > x$ et p qui divise x^2+1, de sorte que et x^2+1 ne divise pas $x!$.

Une infinité divise : Il suffit d'écrire $n^2+1 = abc$ avec $a, b, c < n$. On veut factoriser n^2+1, donc on pense à Sophie Germain :

$$4b^4 + 1 = (2b^2 - 2b + 1)(2b^2 + 2b + 1)$$

$2b^2 - 2b + 1 < 2b^2$, donc de ce point de vue c'est bon. Maintenant, il suffit d'écrire $2b^2 + 2b + 1$ comme le produit de deux facteurs premiers, l'estimation de la taille nous permettra de conclure. (en passant, notons que les deux facteurs sont premiers entre eux). Cherchons par exemple b tel que $5 \mid 2b^2 + 2b + 1$. On voit qu'il suffit de prendre $b = 1 \mod 5$. Bref, pour n de la forme $2(5k+1)^2$, on peut factoriser en trois facteurs distincts inféireurs à n, donc leur produit va diviser $n!$.

Exercice 12
(BXMO 2022) Un sous-ensemble A de $\mathbb{N}$ est dit *convenable* si chaque entier $n > 0$ admet au plus un facteur premier p tel que $n - p \in A$.

1. Montrer que l'ensemble des carrés parfaits est convenable.
2. Donner un ensemble convenable infini et ne contenant aucun carré parfait.

Solution de l'exercice 12
1) Soit n un entier admettant deux facteurs premiers p et q tels que $n - p = a^2$ et $n - q = b^2$. On peut alors poser $a = pc$ et $b = qd$, poser $n = pqk$.

On obtient que $p^2c^2 + p = q^2d^2 + q$. Maintenant

$$p^2c^2 = q^2d^2 + q - p < (qd+1)^2$$

donc $pc < qd + 1$ et de même $qd < pc + 1$, de sorte que $qd = pc$ donc $p = q$, ce qui est absurde.

2) On prend un de nos ensembles préférés avec une croissance sur linéaire, pour espérer adapter l'argument plus haut. Mon ensemble préféré, c'est l'ensemble des $n!$ avec $n \geqslant 2$. Comme il existe p ne divisant qu'une fois $n!$, l'ensemble est disjoint de l'ensemble des carrés parfaits.

Maintenant on prend n et on écrit $n - p = a!$ et $n - q = b!$. Si $a > b$, alors $b!$ divise $a!$, donc q divise $b! + q = a! + p$ et q divise $a!$, donc q divise p, ce qui est absurd. L'ensemble est bien convenable.

Exercice 13
(RMM 2015 P1) Existe-t-il une suite infinie d'entiers strictement positifs $a_1, \ldots$ telle que a_m et a_n sont premiers entre eux ssi $|m - n| = 1$?

Solution de l'exercice 13
Encore une fois par un algo glouton, mais qui nécessite de la préparation en amont. Pour se simplifier la vie, on va choisir nos termes comme des produits de facteurs premiers distincts (en gros, les valuations valent toutes 1).

Ici aussi, on va raisonner sur deux étages. On se donne deux familles (p) et (q) de nombres premiers, et on cherche une suite avec cette tête :

$$\begin{array}{ccccccc} \prod p_i & & \prod p_i & & \prod p_i & & \prod p_i \\ & \prod q_i & & \prod q_i & & \prod q_i & \end{array}$$

Avec cette construction, malheureusement, deux membres de duex étages différents sont premiers entre eux. Il faudrait donc multiplier les membres du premier étage par un facteur q, et inversement. Comme suit

$$\begin{array}{ccccccc} q_1 \prod p_i & & q_2 \prod p_i & & q_3 \prod p_i & & q_4 \prod p_i \\ & p_1 \prod q_i & & p_2 \prod q_i & & p_3 \prod q_i & \end{array}$$

Le problème, c'est qu'alors deux nombres consécutifs ne sont plus forcément premiers entre eux. On pourrait ajuster les indices, mais en essayant on voit qu'il va falloir organiser un "roulement" des facteurs p et des facteurs q présents à chaque étage. Ceci motive la construction suivante :

$$\begin{array}{cccc} c_{n+1}b_{n+1} \prod^n a_k b_k & & c_{n+2}b_{n+2} \prod^{n+1} a_k b_k & \\ & d_{n+1}a_{n+1} \prod^n c_k d_k & & d_{n+2}a_{n+2} \prod^{n+1} c_k d_k \end{array}$$

Exercice 14
(RMM 2012 P4) Montrer qu'il existe une infinité d'entiers n tels que $2^{2^n+1} + 1$ est divisible par n, mais $2^n + 1$ ne l'est pas.

Solution de l'exercice 14
Plusieurs approches sont possibles, on en propose deux.

La première se fait avec des gros théorème. Tout d'abord, avec Zsigmondy et $n \neq 1$, on trouve que $2^{2^n+1}+1$ admet une facteur premier primitif p_n, qui ne divisera donc pas 2^n+1. Maintenant, p_n n'a pas d'obligations d'être une diviseur de n. On doit donc choisir correctement n, de sorte que np_n puisse fonctionner.

Prenons n une puissance de 3 (puisque 3 divise beaucoup de nombres de la forme 2^n+1). On note $n = 3^k$.

$v_3(2^{3^k}+1) = k+1$ tandis que $v_3(2^{2^{3^k}+1}+1) = k+2$ (avec LTE).

Donc n va diviser 2^n+1 et $2^{2^n+1}+1$. Ce n'est pas encore ce que l'on veut.

On combine avec notre observation de Zsigmondy.

On pose $a_k = 2^{3^k}+1$ et p_k le facteur premier primitif de a_k.

On pose alors $n = 3^{k-1}p_k$. Par Fermat, $2^n+1 \equiv a_{k-1} \mod p_k$, de sorte que n ne divise pas 2^n+1. Ensuite, LTE nous assure que $n \mid 2^{2^n+1}+1$.

La deuxième se fait par récurrence. Supposons que l'on a un N qui vérifie la propriété (on verra après le N de départ).

On va utiliser que $2^a+1 \mid 2^b+1$ ssi $a \mid b$.

Posons $M = 2^N+1$. Notons que N ne divise pas 2^N+1, donc M ne divise pas 2^M+1. (rapport au fait que 2^a+1 divise 2^b+1 seulement si a divise b.

D'autre part, on a $N \mid 2^M+1$, donc $2^N+1 \mid 2^{2^M+1}+1$, soit $M \mid 2^{2^M+1}+1$.

Donc M vérifie l'énoncé.

Maintenant, on doit initialiser. Pour trouver l'initialisation, il faut en fait utiliser le raisonnement de la solution 1. On voit notamment que $n = 3 \times 19$ vérifie la propriété.

Exercice 15

(BXMO 2020) Existe-t-il un entier n admettant exactement 2020 diviseurs d vérifiant que $\sqrt{n} < d < 2\sqrt{n}$?

Solution de l'exercice 15

Première idée : 3^{2019} a exactement 2020 diviseurs (impairs, c'est important pour la suite).

Deuxième idée : Si n n'est pas un carré et est divisible par 2^x avec x "grand", pour tout diviseur impair $d < 2\sqrt{n}$, il existe un unique entier $0 \leq y \leq x$ avec $\sqrt{n} < 2^y d < 2\sqrt{n}$ et ces différents d donnent des différents $2^y d$. De plus, chacun des diviseurs entre $\sqrt{n}$ et $2\sqrt{n}$ est de cette forme.

Troisième idée : combiner les deux idées !

Si on choisit $n = 2^{42^{42}} \times 3^{2019}$, puisque 2019 est impair, n n'est pas un carré, et n a exactement 2020 diviseurs impairs $< 2\sqrt{n}$ car $3^{2019} < 2^{42^{42}/2+1} \times 3^{2019/2} = 2\sqrt{n}$; de plus pour chacun de ces diviseurs d il existe un unique entier $y \leq 42^{42}$ qui vérifie $\sqrt{n} < 2^y d < 2\sqrt{n}$; en effet, cela résulte de $2^{42^{42}} > 2^{42^{42}/2} \times 3^{2019/2} = \sqrt{n}$. Cela conclut.

Exercice 16

(JBMO SL 2021 N4) Paul et Martin jouent au jeu suivant. D'abord, Martin choisit un ensemble infini S de nombres premiers. Paul donne ensuite une suite infinie d'entiers $x_1, x_2, \ldots$. Martin choisit ensuite un entier M et un nombre premier p de S. Paul gagne si il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont divisibles par p^M. Sinon, Martin gagne.

Quel joueur dispose d'une stratégie gagnante ?

Solution de l'exercice 16
Paul n'a qu'à faire une extraction diagonale : $x_i = \prod_{j \leqslant i} p_j^i$, où (p_i) est une numérotation des éléments de S.

Exercice 17
(USAMO 2017 P1) Montrer qu'il existe une infinité de couples (a, b) d'entiers avec $a, b > 1$ et a et b premier entre eux et tels que $a + b \mid a^b + b^a$.

Solution de l'exercice 17
On va chercher a et b tels que $a + b = p$ est un nombre premier (cela guarantit immédiatement que a et b sont premiers entre eux, et cela simplifie grandement les calculs en perspective, puisqu'on doit seulement regarder modulo un nombre premier).

On constate alors que modulo p :

$$a^b + b^a = (-b)^b + b^a = b^a(1 + (-1)^b b^{b-a}) \mod p$$

Si on cherche b impaire, on peut réécrire la condition comme $b^{b-a} = 1 \mod p$. Or $b - a = 2b - p$. Donc l'ordre de b modulo p divise $2b - p$ et $p - 1$, donc il suffit qu'il divise $2b - 1$.

En résumé, on cherche (b, p) des nombres tels que $p > b$, b est impaire, p est premier et p divise $b^{2b-1} - 1$.

On va utiliser Zsigmondy. Prenons b impaire tel que $2b - 1 = q$ est premier (qui existe car on a une infinité de nombre premiers de la forme $4k + 1$), puis prenons p un facteur premier primitif de $b^q - 1$. Alors l'ordre de b mod p est exactement q, donc q divise $p - 1$, de sorte que $p \geqslant q + 1 > b$.

On pose alors $a = p - b$. On vérifie que

$$b^{p-b} + (p - b)^b = b^{1-b} + (-b)^b = 0 \mod p$$

du fait de $b^{2b-1} = 1 \mod p$, qui se réécrit $b^b = b^{1-b} \mod p$.

Exercice 18
(EGMO 2017 P5) Soit $n \geqslant 2$ un entier. Un $n-$uplet $(a_1, \ldots, a_n)$ d'entiers strictement positifs (pas forcément distincts) est dit *onéreux* s'il existe un entier strictement positif k tel que

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \ldots (a_n + a_1) = 2^{2k-1}$$

1) Trouver tous les entiers $n \geqslant 2$ pour lesquels il existe un $n-$uplet onéreux.

2) Montrer que pour tout entier positif impair m, il existe un entier $n \geqslant 2$ tel que m appartient à un $n-$uplet onéreux.

Solution de l'exercice 18
1) Si n est impair, le $n-$uplet $(1, \ldots, 1)$ convient. Supposons que $n = 2\ell$ et qu'il existe un $n-$uplet onéreux $(a_1, \ldots, a_n)$ tel que $(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \ldots (a_n + a_1) = 2^{2k-1}$ avec k entier.

Si a_t est le plus grand élément du $n-$uplet, alors

$$2^k = a_t + a_{t-1} \leqslant 2a_t < 2(a_t + a_{t+1}) = 2^{k'+1}$$

$$2^{k'} = a_t + a_{t+1} \leqslant 2a_t < 2(a_t + a_{t-1}) = 2^{k+1}$$

On déduit que $2^k = 2^{k'}$ et $a_{t-1} = a_{t+1}$. On peut alors retirer a_{t-1} et a_t, on obtient un $n-2$ uplet onéreux. On peut faire une récurrence descendante, en voyant que $n = 2$ ne marche pas.

2) Pour la construction, on remarque que si m vérifie la propriété, alors $2m$ aussi (homogénéité). On a donc l'idée de faire une récurrence (forte). Il faut le cas m impair. On pose $m = 2^\ell - d$, où ℓ est la plus petite puissance de 2 supérieure à m. Par hypothèse, il existe un $n-$uplet onéreux contenant d (disons que $a_1 = d$ quitte à cycler). Alors le $n-$uplet $(d, m, d, \dots)$ est onéreux et contient m.

4 Problèmes de grilles en combinatoire (Émile)

Exercice 1
Soient k, m, n des entiers strictement positifs. A quelle condition peut-on paver le rectangle $m \times n$ avec des rectangles $1 \times k$ ou $k \times 1$?

Exercice 2
(IMO SL $2017, C1$)

On considère un rectangle à côtés entiers impairs. On divise celui-ci en plus petits rectangles dont les côtés sont toujours entiers. Montrer qu'il existe un des petits rectangles dont les distances aux quatre côtés du grand sont toutes de même parité.

Exercice 3
(IMO $2018, P4$)

Un site est un point (x, y) du plan tel que x et y soient des entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à 20. Initialement, chacun des 400 sites est inoccupé. Alice et Bernard placent chacun leur tour des pierres, en commençant par Alice. À son tour, Alice place une nouvelle pierre rouge sur un site inoccupé de sorte que la distance entre deux sites occupés par des pierres rouges soit différente de $\sqrt{5}$. À son tour, Bernard place une nouvelle pierre bleue sur un site inoccupé. (Un site occupé par une pierre bleue peut se trouver à une distance quelconque d'un site occupé.) Ils s'arrêtent dès qu'un joueur ne peut plus placer de pierre.

Déterminer le plus grand nombre K tel qu'Alice puisse s'assurer de placer au moins K pierres rouges, quelle que soit la manière de laquelle Bernard place ses pierres bleues.

Exercice 4
(Classique) On considère un rectangle $a \times b$ dans le plan. On le pave par des rectangles semi-entiers (c'est-à-dire des rectangles dont au moins un des côtés est entier). Montrer que le rectangle de départ est aussi semi-entier.

Exercice 5
(EGMO 2016 P5) Soient k, n des entiers tels que $2 \leq k \leq n \leq 2k-1$ et on considère une grille $n \times n$. Tant que possible, on rajoute des rectangles $1 \times k$ ou $k \times 1$ sur la grille afin que chaque rectangle couvre exactement k cases et que deux rectangles ne se superposent pas. On s'arrête lorsque cette opération n'est plus possible. Trouver, en fonction de n et de k, le nombre minimal de rectangles dans une configuration finale.

Exercice 6
(Pays-Bas TST 2016 Jour 1 P2) Soit n un entier strictement positif. On pave une grille $2^n \times 2^n$

par au moins deux rectangles constitués de cases de la grille, et d'aire une puissance de 2. Montrer qu'au moins deux de ces rectangles ont les mêmes dimensions (sans autoriser les rotations).

Exercice 7
(EGMO 2015 P2) Un domino est un rectangle 1×2 ou 2×1. Déterminer le nombre de manières de poser n^2 dominos sur une grille $2n \times 2n$ afin que tout carré 2×2 de la grille possède au moins deux cases non occupées sur la même ligne ou la même colonne.

Exercice 8
(Chine 2017 TSTST 3 Jour 2 P3) Soit n un entier impair. On colorie les cases d'une grille $n \times n$ en rouge ou en bleu. On suppose que les cases d'une couleur donnée forment un *chemin*, c'est-à-dire que l'on peut numéroter les cases de la couleur $C_1, \ldots, C_m$ afin que C_i et C_j aient un côté en commun si et seulement si $|i - j| = 1$. Montrer que le centre de la grille est une extrémité d'un des deux chemins.

Exercice 9
(RMM 2017 P5) Soit $n \geq 2$ un entier. Un tamis est une grille $n \times n$ dont n cases ont été retirées, avec exactement une retirée sur chaque ligne et sur chaque colonne. Un bâton est un rectangle $1 \times k$ ou $k \times 1$ de cases, avec k entier strictement positif. Pour un tamis A, soit $m(A)$ le nombre minimal de bâtons nécessaires pour partitionner A. Déterminer les valeurs possibles de $m(A)$.

Exercice 10
(Allemagne 2006) Considérons une grille constituée de $m \times n$ cases, pouvant chacune être coloriée en blanc ou en noir. Deux cases sont dites adjacentes si elles ont un côté en commun. Un *chemin* est une suite de cases adjacentes dont la première est sur le bord gauche du rectangle et la dernière sur le bord droit. On dit que deux chemins s'intersectent s'ils ont une case en commun.

Soit N le nombre de manières de colorier la grille de façon à ce qu'il y ait un chemin constitué de cases noires, et M le nombre de manières de colorier la grille de façon à ce qu'il y ait deux chemins constitués de cases noires ne s'intersectant pas. Montrer que

$$N^2 \geq 2^{mn} M.$$

Exercice 11
(Etats-Unis 1998)

On considère un damier $m \times n$ dont on colorie les cases en noir et blanc de manière habituelle. Un coup consiste à choisir un rectangle constitué de cases et à inverser les couleurs de toutes les cases de celui-ci. Combien de coups faut-il au minimum pour rendre le damier monochrome ?

Exercice 12
(IMO SL 2016 C8) Soit n un entier strictement positif. Trouver le plus petit entier k ayant la propriété suivante : il est possible de marquer k cases sur une grille $2n \times 2n$ de façon à ce qu'il existe une unique partition de la grille en dominos (2×1 ou 1×2) tel que chaque domino contienne au plus une case marquée.

Solution de l'exercice 1
Supposons déjà que k divise m ou n. Dans ce cas, il y a un pavage donné par des rectangles tous verticaux ou tous horizontaux.

Réciproquement, colorions le rectangle $m \times n$ en k couleurs de cette façon : la couleur de la case (i, j) est donnée par la valeur de $i + j$ modulo k. Alors tout rectangle $1 \times k$ ou $k \times 1$ couvre une et exactement une case de chaque couleur. Alors s'il y a un pavage possible, chaque couleur apparaît le même nombre de fois dans le rectangle $m \times n$. On peut vérifier que ceci n'est possible que si k divise m ou k divise n.

Solution de l'exercice 2
On pave le rectangle en damier, de façon à ce que les coins soient noirs. Alors un rectangle à l'intérieur a des distances aux quatre côtés du grand de même parité si et seulement si ses quatre coins sont noirs, ou encore si et seulement s'il possède strictement plus de cases noires que de cases blanches.

Mais le grand rectangle possède une case noire de plus que de cases blanches, donc un petit rectangle comme précédemment existe forcément.

Solution de l'exercice 3
On va montrer que la réponse est 100.

Premièrement, Alice peut s'assurer de placer au moins 100 pierres rouges. En effet, on peut colorier les sites en damier, et Alice peut alors jouer uniquement sur les cases noires. Dans ce cas, elle ne peut pas avoir deux pierres à distance $\sqrt{5}$, et elle peut donc poser ses pierres arbitrairement afin de remplir la moitié des cases noires au moins (avec égalité si Bob ne joue que sur des cases noires), c'est-à-dire 100 cases.

Montrons maintenant qu'Alice ne peut pas faire mieux. Considérons une sous-grille 4×4 dont on colorie les cases selon :

A	B	C	D
C	D	A	B
B	A	D	C
D	C	B	A

Alors si Alice joue sur une case A par exemple, elle en bloque deux autres et Bob peut jouer sur la dernière, afin d'empêcher Alice de rejouer sur une case A. De cette manière, Bob peut empêcher Alice de poser strictement plus de 4 pierres dans le carré 4×4. En pavant le carré 20×20 par 25 tels carrés, Bob peut empêcher Alice de poser strictement plus de 100 pierres.

Solution de l'exercice 4
On pave le plan en damier avec des carrés de côté $\frac{1}{2}$ parallèlement aux côtés des rectangles, en commençant avec une case noire dans le coin en bas à gauche du grand rectangle. Alors on remarque que sur un rectangle demi-entier, le côté entier a la même longueur blanche que noire donc le rectangle contient la même aire blanche que noire. Mais alors c'est le cas pour tous les petits rectangles, et donc pour le grand.

On divise alors le grand rectangle en un rectangle $\lfloor a \rfloor \times \lfloor b \rfloor$ en bas à gauche, un rectangle $\lfloor a \rfloor \times (b - \lfloor b \rfloor)$ en haut à gauche, un rectangle $(a - \lfloor a \rfloor) \times \lfloor b \rfloor$ en bas à droite et un rectangle $(a - \lfloor a \rfloor) \times (b - \lfloor b \rfloor)$ en haut à droite. Les trois premiers rectangles sont semi-entiers, donc le dernier rectangle contient aussi la même aire blanche que noire. Mais ce dernier rectangle a des côtés strictement inférieurs à 1 et son coin en bas à gauche coincide avec celui d'un carré noir. Celui-ci contient alors une aire noire strictement supérieure à l'aire blanche à moins qu'il soit d'aire nulle, c'est-à-dire que a ou b est entier.

Solution de l'exercice 5
On va montrer que le résultat est :

$$\begin{cases} n \text{ si } k = n \text{ ou } 2k-1 = n \\ 2(n-k+1) \text{ sinon} \end{cases}.$$

On appelle *bâton* un rectangle $1 \times k$ ou $k \times 1$. Supposons que l'on ne dispose que des bâtons orientés dans le même sens, par exemple verticalement. Alors on peut toujours en poser au moins n, un sur chaque colonne. De plus, en les disposant en alternant un bâton touchant le côté bas et un bâton touchant le côté haut, la condition $2k-1 \geq n$ donne une configuration où l'on ne peut plus rajouter de bâtons. Ainsi, on peut toujours trouver une configuration finale avec n bâtons, et si les bâtons sont tous dans le même sens, c'est le nombre minimal.

Supposons maintenant que l'on ait une configuration avec des bâtons verticaux et horizontaux. Si on a un bâton vertical sur une colonne, comme $n \leq 2k-1$, il est à distance strictement inférieure de k d'un des deux bords, par exemple le gauche. Alors entre le bâton et ce bord, on ne peut pas placer de bâton horizontal, mais on peut placer un bâton vertical sur chaque colonne. Alors toutes les colonnes depuis le bord gauche contiennent un bâton vertical.

En faisant de même avec le bord droit, les colonnes qui ne contiennent pas de bâton vertical sont côte-à-côte. S'il y en avait au moins k, on pourrait alors placer un bâton horizontal dans chaque ligne, entre les colonnes qui contiennent des bâtons verticaux, et la configuration finale contiendrait au moins n bâtons, alors cette configuration n'est pas optimale car on peut déjà trouver une configuration finale avec n bâtons dans le même sens. Ainsi, si la configuration finale possède des bâtons dans les deux sens, elle en possède au moins $n-k+1$ verticaux. De même, elle en possède au moins $n-k+1$ horizontaux, et donc $2(n-k+1)$ bâtons en tout.

Trouvons maintenant une configuration à $2(n-k+1)$ bâtons, pour $k < n$. Pour ceci, on considère un carré $(k+1) \times (k+1)$ en bas à gauche de la grille où l'on place 4 batôns en carré sur le bord. On place ensuite $n-k-1$ bâtons verticaux à droite de ce carré, et $n-k-1$ bâtons horizontaux en haut de ce carré.

Maintenant, si $k = n$, on ne peut pas placer deux bâtons dans des sens opposés, donc la réponse est n. Si $k < n$, c'est le minimum entre n et $2(n-k+1)$, c'est-à-dire n si $2k-1 = n$ et $2(n-k+1)$ sinon.

Solution de l'exercice 6
On remarque déjà que si l'aire d'un rectangle est une puissance de 2, ceci signifie que ses deux côtés sont des puissances de 2.

Si le plus petit côté d'un rectangle est 2^m $(< 2^n)$, alors on peut faire une homothétie de la grille par un facteur 2^{-m}. Alors on voit apparaître une nouvelle grille $2^{n-m} \times 2^{n-m}$ pavée par des rectangles dont les aires sont des puissances de 2 où il existe un rectangle dont un des côtés est 1, et il suffit de montrer le résultat de l'énoncé pour cette nouvelle grille. On peut donc supposer l'existence d'un rectangle dont un des côtés est 1, par exemple la longueur (le rectangle est donc vertical 1×2^k).

On colorie alors une colonne sur deux en noir et on considère pour chaque rectangle R le nombre $n(R)$ de cases noires moins le nombre de cases blanches comprises dans R. Si R est de longueur au moins 2, alors sa longueur est paire car c'est une puissance de 2, et il possède le même nombre de cases blanches que noires, on a $n(R) = 0$. La somme des $n(R)$ sur tous les rectangles doit être nulle car la grille totale contient autant de cases noires que blanches. Ainsi, la somme des $n(R)$ sur tous les rectangles R de longueur 1 est nulle. Mais dans ce cas, $n(R)$ vaut $\pm 2^h$ où h est la hauteur de R. Mais si h_0 est la hauteur minimale d'un rectangle de longueur 1, $n(R)$ ne contient que des termes congrus à 0 modulo 2^{h_0+1}, sauf certains termes congrus à 2^{h_0} modulo 2^{h_0+1} correspondant aux rectangles 1×2^{h_0}. Comme la somme est nulle, il y a alors au moins deux rectangles 1×2^{h_0}, ce qui est exactement le résultat voulu.

Solution de l'exercice 7

Considérons une disposition des n^2 dominos. On commence par diviser la grille en n^2 carrés 2×2. Chacun ne peut contenir qu'au plus deux cases occupées, comme il y a n^2 dominos de deux cases, chacun des carrés a deux cases occupées qui partagent un côté. Supposons par l'absurde qu'il existe au moins un carré où ces deux cases appartiennent à deux dominos différents, et considérons parmi ceux-ci celui d'ordonnée minimale, puis d'abscisse minimale. Ainsi les carrés en bas et à gauche de celui-ci (s'ils existent) contiennent exactement un domino. Mais avec l'hypothèse de l'énoncé, la seule manière d'avoir deux dominos en contact est qu'ils forment quatre cases alignées, alors les deux dominos ayant une case dans le carré considéré doivent dépasser sur le carré à gauche ou celui du bas, absurde.

Ainsi, chaque carré possède exactement un domino, qui peut être positionné à gauche, en haut, à droite ou en bas du carré. On peut donc diviser les carrés en quatre catégories G, H, D, B respectivement, selon le positionnement du domino. L'hypothèse de l'énoncé implique alors que le carré à gauche d'un carré G est un carré G, celui en haut d'un carré H est un carré H, etc.

De cette manière, on en déduit que tous les carrés d'abscisse et d'ordonnée inférieures à celles d'un carré G ou B sont toujours des carrés G ou B, ainsi la ligne brisée partant du coin en haut à gauche et arrivant en bas à droite séparant les carrés G ou B des carrés D ou H n'est constituée que de segments de longueur 2 vers le bas et la droite. De la même manière, celle partant du coin en haut à droite et arrivant au coin en bas à gauche séparant les carrés G ou H des carrés D ou B n'est constituée que de segments de longueur 2 vers le bas et la gauche.

Réciproquement, étant donné deux telles lignes brisées, elles séparent la grille en quatre parties correspondant aux carrés G, H, B, D. Pour chaque ligne brisée, il y a $\binom{2n}{n}$ choix, donc le nombre total de configurations est

$$\binom{2n}{n}^2.$$

Solution de l'exercice 8

Considérons un coloriage comme dans l'énoncé. Alors si on considère le coin en bas à gauche de la grille de coordonnées $(1, 1)$, c'est soit une extrémité d'un des deux chemins, soit un "tournant" d'un des deux chemins, allant du haut vers la droite. Si c'est un tournant, la case en $(2, 2)$ est de l'autre couleur, et c'est de même une extrémité d'un chemin ou un tournant de ce chemin, allant du haut vers la droite. De cette façon, tant que l'on n'atteint pas une extrémité, on trouve que les cases de la diagonale sont des tournants du chemin allant du haut vers la droite. Mais ceci ne peut pas être le cas de la case en haut à droite donc il y a forcément une extrémité sur la diagonale.

Montrons maintenant que chaque diagonale a au moins deux extrémités de chemins. On considère par exemple la diagonale bas-gauche/haut-droite comme précédemment. Si celle-ci ne contenait qu'une seule extrémité de chemin, alors cette extrémité aurait un tournant haut-droite en bas à gauche, et un tournant bas-gauche en haut à droite. Cette extrémité ne peut pas avoir la même couleur qu'un des tournants sinon cela formerait un carré 2×2 de même couleur. Les deux tournants sont donc de la même couleur, et l'extrémité est de l'autre couleur. Mais alors celle-ci est isolée du reste de la grille, donc toute la grille sauf cette extrémité est unicolore, ce qui est clairement impossible si $n \geq 3$, et si $n = 1$ le problème est simple.

Cependant, les quatre extrémités des chemins ne peuvent pas se trouver sur les diagonales. En effet, si l'on colorie la grille en damier avec des cases noires sur les coins, celle-ci a une case noire de plus que de case blanche car n est impair. Mais si chaque chemin a deux extrémités sur les diagonales, chaque chemin a deux extrémités noires et possède donc une case noire de plus que de case blanche. Ainsi, il y aurait deux cases noires de plus que de cases blanches, absurde.

D'après les deux résultats précédents, il faut qu'il y ait une des extrémités des chemins qui soit partagée entre les deux diagonales, ce qui signifie qu'elle est au centre de la grille.

Solution de l'exercice 9

Soit A un tamis. Alors en ne posant que des bâtons horizontaux, on doit en placer deux par lignes sauf pour les deux lignes où la case retirée est au bout où il faut en placer un. Ainsi, on obtient une partition avec $2n-2$ bâtons et on obtient

$$m(A) \leq 2n - 2.$$

On va montrer qu'en fait pour n'importe quel tamis A, la borne est atteinte, c'est-à-dire que $m(A) = 2n-2$. Pour ceci, on procède par récurrence sur n. Pour $n = 2$ et $n = 3$, on peut vérifier le résultat à la main, on le suppose donc vrai pour $n-1$. On se donne alors un pavage d'un tamis A de côté $n \geq 4$ avec $m(A)$ bâtons.

On remarque que si l'on choisit une case retirée et que l'on supprime sa ligne et sa colonne, on obtient un pavage du nouveau tamis obtenu en découpant certains bâtons en 2 puis en les recollant, et en en supprimant d'autres. Les bâtons supprimés sont précisément les bâtons horizontaux sur la même ligne que la case ou les bâtons verticaux sur la même colonne sur la case, on dit que ces bâtons sont *associés* à la case retirée. Chaque bâton dans le pavage est associé à une case retirée, ou éventuellement à deux pour les 1×1.

Dans tous les cas, s'il y a au moins $n+1$ bâtons dans le pavage, par le principe des tiroirs, une des cases retirée possède au moins 2 bâtons associés. En supprimant sa ligne et sa colonne, on supprime donc au moins 2 bâtons et le pavage du tamis de côté $n-1$ obtenu possède au plus $m(A)-2$ bâtons. Par l'hypothèse de récurrence, on a donc $m(A)-2 \geq 2n-4$ et $m(A) \geq 2n-2$.

Supposons maintenant qu'il y ait au plus n bâtons dans le pavage. Alors il suffit de prendre n'importe quelle case retirée avec un bâton associé et à supprimer sa ligne et sa colonne. Alors on supprime au moins 1 bâton et le pavage du tamis de côté $n-1$ obtenu possède au plus $n-1$ bâtons. Par l'hypothèse de récurrence, on a donc $n-1 \geq 2n-4$, absurde car $n \geq 4$.

Ainsi, dans tous les cas, on a bien $m(A) = 2n-2$.

Solution de l'exercice 10

On va construire une injection entre les couples de grilles avec une grille coloriée de manière quelconque et une grille avec deux chemins noirs vers les couples de grilles avec un chemin noir.

Pour ceci, considérons un couple d'une grille quelconque et d'une grille avec deux chemins noirs disjoints. On peut alors définir de manière unique le chemin noir le plus bas de la deuxième grille. En prenant ce chemin le plus bas ainsi que toutes les cases en-dessous et en l'échangeant avec les cases correspondantes de la grille quelconque, on obtient deux grilles ayant chacun un chemin noir.

Réciproquement, on peut retrouver les grilles d'origine en prenant le chemin noir le plus bas de la première grille et en l'échangeant avec les cases correspondantes de la seconde. Ceci montre bien que l'application est injective.

Cette injection nous donne l'inégalité des cardinaux

$$2^{mn}M \leq N^2.$$

Solution de l'exercice 11

On va montrer que le nombre de coups minimal est

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor.$$

Pour ceci, remarquons tout d'abord que cette valeur est atteignable en inversant les couleurs de toutes les lignes ou colonnes paires (dans n'importe quel ordre car les opérations commutent). Montrons maintenant que l'on ne peut pas faire mieux.

Considérons la colonne $1 \times n$ à gauche du damier. On compte le nombre de couples de cases adjacentes de couleur différente dans cette colonne. Au début, il y en a $n-1$ et chaque opération diminue cette valeur au plus de 2. Il faut donc au moins $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ opérations pour que la colonne soit toute de la même couleur, c'est-à-dire $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Ce raisonnement reste valable pour la colonne de droite, la ligne du haut et la ligne du bas de la grille, en remplaçant n par m pour les lignes. Mais maintenant, si un rectangle touche trois de ces lignes/colonnes, il en contient nécessairement une en entier, et il n'agit donc pas dessus de manière utile. Ainsi, chaque coup agit de manière utile sur au plus deux de ces lignes/colonnes, donc le nombre d'opérations minimale est supérieur à

$$\frac{1}{2}\left(2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor\right) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$$

d'où le résultat.

Solution de l'exercice 12

On renvoit à la solution officielle page 42 de https://www.imo-official.org/problems/IMO2016SL.pdf.

5 Équations fonctionnelles en arithmétique (Thomas)

Équations fonctionnelles arithmétiques

Quelques idées à retenir :

— Comme d'habitude, essayer des valeurs simples, comme $n = 1$ ou $m = n$. **(Exercices 1, 2, 3, 4, 5)**

— Si la condition est de la forme $A \mid B$, ajouter ou retirer à B des multiples de A pour obtenir quelque chose de "petit". Par exemple, si vous obtenez quelque chose qui ne dépend que de n et pas de $f(n)$, vous pouvez espérer majorer $f(n)$ en fonction de n. **(Exercices 3, 5)**

— En cas de condition de la forme $A \mid B$, essayer de forcer B à être un nombre premier ou au moins une puissance d'un nombre premier. **(Exercices 3, 4, 5, 8)**

— En cas de condition de la forme $A \mid B$, s'intéresser à des diviseurs premiers de A : ils doivent aussi diviser B. **(Exercice 10)**

— Stratégie souvent utile : déterminer $f(p)$ pour p premier (en supposant p assez grand si besoin), puis conclure. **(Exercices 2, 3, 4, 5, 10)**

— Si on connaît déjà $f(p)$ pour de nombreuses valeurs de p, essayer de transformer l'énoncé en condition de la forme $A(n,p) \mid B(n)$ où $A(n,p)$ peut prendre une infinité de valeurs en faisant varier p. Cela montrera que $B(n) = 0$. **(Exercices 3, 4, 5, 10)**

— Autre stratégie souvent utile pour montrer que la solution est l'identité : considérer un diviseur premier de $f(n+1) - f(n)$. Si on trouve une contradiction, on saura que $f(n+1) - f(n) = \pm 1$ pour tout n. Il suffit alors de montrer $f(n+2) \neq f(n)$ pour tout n pour garantir que f est de la forme $n \to n + c$. **(Exercices 7, 8, 9)**

— En cas de condition de la forme "A est un carré", voir si l'expression A est proche d'un autre carré. **(Exercices 6, 9)**

— En cas de condition de la forme "A est un carré", utiliser le fait que ses valuations p-adiques sont paires. **(Exercice 9)**

Exercice 1
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que, pour tous $a, b \in \mathbb{N}^*$, on ait

$$f(y) + 2x \mid 2f(x) + y.$$

Solution de l'exercice 1
On commence par tester $x = y = 1$ dans la condition donnée : cela donne que $f(1) + 2$ divise $2f(1) + 1$, mais aussi $2f(1) + 4$, donc $2f(1) + 1 \mid 3$, donc $f(1) = 1$.

On prend maintenant $y = 1$ pour obtenir, pour tout x :

$$2x + 1 \mid 2f(x) + 1.$$

En prenant $x = 1$, on obtient pour tout y :

$$f(y) + 2 \mid y + 2.$$

La première des deux dernières équations donne $x \leqslant f(x)$, la seconde donne $f(y) \geqslant y$, donc $f(x) = x$ pour tout x, et on vérifie facilement que l'identité est bien solution.

Exercice 2
(Shortlist 2013, problème N1) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$m^2 + f(n) \mid mf(m) + n.$$

Solution de l'exercice 2
En prenant $m = n$, on trouve
$$n^2 + f(n) \mid n(f(n) + 1).$$
Remplaçons n par p premier. Si p ne divise pas $f(p)$, alors $p^2 + f(p)$ est premier avec p, donc divise $f(p) + 1$. Mais $f(p) + 1 < f(p) + p^2$, donc on a forcément $p \mid f(p)$ pour tout p premier.

D'autre part, en prenant $m = 1$, on trouve $1 + f(n) \leqslant f(1) + n$ pour tout n, donc $f(n) < 2n$ pour n assez grand, donc $f(p) = p$ pour p premier assez grand.

Soit maintenant $m \in \mathbb{N}^*$. Pour tout nombre p premier assez grand, on a
$$m^2 + p \mid mf(m) + p,$$
donc $m^2 \leqslant mf(m)$ et $f(m) \geqslant m$. D'autre part, pour tout n, pour p assez grand, on a
$$p^2 + f(n) \mid p^2 + n,$$
donc $f(n) \leqslant n$, ce qui conclut.

Remarque 1.
Une solution plus courte (mais peut-être plus astucieuse) consistait à prendre $m = f(n)$ pour montrer $f(n) \leqslant n$, puis $m = n$ pour montrer $f(n) \geqslant n$.

Exercice 3
(APMO 2019, problème 1) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que, pour tous $a, b \in \mathbb{N}^*$, on a
$$f(a) + b \mid a^2 + f(a)f(b).$$

Solution de l'exercice 3
Comme souvent avec les équations fonctionnelles, commençons par prendre $a = b = 1$. On obtient $f(1) + 1 \mid f(1)^2 + 1$. Comme $f(1) + 1$ divise aussi $f(1)^2 + f(1)$, on a $f(1) + 1 | f(1) - 1$, donc $f(1) = 1$.

On essaie $a = 1$: on trouve $b + 1 \mid f(b) + 1$, qui ne semble pas directement utile. En testant $b = 1$, on obtient $f(a) + 1 \mid a^2 - 1$. Cela limite les valeurs possibles de $f(a)$, mais $a^2 - 1$ peut admettre de nombreux diviseurs, donc il reste beaucoup de possibilités.

En essayant $a = b$, on trouve $a + f(a) \mid a^2 + f(a)^2$. Comme $a + f(a)$ divise aussi $a^2 - f(a)^2$, cela donne $a + f(a) \mid 2a^2$. Cette condition limite aussi les valeurs possibles de $f(a)$, mais on peut l'exploiter encore mieux en choisissant a premier. Les diviseurs de $2p^2$ sont $1, 2, p, 2p, p^2, 2p^2$, donc $f(p) \in \{p, p^2 - p, 2p^2 - p\}$ pour tout nombre premier p. On peut alors réutiliser $p + 1 \mid f(p) + 1$: si $p \geqslant 5$, cette condition permet d'éliminer $f(p) = p^2 - p$ et $f(p) = 2p^2 - p$, d'où $f(p) = p$ pour tout nombre premier $p \geqslant 5$.

Pour exploiter cela, on se donne $b \geqslant 1$. Pour tout nombre premier $p \geqslant 5$, la condition de l'énoncé donne $p + b \mid p(p + f(b))$. Si p est choisi assez grand (plus grand que b), il est premier avec $p + b$ donc $p + b \mid p + f(b)$, donc $p + b \mid f(b) - b$. Le nombre $f(b) - b$ admet donc une infinité de diviseurs, donc $f(b) = b$, ce qui conclut.

Remarque 2.
Une seconde solution consistait à montrer $f(a) = a$ par récurrence sur a. Plus précisément, en utilisant la condition de l'énoncé pour $(a, a+1)$, on trouve $2a + 1 \mid a + f(a + 1)$, et en l'utilisant pour $(a + 1, a)$ on trouve $a + f(a + 1) \mid 2a + 1$, d'où $f(a + 1) = a + 1$.

Exercice 4
(Shortlist 2004, problème N3) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que, pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$f(m)^2 + f(n) \mid (m^2+n)^2.$$

Solution de l'exercice 4
En prenant $m = n = 1$, on trouve $f(1)^2 + f(1) \mid 4$, donc $f(1) = 1$. En prenant $m = 1$, on obtient donc
$$1 + f(n) \mid (n+1)^2.$$
Pour limiter au maximum le nombre de diviseurs, choisissons $n = p-1$ avec p premier. Alors $1+f(p-1) \mid p^2$, donc $f(p-1)$ ne peut valoir que $p-1$ ou p^2-1. Dans le second cas, en prenant $n = 1$ et $m = p-1$ dans l'équation de départ, on trouve
$$1 + (p^2-1)^2 \mid \left((p-1)^2+1\right)^2.$$
En développant, cela devient $p^4 - 2p^2 + 2 \leqslant p^4 - 4p^3 + 6p^2 - 8p + 4$, ce qui est impossible pour p assez grand. On obtient donc $f(p-1) = p-1$ pour p premier assez grand.

Pour finir, soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour p premier assez grand, on a
$$(p-1)^2 + f(n) \mid \left((p-1)^2+n\right)^2.$$
On cherche à mettre cela sous une forme plus agréable : on a $(p-1)^2 \equiv -f(n) \pmod{(p-1)^2 + f(n)}$, donc la dernière équation devient
$$(p-1)^2 + f(n) \mid ((-f(n)+n)^2,$$
et ce pour tout p premier assez grand. Le nombre $(f(n)-n)^2$ a donc une infinité de diviseurs, donc $f(n) = n$.

Exercice 5
(Shortlist 2016, problème N6) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$, le nombre $f(m) + f(n) - mn$ est non nul et divise $mf(m) + nf(n)$.

Solution de l'exercice 5
Étonnamment, la solution est presque la même que pour le problème trois !

Plus précisément, $m = n = 1$ donne $2f(1) - 1 \mid 2f(1)$, donc $f(1) = 1$. En prenant $m = 1$, on trouve $f(n) - n + 1 \mid nf(n) + 1$, d'où
$$f(n) - n + 1 \mid nf(n) + 1 - n(f(n) - n + 1) = n^2 - n + 1. \tag{VI.1}$$
En prenant $m = n$, on trouve $2f(n) - n^2 \mid 2nf(n)$ donc
$$2f(n) - n^2 \mid 2nf(n) - n(2f(n) - n^2) = n^3.$$
En remplaçant n par p premier et en faisant la liste des diviseurs (positifs ou négatifs) de p^3, on trouve
$$f(p) \in \left\{\frac{p^2-p^3}{2}, 0, \frac{p^2-p}{2}, \frac{p^2-1}{2}, \frac{p^2+1}{2}, \frac{p^2+p}{2}, p^2, \frac{p^3+p^2}{2}\right\}.$$
Les deux premiers nombres de la liste sont négatifs. Pour en exclure d'autres, on utilise (VI.1) (en multipliant les deux côtés par 2). Traitons par exemple le troisième : si $f(p) = \frac{p^2-p}{2}$, alors

$2f(p)-2p+2=p^2-3p+2$ divise $2p^2-2p+2$, et divise aussi $2p^2-6p+4$, donc p^2-3p+2 divise $4p-2$, ce qui est impossible pour p assez grand. Les autres cas se traitent de manière similaire excepté le cas $f(p)=p^2$, donc $f(p)=p^2$ pour tout nombre premier p assez grand.

On revient maintenant à l'équation de départ, en fixant n et en remplaçant m par un grand nombre premier p. On obtient $f(n)+p^2-np \mid nf(n)+p^3$, donc

$$f(n)+p-np \mid nf(n)+p^3-n(f(n)+p^2-np)=p^2-np^2+n^2p.$$

Si p est plus grand que $f(n)+n$, le membre de gauche est premier avec p, donc il divise $p+n^2-p^2$. On a donc

$$f(n)+p-np \mid p+n^2-n,$$

puis $f(n)+p-np \mid f(n)-n^2$, donc $f(n)-n^2$ admet une infinité de diviseurs, donc $f(n)=n^2$ pour tout n. Réciproquement, cette fonction est bien solution.

Exercice 6

(BMO Shortlist 2017, problème N2) Déterminer toutes les fonctions $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ telles que pour tous $x,y\in\mathbb{N}^*$, le nombre

$$xf(x)+2xf(y)+f(y)^2$$

soit un carré parfait.

Solution de l'exercice 6

On commence par remarquer que l'hypothèse de l'énoncé n'est pas loin de faire apparaître le carré $(x+f(y)^2)$. Plus précisément, on sait que pour tous x et y, le nombre

$$(x+f(y))^2+x\,(f(x)-x)$$

doit être un carré. Ceci donne envie d'utiliser le fait que deux carrés ne peuvent pas être trop proches.

Plus précisément, on remarque que le terme $x\,(f(x)-x)$ ne dépend que de x. Si on fixe x et qu'on laisse varier y, on remarque donc que $(x+f(y))^2$ et $(x+f(y))^2+x\,(f(x)-x)$ sont deux carrés, dont la différence est bornée par $|x(f(x)-x)|$. On en déduit que soit $f(x)=x$, soit ces deux carrés sont bornés, donc $f(y)$ est bornée. Pour conclure, il suffit donc de montrer que $f(y)$ peut prendre des valeurs arbitrairement grandes.

Supposons le contraire, à savoir que f est bornée. Alors $f(x)$ et $f(y)$ ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs $a_1,\dots,a_k$. L'énoncé indique alors que pour tout x, il existe i et j tels que

$$xa_i+2xa_j+a_j^2$$

est un carré. Autrement dit, en notant A l'ensemble (fini) des nombres de la forme a_i+2a_j et B l'ensemble (fini aussi) des a_i^2, pour tout x, il existe $a\in A$ et $b\in B$ tels que $ax+b$ est un carré. C'est impossible car les carrés sont trop rares. Plus précisément, soit n un entier. Par principe des tiroirs, il existe une paire (a,b) pour laquelle $ax+b$ est un carré pour au moins $\frac{n}{|A|\times|B|}$ entre 1 et n. Ces carrés de la forme $ax+b$ sont deux à deux distincts et tous bornés par $\max(A)\times n+\max(B)$. Mais le nombre de carrés inférieurs à $\max(A)\times n+\max(B)$ est borné par $\sqrt{\max(A)\times n+\max(B)}$, qui pour n assez grand est plus petit que $\frac{n}{|A|\times|B|}$. Ceci conclut la preuve.

Exercice 7

(Shortlist 2007, problème N5) Trouver toutes les fonctions surjectives $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ telles que pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$, les nombres $f(m+n)$ et $f(m)+f(n)$ ont exactement les mêmes diviseurs premiers.

Solution de l'exercice 7
Il est clair que l'identité est solution, on va montrer que c'est la seule. La bonne idée à avoir est la suivante : soit n un entier, et supposons que $|f(n+1) - f(n)| \neq 1$. On va obtenir une contradiction en considérant un diviseur premier p de $f(n+1) - f(n)$.

En effet, pour tout m, on sait que p divise $f(m) + f(n)$ si et seulement si il divise $f(m) + f(n+1)$. La première assertion équivaut à ce que p divise $f(m+n)$, et la seconde à ce que p divise $f(m+n+1)$. On a donc que p divise $f(m+n+1)$ si et seulement si p divise $f(m+n)$, et ce pour tout $m \geqslant 1$. Par conséquent, si p divise $f(n+1)$, alors p divise $f(n+m)$ pour tout m, et si p ne divise pas $f(n+1)$, alors p ne divise aucun $f(n+m)$. Dans les deux cas, cela contredit la surjectivité de f.

On a donc $|f(n+1) - f(n)| = 1$ pour tout n, c'est-à-dire qu'à chaque étape f peut soit augmenter de 1 soit diminuer de 1. On va maintenant montrer qu'elle ne peut pas "revenir en arrière", i.e. que $f(n+2) \neq f(n)$ pour tout n.

Pour cela, supposons que $f(n) = f(n+2)$ pour un certain n. Alors pour tout m, le nombre $f(m+n+2)$ a les mêmes diviseurs premiers que $f(m) + f(n+2) = f(m) + f(n)$, qui a les mêmes diviseurs premiers que $f(m+n)$. Par conséquent, pour tout $m \geqslant n+1$, le nombre $f(m)$ a soit exactement les mêmes diviseurs premiers que $f(n+1)$, soit les mêmes que $f(n+2)$. Cela contredit la surjectivité à nouveau.

Par conséquent, on a soit $f(n+1) = f(n) + 1$ pour tout n, soit $f(n+1) = f(n) - 1$ pour tout n. Le second cas est impossible car f est à valeurs positives, et dans le premier f est de la forme $n \to n + c$. Pour tous m et n, les nombres $m + n + 2c$ et $m + n + c$ ont donc les mêmes diviseurs premiers. Pour tout p, on peut choisir m et n tels que p divise $m + n + c$. Alors p divise aussi $m + n + 2c$, donc p divise c, donc $c = 0$ et f est bien l'identité.

Exercice 8
(Test Iran 2008) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$, on ait

$$f(m) + f(n) \mid (m+n)^k.$$

Solution de l'exercice 8
Ici, essayer de petites valeurs semble ne rien donner (par exemple, le nombre de valeurs possibles pour $f(1)$ peut être grand si k l'est). En revanche, il semble naturel d'essayer de rendre petit le nombre de diviseurs de $(m+n)^k$, par exemple en prenant $m+n$ premier.

Plus précisément, on va adapter la stratégie du problème précédent : supposons que $|f(n+1) - f(n)| \neq 1$, et soit p un diviseur premier de $f(n+1) - f(n)$. Alors pour tout m, on a

$$f(m) + f(n) \mid (m+n)^k \text{ et } f(m) + f(n+1) \mid (m+n+1)^k.$$

Pour pouvoir utiliser nos informations modulo p tout en limitant au maximum le nombre de diviseurs, on voudrait prendre $m+n = p$, mais ce n'est pas possible si $n > p$. Pour s'approcher au maximum de cette situation, on choisit $m = p^\alpha - n$, où $\alpha \geqslant 1$ est assez grand pour avoir $m \geqslant 1$. On a alors que $f(n) + f(p^\alpha - n)$ est une puissance de p, donc est divisible par p (car cette somme vaut au moins 2). Comme p divise $f(n+1) - f(n)$, on en déduit que p divise aussi $f(n+1) + f(p^\alpha - n)$, et donc $(p^\alpha + 1)^k$, ce qui est impossible. On en déduit $|f(n+1) - f(n)| = 1$ pour tout n.

Pour conclure, comme précédemment il suffit de montrer que $f(n+2) \neq f(n)$ pour tout n. Soit n tel que ce n'est pas le cas. Alors pour tout m, on a

$$f(m) + f(n) \mid (m+n)^k \text{ et } f(m) + f(n) \mid (m+n+2)^k.$$

Pour aboutir à une contradiction, il suffit de trouver m tel que $(m+n)^k$ et $(m+n+2)^k$ soient premiers entre eux, c'est-à-dire tel que $m+n$ et $m+n+2$ soient premiers entre eux. N'importe quelle valeur de m avec une parité opposée à celle de n fait l'affaire, ce qui conclut la preuve.

Exercice 9
(IMO 2010, problème 3) Déterminer toutes les fonctions $g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que, pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$, le nombre

$$(m + g(n))(g(m) + n)$$

est un carré parfait.

Solution de l'exercice 9
Dans un premier temps, on constate que les les fonctions de la forme $n \to n + c$ avec $c \in \mathbb{N}$ sont solutions. On veut maintenant montrer que ce sont les seules.

Pour cela, soit $n \in \mathbb{N}^*$, et supposons que $|g(n+1) - g(n)| \geqslant 2$. On note p un diviseur premier de $g(n+1) - g(n)$. On sait que pour tout m, les valuations p-adiques de $(m + g(n))(g(m) + n)$ et de $(m + g(n+1))(g(m) + n + 1)$ doivent toutes les deux être paires. On donc chercher un m qui permet d'obtenir une contradiction. On remarque que $g(m) + n$ et $g(m) + n + 1$ sont premiers entre eux, donc au moins un des deux a une valuation p-adique nulle. Il suffit donc de trouver m tel que

$$v_p(m + g(n)) \text{ et } v_p(m + g(n+1))$$

soient toutes les deux impaires.

En tâtonnant, la valuation p-adique de $g(n+1) - g(n)$ semble importante. On la note donc α. Si $\alpha = 1$, soit m tel que $v_p(m + g(n)) = 3$. Alors p^2 divise $m + g(n)$ mais pas $g(n+1) - g(n)$, donc p^2 ne divise pas $m + g(n+1)$, donc $v_p(m + g(n+1)) = 1$ est aussi impaire. Si $\alpha > 1$, on choisit m tel que $v_p(m + g(n)) = 1$. Alors p^2 divise $g(n+1) - g(n)$ mais pas $m + g(n)$, donc p^2 ne divise pas $m + g(n+1)$, donc $v_p(m + g(n+1)) = 1$ est aussi impaire.

On obtient donc bien une contradiction dans tous les cas, donc $|g(n+1) - g(n)| = 1$ pour tout n. Pour conclure que f est de la forme $n \to n + c$, il suffit donc de vérifier que f ne peut pas "faire demi-tour", c'est-à-dire que $g(n+2) \neq g(n)$ pour tout n. Supposons donc qu'il existe n tel que $g(n+2) = g(n)$. Alors pour tout m, les nombres suivants sont des carrés parfaits :

$$(m + g(n))(n + g(m)) \text{ et } (m + g(n))(n + 2 + g(m)).$$

Par conséquent, le produit de ces deux nombres est un carré. Ce produit vaut

$$(m + g(n))^2(n + g(m))(n + 2 + g(m)).$$

On en déduit que le nombre suivant est un carré :

$$(n + g(m))(n + 2 + g(m)) = (n + g(m) + 1)^2 - 1.$$

Ceci implique $n + g(m) + 1 = 1$, ce qu est impossible, ce qui conclut le problème.

Exercice 10
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que pour tout n, on a

$$xf(x) + yf(y) \mid (x^2 + y^2)^{2022}.$$

Solution de l'exercice 10
Ici, il semble plus pénible de forcer $x^2 + y^2$ à être un nombre premier. On va donc raisonner dans l'autre sens : on se donne un nombre premier p, et on cherche à "forcer" $xf(x) + yf(y)$ à être divisible par p. Si on suppose que p divise x et y, on n'apprend rien.

Supposons donc que p divise x et $f(y)$. Alors p doit diviser $(x^2 + y^2)^{2022}$, donc $p \mid x^2 + y^2$, donc comme p divise x, il divise aussi y. On a donc montré que si x est premier avec y, alors il est premier avec $f(y)$. En particulier, en prenant $y = 1$, on trouve $f(y) = 1$. En prenant y premier, on obtient aussi que $f(y)$ n'a aucun diviseur premier autre que p, donc $f(p)$ est une puissance de p.

Par ailleurs, en prenant $x = y = p$, on trouve $pf(p) \mid p^{4044}$, donc $f(p)$ est de la forme p^α avec $0 \leqslant \alpha \leqslant 4043$. On veut montrer que $\alpha = 1$. On fixe donc $\alpha \in \{0, 2, 3, 4, \ldots, 4043\}$. Pour tout nombre premier p tel que $f(p) = p^\alpha$, en prenant $x = p$ et $y = 1$, on trouve

$$p^{\alpha+1} + 1 \mid (p^2 + 1)^{2022}.$$

Or, comme $\alpha \neq 1$, le polynôme $X^{\alpha+1} + 1$ ne divise pas le polynôme $(X^2 + 1)^{2022}$, donc le reste R de la division euclidienne de $(X^2 + 1)^{2022}$ par $X^{\alpha+1} + 1$ est un polynôme de degré $< \alpha + 1$. Mais alors, pour tout p tel que $f(p) = p^\alpha$, on a

$$p^{\alpha+1} + 1 \mid R(p),$$

donc $p^{alpha+1} + 1 \leqslant |R(p)|$, ce qui est faux pour p assez grand. Par conséquent, pour tout $\alpha \neq 1$, il n'existe qu'un nombre fini de p tels que $f(p) = p^\alpha$, d'où $f(p) = p$ pour p premier assez grand.

Pour finir, soit $x \in \mathbb{N}^*$. Pour tout p premier assez grand, on a

$$0 \equiv (x^2 + p^2)^{2022} \equiv (x^2 - xf(x))^{2022} \pmod{xf(x) + p^2},$$

en utilisant l'énoncé avec $y = p$. On en déduit que $x^2 - xf(x)$ a une infinité de diviseurs, donc $f(x) = x$.

6 Combinatoire (Paul et Vincent)

Combinatoire - Exercices divers

Ce cours est consacré à la résolution de problèmes proposés lors de tests de sélection de divers pays ou bien présélectionnés pour être proposés à l'Olympiade internationale de mathématiques.

Exercice 1
Étant donné un entier $n \geqslant 1$, Ariane a numéroté de 1 à n les n sommets d'un arbre, dans un ordre arbitraire. Puis, toujours dans un ordre arbitraire, elle considère successivement les $n-1$ arêtes de l'arbre et, pour chacune d'entre elles, échange les numéros de ses deux sommets.

Ce processus définit une permutation π de $\{1, 2, \ldots, n\}$ telle que le sommet dont le numéro initial était k est maintenant de numéro $\pi(k)$.

Démontrer que la permutation π contient un seul cycle.

Exercice 2
Bérénice dispose de $n \geqslant 2$ lampes $L_1, L_2, \ldots, L_n$, alignées de gauche à droite. Initialement, la lampe L_1 est allumée, et les $n-1$ autres lampes sont éteintes. Puis, chaque minute, elle modifie simultanément l'état de ses n lampes en procédant comme suit : si la lampe L_i est dans le même état (allumée ou éteinte) que l'ensemble de ses voisines (une voisine si $i = 1$ ou $i = n$, et deux voisines si $2 \leqslant i \leqslant n-1$), Bérénice éteint la lampe L_i ; sinon, elle allume la lampe L_i.

1. Démontrer qu'il existe une infinité d'entiers $n \geqslant 2$ pour lesquels, à un moment donné, toutes les lampes de Bérénice seront simultanément éteintes.
2. Démontrer qu'il existe une infinité d'entiers $n \geqslant 2$ n'ayant pas la propriété précédente.

Exercice 3
Caroline et Daphné jouent au jeu suivant. Elles disposent de 2022 cartes ayant chacune une face blanche et une face noire. Initialement, leurs cartes sont alignées de gauche à droite, chacune montrant sa face blanche. Puis, chacune à leur tour, en commençant par Caroline, elles effectuent une opération du type suivant : la joueuse dont c'est le tour choisit cent cartes consécutives dont la carte la plus à gauche montre sa face blanche, et retourne ces cent cartes. La première joueuse qui ne peut plus jouer, si cela arrive un jour, perd la partie, et son adversaire gagne.

1. Démontrer que la partie prendra nécessairement fin au bout d'un nombre fini de coups.
2. Trouver laquelle des deux joueuses dispose d'une stratégie gagnante.

Exercice 4
Soit n un entier naturel non nul. Combien y a-t-il de suites $a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+n}$ d'entiers égaux à 0 ou 1 telles que

$$a_{i+1} + a_{i+2} + \cdots + a_{i+n} < a_{i+n+1} + a_{i+n+2} + \cdots + a_{i+2n}$$

pour tout entier i tel que $0 \leqslant i \leqslant n^2 - n$?

Exercice 5
Étant donné un entier $n \geqslant 1$, Élodie souhaite dessiner n rectangles $R_1, R_2, \ldots, R_n$ dont les côtés sont verticaux et horizontaux. On dit que deux rectangles R_i et R_j se *rencontrent* s'ils ont au moins un point commun (même sur leur bord), et qu'ils se *suivent* si $i \equiv j \pm 1 \mod n$.

Pour quels entiers n Élodie peut dessiner ses n rectangles de sorte que deux rectangles se rencontrent si et seulement s'ils ne se suivent *pas* ?

Solutions des exercices

Solution de l'exercice 1
Il suffit de procéder par récurrence forte sur n. En effet, pour $n = 1$, le résultat désiré est immédiat. Puis, lorsque $n \geqslant 2$, soit e la dernière arête que considère Ariane. Lorsque l'on supprime

cette arête, on scinde l'arbre A en deux sous-arbres B et C, qui possèdent respectivement k et $n-k$ sommets pour un certain entier k compris entre 1 et $n-1$.

Soit E_B l'ensemble des numéros des sommets de B, et E_C l'ensemble des numéros des sommets de C. Les $n-2$ opérations qu'a effectuées Ariane n'ont fait qu'échanger entre eux les numéros des sommets de B et de C. Par conséquent, l'hypothèse de récurrence nous indique que la permutation obtenue juste avant le dernier échange d'Ariane induit deux permutations cycliques sur E_B et E_C.

Soit $b_1 \to b_2 \to \cdots \to b_k \to b_1$ et $c_1 \to c_2 \to \cdots \to c_{n-k} \to c_1$ ces deux cycles, où c_1 et c_2 sont les numéros initiaux des extrémités de l'arête e. La permutation π est alors

$$b_1 \to c_2 \to c_3 \to \cdots \to c_{n-k} \to c_1 \to b_2 \to b_3 \to \cdots \to b_k \to b_1$$

et, comme prévu, elle est bien cyclique.

Solution de l'exercice 2

Ci-dessous, nous représenterons chaque lampe allumée par un 1 et chaque lampe éteinte par un 0. On notera également 1^x une suite de x lampes allumées, et 0^x une suite de x lampes éteintes. Enfin, on notera $\mathsf{c}(a)$ la suite des états des a premières lampes après $a-1$ opérations et on notera $\mathsf{rev}(s)$ le miroir d'une suite s, c'est-à-dire la suite obtenue à partir de s en échangeant gauche et droite.

Remarquons tout d'abord que, après $a-1$ opérations, toute autre lampe que les a premières est nécessairement éteinte.

Démontrons maintenant, pour tout entier $k \geqslant 0$, la propriété $\mathcal{P}_k$ selon laquelle $\mathsf{c}(2^k) = 1^{2^k}$. Tout d'abord, la propriété $\mathcal{P}_0$ est immédiate. Soit ensuite un entier $k \geqslant 1$ pour lequel $\mathcal{P}_{k-1}$ est vraie, et posons $\ell = 2^{k-1}$. Puisque $\mathsf{c}(\ell) = 1^\ell$, on sait que $\mathsf{c}(\ell+1) = 0^{\ell-1}11$. Une récurrence immédiate montre alors que $\mathsf{c}(\ell+i) = 0^{\ell-i}\mathsf{rev}(\mathsf{c}(i))\mathsf{c}(i)$ lorsque $1 \leqslant i \leqslant \ell$, de sorte que $\mathsf{c}(2\ell) = \mathsf{rev}(\mathsf{c}(\ell))\mathsf{c}(\ell) = 1^{2\ell}$, et donc que $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

Forts de cette propriété, on en déduit déjà que, si $n = 2^k$, toutes les lampes seront allumées après $n-1$ opérations, donc éteintes à partir de la $n^{\text{ème}}$ opération.

Au contraire, si $n = 2^k + 1$, seule la dernière lampe est allumée après $n-1$ opérations : on est donc revenu dans la situation de départ, à ceci près que l'on a échangé gauche et droite ainsi qu'états allumés et éteints. En particulier, aussi loin qu'aille Bérénice, et après $\ell(n-1)$ opérations, elle aura toujours une lampe extrémale éteinte et les autres allumées. Or, si toutes les lampes avaient été simultanément éteintes à un moment donné, elles seraient restées éteintes pour toujours. Elles ne seront donc jamais toutes éteintes au même moment.

Remarque : On peut en fait démontrer que seules les puissances de 2 satisfont la propriété mentionnée en question 1 en s'appuyant sur les deux lemmes suivants. Dans ceux-ci, on note $\ell(k,t,n)$ l'état de la lampe L_k lors de la $t^{\text{ème}}$ minute, lorsque l'on a n lampes en tout.

Lemme 1 : Pour tous les entiers k, t et n tels que $k \leqslant n-1$, si $\ell(k,t,n) \neq \ell(k+1,t,n)$, alors $k \equiv t \pmod 2$.

Démonstration : Procédons par récurrence sur t. Tout d'abord, ce résultat est immédiat lorsque $t = 1$. Puis, s'il est vrai pour un entier $t \geqslant 1$ donné, soit k un entier pour lequel $\ell(k,t+1,n) \neq \ell(k+1,t+1,n)$:

- ▷ si $\ell(k,t+1,n) = 0$, alors $k+2 \leqslant n$ et $\ell(k,t,n) = \ell(k+1,t,n) \neq \ell(k+2,t,n)$, donc $k+1 \equiv t \pmod 2$ et $k \equiv t+1 \pmod 2$;
- ▷ si $\ell(k,t+1,n) = 1$, alors $k \geqslant 2$ et $\ell(k,t,n) = \ell(k+1,t,n) \neq \ell(k-1,t,n)$, donc $k-1 \equiv t \pmod 2$ et $k \equiv t+1 \pmod 2$. □

	L_{k-1}	L_k	L_{k+1}
t	$\bullet$	0	0
$t+1$	$\bullet$	0	?

	M_{2k-3}	M_{2k-2}	M_{2k-1}	M_{2k}	M_{2k+1}	M_{2k+2}
$2t$	$\bullet$	$\bullet$	0	0	0	0
$2t+1$	$\bullet$	$\bullet$	0	0	0	?
$2t+2$	$\bullet$	$\bullet$	0	0	?	?

	L_{k-1}	L_k	L_{k+1}
t	$\bullet$	0	1
$t+1$	$\bullet$	1	?

	M_{2k-3}	M_{2k-2}	M_{2k-1}	M_{2k}	M_{2k+1}	M_{2k+2}
$2t$	$\bullet$	$\bullet$	0	0	1	1
$2t+1$	$\bullet$	$\bullet$	0	1	1	?
$2t+2$	$\bullet$	$\bullet$	1	1	?	?

	L_{k-1}	L_k	L_{k+1}
t	0	0	0
$t+1$	?	0	?

	M_{2k-3}	M_{2k-2}	M_{2k-1}	M_{2k}	M_{2k+1}	M_{2k+2}
$2t$	0	0	0	0	0	0
$2t+1$	?	0	0	0	0	?
$2t+2$	?	?	0	0	?	?

	L_{k-1}	L_k	L_{k+1}
t	0	0	1
$t+1$	?	1	?

	M_{2k-3}	M_{2k-2}	M_{2k-1}	M_{2k}	M_{2k+1}	M_{2k+2}
$2t$	0	0	0	0	1	1
$2t+1$	?	0	0	1	1	?
$2t+2$	?	?	1	1	?	?

Lemme 2 : Pour tous k, t et n, on a $\ell(k,t,n) = \ell(2k-1, 2t, 2n) = \ell(2k, 2t, 2n)$.
Démonstration : Nous allons démontrer ce résultat par récurrence sur t. Tout d'abord, il est vrai pour $t = 1$. Ci-dessous, on notera M_k la $k^{\text{ème}}$ lampe lorsque l'on a $2n$ lampes. Puis, s'il est vrai pour une valeur de t donnée, suivons en parallèle les lampes L_{k-1} à L_{k+1} ainsi que les lampes M_{2k-3} à M_{2k+2}.

Ci-après, on considère l'ensemble des états de départ possibles pour les lampes L_{k-1} à L_{k+1}, à symétrie gauche-droite près et quitte à changer l'état de départ de nos lampes en l'état opposé (ce qui n'influe en rien sur la suite de notre système dynamique) ; notons ici que, si $2 \leqslant k \leqslant n-1$, et en vertu du lemme 1, la lampe L_k est nécessairement dans le même état qu'une des deux lampes L_{k-1} et L_{k+1}. On représente également par $\bullet$ une lampe inexistante (en position $k \leqslant 0$). Ceci conclut la récurrence. $\square$

On conclut enfin, en considérant comme *solution* un entier n pour lequel les lampes finiront par être toutes éteintes, état dont elles ne sortiront alors jamais. Le lemme 2 indique que n est solution si et seulement si $2n$ est solution, et puisque 1 est solution, toute puissance de 2 est également solution.

Par ailleurs, si $n \geqslant 3$ est une solution impaire, la première fois où les lampes sont toutes dans le même état, à un instant t, elles sont toutes allumées, et s'apprêtent à être toutes éteintes. En particulier, puisque $\ell(1,t,n) = \ell(n,t,n) = 1$, on sait que $\ell(1,t-1,n) \neq \ell(2,t-1,n)$ et que $\ell(n-1,t-1,n) = \ell(n,t-1,n)$, donc que $1 \equiv n-1 \equiv t-1 \pmod 2$, ce qui est impossible. Ainsi, nul entier impair $n \geqslant 3$ n'est solution, et nul entier qui n'est pas une puissance de 2 n'est solution.

Solution de l'exercice 3

Numérotons de droite à gauche nos cartes, qui porteront les numéros 0 à 2021. Le *poids d'une configuration* est la somme des numéros des cartes qui montrent leur face noire. La configuration initiale est de poids nul, et chaque opération augmente strictement le poids de la configuration. Puisque toute configuration est de poids inférieur à 2^{2022}, la partie durera donc moins de 2^{2022} coups.

Ensuite, la *valeur* d'une configuration est le nombre de cartes de numéro $\equiv -1 \pmod{100}$ qui montrent leur face blanche. La configuration initiale est de valeur 20, et chaque opération fait varier la valeur de la configuration de ± 1, changeant donc sa parité. Or, à partir d'une configuration de valeur non nulle, il est bien sûr possible de jouer. Par conséquent, après chaque opération de Caroline, Daphné aura face à elle une configuration de valeur impaire, à partir de laquelle elle pourra jouer. Étant dans l'impossibilité de perdre, même si elle avait sciemment souhaité se faire hara-kiri, Daphné va donc gagner.

Solution de l'exercice 4

Nous allons démontrer que la seule suite convenable est la suite

$$0^n\, 0^{n-1} 1\, 0^{n-2} 1^2 \,\cdots\, 0^1 1^{n-1}\, 1^n,$$

c'est-à-dire la suite formée de $n+1$ blocs, le $k^{\text{ème}}$ bloc consistant en $n-k$ termes 0 suivis de k termes 1. Alternativement, cette suite peut être définie comme la suite $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n^2+n}$ telle que $a_{i+1} = \mathbf{1}_{q+r \geqslant n}$, où q et r sont le quotient et le reste de la division euclidienne de i par n. Si l'on pose $s_i = a_{i+1} + a_{i+2} + \cdots + a_{i+n}$, on constate alors que $(s_i)_{0 \leqslant i \leqslant n^2}$ est la suite

$$0^n 1^{n-1} 2^{n-1} 3^{n-1} \cdots (n-1)^{n-1} n^n,$$

de sorte que $s_i < s_{i+n}$ pour tout $i \leqslant n^2 - n$.

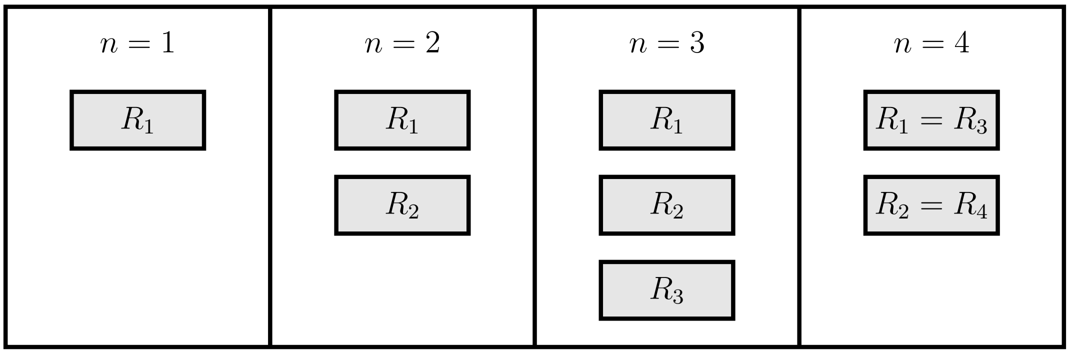
Réciproquement, supposons que l'on dispose d'une suite convenable $(b_i)_{0 \leqslant i \leqslant n^2}$ distincte de la suite $(a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n^2}$, et posons $t_i = b_{i+1} + b_{i+2} + \cdots + b_{i+n}$. Puisque $0 \leqslant t_0 < t_n < \cdots < t_{n^2} \leqslant n$, on sait que $t_{ni} = i$ pour tout entier i.

Soit alors $j = qn + r$ le plus petit entier pour lequel $a_j \neq b_j$. Si $q + r \geqslant n$, on sait déjà que $b_{qn} = b_{qn+1} = \ldots = b_{qn+n-q-1} = 0$ et que $q \geqslant b_{qn+n-q} + \cdots + b_{qn+n-1} \geqslant t_{nq} = q$, de sorte que $b_{qn+n-q} = b_{qn+n-q+1} = \ldots = b_{qn+n-1} = 1$. Mais alors $b_j = a_j = 1$, ce qui est absurde. Ainsi, $q + r < n$, donc $a_j = 0$ et $b_j = 1$, et $1 \leqslant q \leqslant n-1$.

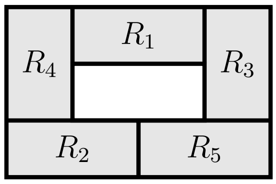
Désormais, on pose $u_i = b_{ni+1} + \cdots + b_{ni+r}$ et $v_i = b_{ni+r+1} + \cdots + b_{ni+n}$. On vient de démontrer que $u_{q-1} = 0$ et $u_q = 1$. Par ailleurs, pour tout entier i, on sait que $u_i + v_i = t_{ni} = i$. Une récurrence immédiate permet alors de démontrer que $u_{q+i} \geqslant i + 1$ et que $v_{q+i} \leqslant q - 1 - i$ pour tout $i \geqslant 0$. On en conclut que $r \geqslant u_n \geqslant n + 1 - q$, ce qui contredit l'inégalité $q + r < n$. Notre hypothèse sur l'existence de la suite $(b_i)_{0 \leqslant i \leqslant n^2+n}$ est donc invalide, et la suite $(a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n^2+n}$ est bien l'unique solution du problème.

Solution de l'exercice 5

En étudiant les petits cas, on trouve les constructions suivantes lorsque $1 \leqslant n \leqslant 5$.



$n = 5$

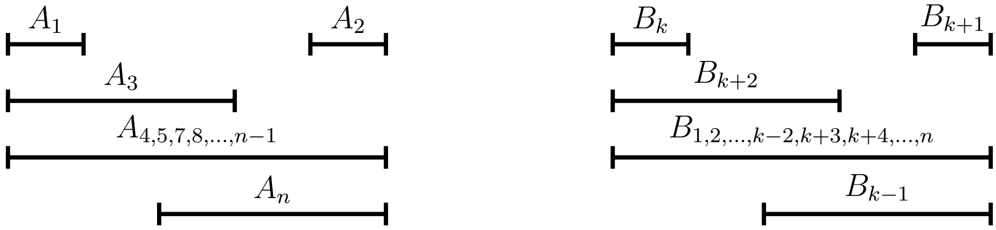


Cependant, traiter les cas $n \geqslant 6$ est tout de suite moins facile. On décide donc de prendre un peu de recul, par exemple en s'appuyant sur l'observation suivante : tout rectangle R_i peut être vu comme le produit cartésien de deux intervalles $A_i \times B_i$. De la sorte, deux rectangles R_i et R_j se rencontrent si et seulement si A_i rencontre A_j et B_i rencontre B_j. Dans la suite, on note a_i^- et a_i^+ les minimum et maximum de l'intervalle A_i, et b_i^- et b_i^+ les minimum et maximum de l'intervalle B_i.

On remarque alors que, si deux intervalles A_i et A_j ne se rencontrent pas, les intervalles qui rencontrent à la fois A_i et A_j ont tous un point commun avec A_i, et tous un point commun avec A_j. En effet, si $a_i^+ < a_j^-$, tout intervalle qui rencontre A_i et A_j contient à la fois a_i^+ et a_j^-.

Sans perte de généralité, supposons que $a_1^+ \leqslant a_i^+$ pour tout i, et que $a_n^- \leqslant a_2^-$. Dans ces conditions, a_1^+ appartient nécessairement à A_3, A_4 et A_5. Mais alors B_4 ne rencontre ni B_3 ni B_5. Dans ces conditions, B_1 et B_2 rencontrent B_4 et B_5, tandis que B_1 et B_n rencontrent B_3 et B_4. Ainsi, le paragraphe précédent indique que B_1 rencontre B_2 et B_n, donc rencontre tout intervalle B_i.

Dès lors A_1 ne rencontre ni B_2 ni B_n, donc $a_i^- \leqslant a_1^+ < a_n^- \leqslant a_2^-$ pour tout i distinct de 2 et de n. Mais alors, de même que B_1, l'intervalle B_2 rencontre tous les intervalles B_i. Par conséquent, A_2 ne rencontre pas A_3, et les relations d'intersection entre intervalles A_i sont les mêmes que celles représentées ci-dessous (à gauche). Les intervalles A_i et B_i jouant des rôles symétriques, il existe un entier k pour lequel les relations d'intersection entre intervalles B_i seront les mêmes que celles représentées ci-dessous (à droite).



Mais alors les seules paires (i, j) pour lesquelles R_i et R_j ne se rencontrent pas sont $(n, 1), (1, 2), (2, 3), (k-1, k), (k, k+1), (k+1, k+2)$. Cela fait six paires sur les n paires qu'exige Élodie, donc $n \leqslant 6$, et une construction pour $n = 6$ est donnée lorsque $k = 4$.

2 Entraînement de mi-parcours

Veuillez rédiger chaque problème sur une copie différente. N'oubliez pas d'écrire votre nom et chaque numéro d'exercice. Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1

Soit p un nombre premier vérifiant $p > 3$ et $k \geqslant 2$. Théo et Vincent jouent au jeu suivant : Théo choisit une permutation $a_1, \ldots, a_k$ des entiers $1, \ldots, k$, et indique à Vincent ce que vaut $a_i a_j$ modulo p pour tous $i \neq j$. Vincent gagne s'il est capable de deviner les $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$. Pour quelles valeurs de k Vincent peut-il gagner quelle que soit la permutation choisie par Théo ?

Exercice 2

Soit $n \geqslant 2$ un entier et $k \geqslant 1$ un entier. Arthur et Thomas jouent au jeu suivant. Arthur choisit deux ensembles d'entiers naturels, A et B, de cardinal n, et k entiers $x_1, \ldots, x_k$ (non nécessairement distincts) qui s'écrivent comme produit d'un élément de A et d'un élément de B. Thomas gagne s'il peut choisir trois indices i_1, i_2, i_3 deux à deux distincts tels que x_{i_1} divise $x_{i_2} x_{i_3}$. Pour quelles valeurs de k, en fonction de n, Arthur a-t-il une stratégie gagnante ?

Exercice 3

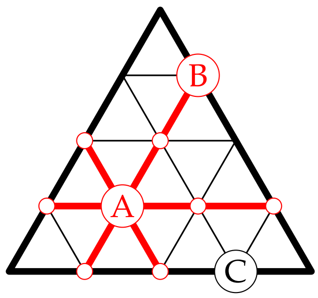
Soit f une fonction de $\mathbb{N}^\star$ dans $\mathbb{N}^\star$ telle que, pour tout couple d'entiers strictement positifs m et n, exactement un seul des entiers

$$f(m+1), \ldots, f(m+f(n))$$

est divisible par n. Montrer que $f(n) = n$ pour une infinité d'entiers n.

Exercice 4

Le jeu du *tri-échecs* se joue sur une grille triangulaire. La grille est un triangle équilatéral de côté n formé de n^2 triangles équilatéraux de côté 1. Dans ce jeu, les pièces se situent aux sommets des triangles. Deux *tours* se menacent mutuellement si la droite qui relie leurs cases est parallèle à un des côtés de la grille. Par exemple, ci-dessous, l'ensemble des sommets que menace la tour A est représenté en rouge ; ainsi, la tour A menace la tour B mais pas la tour C.



Lorsque $n = 2022$, quel est le plus grand nombre de tours que l'on peut placer sur la grille de sorte que deux tours ne se menacent jamais mutuellement ?

Solutions

Solution de l'exercice 1
Notons que si $k \geqslant p+1$, Théo peut donner $1, \ldots, k$, ou échanger 1 et $p+1$, sans que cela change les produits $a_i a_j$ modulo p, donc Vincent ne peut gagner.

Si $k=2$, Vincent ne peut pas différencier $(a_1, a_2) = (2,1)$ et $(1,2)$ donc il ne peut gagner.

Si $3 \leqslant k \leqslant p-2$ Vincent peut connaître a_2/a_1 modulo p car $a_2/a_1 \equiv (a_2 a_3)/(a_1 a_3) \pmod p$. Comme il connaît $a_2 \times a_1$ modulo p, il connaît donc $\frac{a_1}{a_2} \times a_2 a_1 \equiv a_1^2$ modulo p, donc il connait a_1 à un signe près (il sait que $a_1 = \pm\alpha$ pour un certain α. De cela, il peut déduire tous les a_i car il connaît $a_1 \times a_i$ modulo p. Ainsi il peut déduire que le k-uplet $(a_1, \ldots, a_k)$ vaut soit un k-uplet de la forme $(b_1, \ldots, b_k)$, soit $(-b_1, \ldots, -b_k)$. Le vrai k-uplet choisi par Théo contient 1, le faux contient donc $p-1 > k$ (alors que le vrai non), donc Vincent peut trouver lequel est le bon.

Si $k = p-1$ ou p, Vincent ne peut différencier $a_i = i$ pour tout i entre 1 et $p-1$ et $a_i = p-i$ pour tout i entre 1 et $p-1$ (en ajoutant $a_p = p$ si $k=p$ dans les deux cas).

Les valeurs de k qui conviennent sont les entiers compris entre 3 et $p-2$.

Solution de l'exercice 2
Notons $a_1, \ldots, a_n$ les éléments de A et $b_1, \ldots, b_n$ les éléments de B. Notons que si $a_j b_l$ est choisi par Arthur, et qu'il existe un autre élément de la forme $a_j b_{l'}$ choisi par Arthur et un de la forme $a_{j'} b_l$, alors Thomas peut trouver un triplet (x,y,z) tel que x divise yz. Si Arthur a choisi deux fois le même entier, Bob gagne. Supposons qu'Arthur a une stratégie gagnante pour k.

On considère le graphe dont les sommets sont les (a_i) et les (b_j) tel qu'on relie a_i et b_j si $a_i b_j$ est choisi par Arthur (si $a_i b_j$ peut être écrit comme plusieurs produits d'éléments de A et B, on ne considère qu'un produit) pour tout $(i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2$. La remarque précédente nous dit que si on considère une arête quelconque, un des deux sommets ne peut être de degré au moins 2, donc est de degré 1. Notons G_1 l'ensemble des sommets de G dont part exactement une arête. D'après la remarque précédente, k étant le nombre d'arêtes de G, il est plus petit que le cardinal de $|G_1|$ donc inférieur ou égal à $2n$. Une option pour avoir beaucoup d'arêtes est de relier a_1 à tous les b_i sauf à b_1, et relier b_1 à tous les a_i sauf a_1, ce qui donnerait $2n-2$ arêtes. On peut donc essayer de montrer qu'il y a au plus $2k-2$ arêtes.

Supposons que G contient strictement plus de $2n-2$ arêtes. En particulier $|G_1|$ est de taille $2n$ ou $2n-1$. Si G_1 est de cardinal au moins $2n-1$, tous les sommets sauf éventuellement 1 sont dans G_1. Ainsi G_1 contient tous les (a_i) ou tous les (b_i), disons tous les (a_i) par symétrie. Comme chaque arête par d'un (a_i), il y a au plus $n < 2n-2$ arêtes, ce qui conclut. Ainsi $k \leqslant 2n-2$. En particulier, si $k \geqslant 2n-1$, Bob peut gagner.

Essayons de faire un exemple un peu semblable à notre graphe avec un nombre maximal d'arête. On note $p_1, \ldots, p_{2n}$ les $2k$ plus petits nombres premiers. On pose $A = \{p_1, \ldots, p_n\}$ et $B = \{p_{n+1}, \ldots, p_{2n}\}$, si Arthur choisit les éléments de la forme $p_1 p_j$ avec $n+2 \leqslant j \leqslant 2n$, et $p_{n+1} p_l$ pour $2 \leqslant l \leqslant n$, elle a $2n-2$ éléments distincts. Comme tout élément choisi possède un facteur premier qu'il est le seul à posséder, Thomas ne peut pas trouver de triplet (x,y,z) vérifiant l'énoncé, donc Arthur gagne. Quitte à enlever des éléments, si $k \leqslant 2n-2$, Arthur peut gagner.

Solution de l'exercice 3
Soit $n \geqslant 1$. Pour tout entier $m \geqslant 1$, chacun des deux ensembles

$$\{f(m+1), \ldots, f(m+f(n))\} \quad \text{et} \quad \{f(m+2), \ldots, f(m+1+f(n))\}$$

contient exactement un entier divisible par n. Ainsi, si $n \mid f(m+1)$, aucun des entiers $f(m+2), \ldots, f(m+f(n))$ n'est divisible par n, de sorte que n divise $f(m+1+f(n))$. De même, si n ne divise pas $f(m+1)$, n divise un des entiers $f(m+2), \ldots, f(m+f(n))$, donc n ne divise pas $f(m+1+f(n))$. En conclusion, pour tout entier $m \geqslant 2$, n divise $f(m)$ si et seulement si n divise $f(m+f(n))$. Cela signifie que pour toute paire d'entiers (x, y) supérieurs ou égaux à 2, n divise $f(x)$ et $f(y)$ si et seulement si $f(n)$ divise $x - y$.

Soient maintenant $k \geqslant 1$ un entier et x un entiers tel que $kn \mid f(x)$. Alors kn divise également $f(x+f(kn))$, de sorte que n divise $f(x)$ et $f(x+f(kn))$. On déduit que $f(n)$ divise $f(kn)$ pour tout entier $k \geqslant 1$.

En particulier $f(n)$ divise $f(n)$ et $f(2n)$, donc $f(f(n))$ divise $2n - n = n$. Remarquons ensuite que si n divise $f(n)$, alors il existe un entier k tel que $f(n) = kn$. Mais alors $f(kn) = f(f(n)) \mid n \mid f(n) \mid f(kn)$, de sorte que $f(kn) = f(n)$, donc $n \mid f(n) = f(kn) = f(f(n)) \mid n$ et $f(n) = n$. Ainsi, il suffit de trouver des entiers n tels que $f(n) = n$.

D'autre part, puisque $f(f(n))$ divise n, on a en particulier pour tout nombre premier, $f(f(p))$ divise p, donc $f(f(p)) \in \{1, p\}$. Supposons que x soit tel que $f(x) = 1$. Alors pour tout entier $m \geqslant 1$, l'ensemble $\{f(m+1), \ldots, f(m+f(x))\}$ est réduit à $\{f(m+1)\}$, de sorte que x divise $f(m+1)$ pour tout m. En particulier, x divise $f(x) = 1$, donc $x = 1$. Ainsi, $f(p) \neq 1$ et $f(f(p)) \neq 1$ donc $f(f(p)) = p$ pour tout nombre premier p.

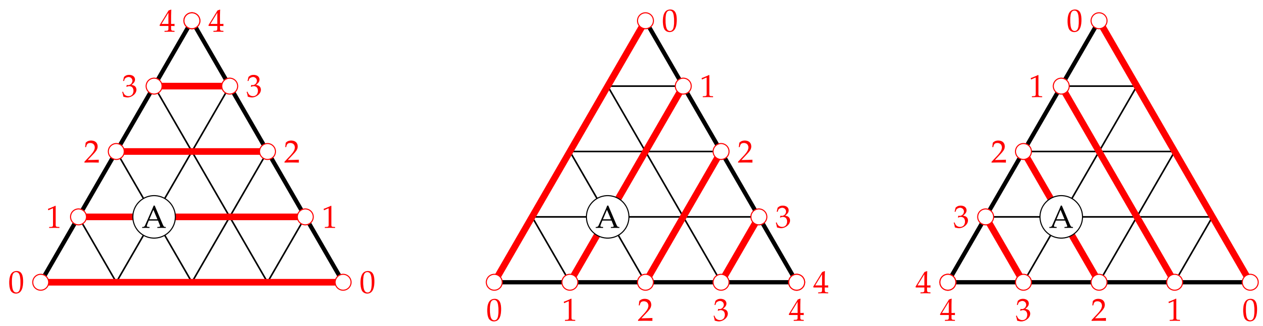
Si p divise $f(p)$ pour une infinité de nombres premiers p, alors d'après la discussion précédente, $f(p) = p$ pour une infinité de nombres premiers, ce qui donne le résultat voulu. Sinon, pour tout nombre premier p suffisamment grand, $f(p)$ et p sont premiers entre eux. On a alors $f(p) \mid f(pf(p))$ et $p = f(f(p)) \mid f(pf(p))$, de sorte que $pf(p) \mid f(pf(p))$ et $f(pf(p)) = pf(p)$.

Il reste à voir que $pf(p)$ peut prendre une infinité de valeurs différentes. Pour cela, on suppose que l'on a construit k entiers différents de la forme $pf(p)$ et on choisit q un nombre premier sitrictement plus grand que ces k entiers. Alors $qf(q)$ est un bien un entier distincts des k précédents.

f admet donc une infinité de points fixes.

Solution de l'exercice 4

Nous allons numéroter de 0 à $n-1$, comme dans l'exemple ci-dessous, les droites parallèles aux côtés du triangle et qui délimitent les cases de celui-ci. Ce faisant nous allons conférer à chaque case sommet des *coordonnées triangulaires*, qui sont les numéros des droites auxquelles il appartient : ici, le sommet A a pour coordonnées $(1, 2, 2)$.



Direction n°1 Direction n°2 Direction n°3

On remarque que, lorsque l'on se déplace le long d'une arête unité, l'une de nos coordonnées augmente de 1, une autre diminue de 1, et la troisième ne change pas. Par conséquent, nos points se caractérisent par leurs coordonnées des triplets (a, b, c) de somme n, et chaque triplet (a, b, c) représente un point sur la grille. Le problème revient donc à trouver un ensemble maximal de triplets (a_i, b_i, c_i) de somme n et tels que les nombres a_i (respectivement, b_i et c_i) soient deux à deux distincts.

Si l'on dispose de k points, on en déduit que

$$kn = \sum_{i=1}^{k}(a_i + b_i + c_i) = \sum_{i=1}^{k} a_i + \sum_{i=1}^{k} b_i + \sum_{i=1}^{k} c_i \geqslant 3\sum_{i=0}^{k-1} i = 3k(k-1)/2,$$

de sorte que $k \leqslant 2n/3 + 1$.

Réciproquement, lorsque n est divisible par 3, comme c'est le cas pour $n = 2022$, et quitte à poser $m = n/3$, on peut se contenter de choisir les $2m + 1 = 2n/3 + 1$ triplets

$$(0, m, 2m), (1, m{+}1, 2m{-}2), \ldots, (m, 2m, 0), (m{+}1, 0, 2m{-}1), (m{+}2, 1, 2m{-}3), \ldots, (2m, m{-}1, 1),$$

dont les coordonnées a_i, b_i et c_i décrivent chacune l'ensemble $\{0, 1, \ldots, 2m\}$.

3 Deuxième partie : Algèbre & Géométrie

1 Hypothèses d'angle (Martin)

COMMENT MANIER UNE HYPOTHÈSE D'ANGLES ?

Martin Rakovsky

L'objectif du présent TD est de se concentrer sur des problèmes de géométrie au caractère repoussant : des problèmes dans lesquels certains points sont définis par des égalités d'angles. Pourquoi cela est repoussant ? Parce que bien souvent il n'est pas évident de tracer directement une figure exacte. Super, on peut donc se débarasser de son compas et de son équerre et réfléchir complètement à main levée ? Rien n'est moins sûr ! Bien souvent dans ce genre de problème, c'est au contraire en cherchant comment tracer la figure exacte que l'on progresse dans sa résolution. En effet, pour tracer la figure, on est amené à chercher diverses propriétés sur les points présentés, à rajouter soi-même des objets géométriques, à effectuer des transformation, à reconnaître des configurations classiques... Vous l'aurez compris, le travail de recherche pour une construction exacte est déjà un travail de résolution de l'exercice.

Il est à penser, au vu des IMO des années précédentes, que de tels problèmes vont apparaître de plus en plus souvent, une raison de plus de traiter ce genre de problèmes en particulier.

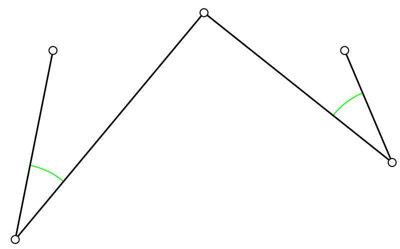
En gage de ma bonne foi, toutes les figures du présent corrigé ont été tracées de façon exacte.

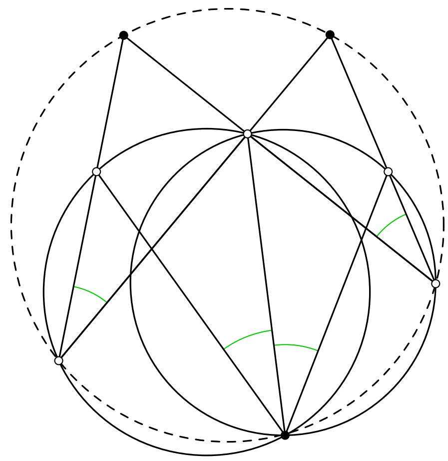
Quelques conseils

Pour traiter les problèmes dans lesquels certains points sont définis par des égalités d'angles, voici quelques conseils :

- Chercher comment tracer la figure exacte. Bien souvent, les idées déployées pour tracer la figure exacte sont également utiles pour la résolution de l'exercice. On va par exemple naturellement introduire des points intermédiaires, des cercles supplémentaires, des droites nouvelles et ces objets révèlent souvent les informations qui étaient cachées derrière la condition d'angles.
- Manipuler algébriquement l'hypothèse donnée. En rajoutant une quantité de chaque côté de l'équation, en soustrayant l'équation à $180°$...l'objectif est de transformer l'hypothèse d'angle donnée en une hypothèse géométrique.
- **Introduire des points intermédiaires.** Voyons deux exemples.

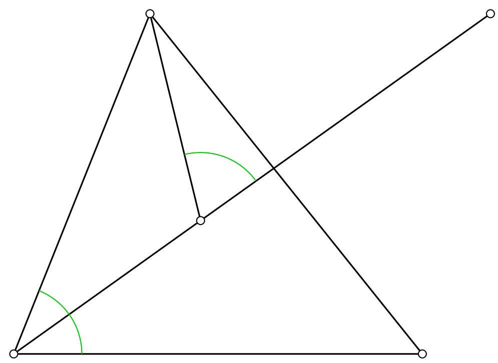
  Supposons tout d'abord qu'on se trouve dans la situation de gauche :

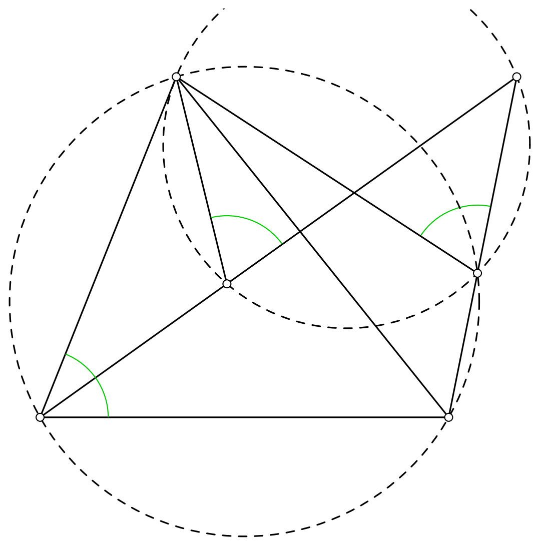




Deux angles de même mesure concernent deux segments disjoints. On peut compléter la figure pour avoir un cercle dont un arc est couvert par les deux angles (cercle en pointillé de la figure de droite) ou on peut chercher à introduire un point intermédiaire qui transporte l'information d'un angle à l'autre. Un point intermédiaire est par exemple le second point d'intersection des deux cercles portant les deux angles verts (cercles noirs de la figure de droite. L'introduction d'un tel point peut également permettre, dans certains cas, de construire la figure.

Regardons à présent la situation suivante





On désire construire, étant donné un triangle et une droite issue de l'un des sommets, un point sur la droite définissant un angle de même mesure que l'un des angles du triangle (voir situation de gauche). Un point intermédiaire intéressant est, encore une fois, le second point d'intersection des deux cercles circonscrits portant les deux arcs. Ici, en construisant d'abord le point d'intermédiaire, on peut construire de façon exacte le point désiré sur la droite : en traçant le cercle circonscrit au triangle puis en traçant le cercle passant par le point intermédiaire et les deux points ayant l'ordonnée la plus grande (voir les cercles en pointillé sur la figure de droite).

L'introduction de points intermédiaire est souvent bénéfique, et **un bon point intermédiaire est souvent un point appartenant à plusieurs cercles différents**, car il "transporte" d'une certaine manière les diverses égalités d'angles.

En présence d'une hypothèse d'égalité de deux angles, un point intermédiaire intéressant est le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles dont l'un des angles est concerné par l'hypothèse d'angle, comme cela a été montré dans les deux exemples précédents.

Penser point intermédiaire !

- Rechercher les configurations connues faisant intervenir des égalités d'angles (configuration de la symédiane par exemple). Quelques problèmes ne sont que des déguisements de certaines configuration par une redéfinition des divers points.
- L'inversion permet d'échanger des points et donc d'échanger des angles. Certaines hypothèses d'angles compliquées admettent une version analogue simple dans la figure inversée.

Exercices

Exercice 1
(Russie 2013) Soit ABC un triangle et C_1 un point sur le segment $[AB]$. Soient A_1 et B_1 des points situés respectivement sur les segments $[BC]$ et $[CA]$ tels que $\widehat{AC_1B_1} = \widehat{BC_1A_1} = \widehat{ACB}$. Les droites (AA_1) et (BB_1) se coupent au point C_2. Soit C' le symétrique du point C par rapport au segment $[AB]$. Montrer que les points C', A, B et C_2 sont cocycliques.

Exercice 2
(Canada 2013) Soit ABC un triangle rectangle en C et G son centre de gravité. Soit P le point sur la demi-droite $[AG)$ tel que $\widehat{CPA} = \widehat{BAC}$. Soit Q le point sur la demi-droite $[BG)$ tel que $\widehat{CQB} = \widehat{CBA}$. Montrer que les cercles circonscrits aux triangle AQG et BPG se coupent une deuxième fois en un point du segment $[AB]$.

Exercice 3
(IMO 2014 P4) Soit ABC un triangle. Les points P et Q appartiennent au segment $[BC]$ de telle sorte que $\widehat{PAB} = \widehat{BCA}$ et $\widehat{CAQ} = \widehat{ABC}$. Les points M et N appartiennent respectivement aux droites (AP) et (AQ) de telle sorte que le point P soit le milieu du segment $[AM]$ et que le point Q soit le milieu du segment $[AN]$. Montrer que le point d'intersection des droites (BM) et (CN) appartient au cercle circonscrit du triangle ABC.

Exercice 4
(IMO 2020 P1) Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe et soit P un point à l'intérieur du quadrilatère. On suppose que les égalités de rapports suivantes sont vérifiées :

$$\widehat{PAD} : \widehat{PBA} : \widehat{DPA} = 1 : 2 : 3 = \widehat{CBP} : \widehat{BAP} : \widehat{BPC}$$

Montrer que les trois droites suivantes sont concourrantes : la bissectrice de l'angle $\widehat{ADP}$, la bissectrice de l'angle $\widehat{PCB}$ et la médiatrice du segment $[AB]$.

Exercice 5
(G2 2018) Soit ABC un triangle tel que $AB = AC$ et soit M le milieu du segment $[BC]$. Soit P un point vérifiant $PB < PC$ et tel que les droites (AP) et (BC) sont parallèles. Soient X et Y des points appartenant respectivement aux droites (PB) et (PC) de telle sorte que le point B est sur le segment $[PX]$, le point C est sur le segment $[PY]$ et $\widehat{PXM} = \widehat{PYM}$. Montrer que le quadrilatère $APXY$ est cyclique.

Exercice 6
(USAMO 2021 P1) Soit ABC un triangle. On construit à l'extérieur du triangle ABC les rectangles BB_2C_1C, CC_2A_1A et AA_2B_1B. On suppose que

$$\widehat{BC_1C} + \widehat{CA_1A} + \widehat{AB_1B} = 180°$$

Montrer que les droites $(A_1B_2), (B_1C_2)$ et (C_1A_2) sont concourantes.

Exercice 7
(BXMO 2012) Soit ABC un triangle et soit M le milieu du segment $[BC]$. Soit P un point à l'intérieur du triangle ABC vérifiant que $\widehat{CPM} = \widehat{PAB}$. Soit Γ le cercle circonscrit au triangle

PAB. Soit Q le second point d'intersection de la droite (PM) avec le cercle Γ. Soit R le symétrique du point P par rapport à la tangente au cercle Γ en B. Montrer que quand P varie, la distance QR reste constante.

Exercice 8
(Balkan MO 2021 P1) Soit ABC un triangle dans lequel $AB < AC$. Soit ω un cercle passant par B et C et on suppose que le point A se trouve à l'intérieur du cercle ω. Soient X et Y des points de ω tels que $\widehat{BXA} = \widehat{AYC}$. On suppose que X et C sont situés de part et d'autre de la droite (AB) et que Y et B sont situés de part et d'autre de la droite (AC). Montrer que, lorsque X et Y varient sur le cercle ω, la droite (XY) passe par un point fixe.

Exercice 9
(IMO 2022 P4) Soit $ABCDE$ un pentagone convexe tel que $BC = DE$. On suppose qu'il existe un point T à l'intérieur de $ABCDE$ tel que $TB = TD, TC = TE$ et $\widehat{ABT} = \widehat{AET}$. On note P et Q les points d'intersection respectifs des droites (CD) et (CT) avec la droite (AB) ; on suppose que les points P, B, A et Q sont alignés dans cet ordre. De même, on note R et S les points d'intersection respectifs des droites (CD) et (DT) avec la droite (AE), et on suppose que les points R, E, A et S sont eux aussi alignés dans cet ordre. Démontrer que les points P, S, Q et R sont cocycliques.

Exercice 10
(IMO 2006 P1) Soit ABC un triangle et I le centre de son cercle inscrit. Soit P un point un point à l'intérieur du triangle ABC vérifiant

$$\widehat{PBA} + \widehat{PCA} = \widehat{PBC} + \widehat{PCB}$$

Montrer que $AP \geqslant AI$ avec égalité ssi $P = I$

Exercice 11
(IMO SL 2007 G3) Soit $ABCD$ un trapèze avec les côtés AD et BC parallèles et dont les diagonales se coupent au point P. Le point Q est compris entre les droites (AD) et (BC) de telle sorte que $\widehat{AQD} = \widehat{BQC}$ et de telle sorte que les points P et Q sont situés de part et d'autre de la droite (CD). Montrer que $\widehat{BQP} = \widehat{DAQ}$.

Exercice 12
(IMO 2019 P2) Soit ABC un triangle et soient A_1 et B_1 deux points appartenant respectivement aux côtés $[BC]$ et $[CA]$. Soient P et Q deux points appartenant respectivement aux segments $[AA_1]$ et $[BB_1]$, de telle sorte que les droites (PQ) et (AB) soient parallèles. Soit P_1 un point situé sur la droite (PB_1) tel que B_1 se trouve situé entre les points P et P_1 et tel que $\widehat{PP_1C} = \widehat{BAC}$. Soit Q_1 un point situé sur la droite (QC_1) tel que C_1 se trouve situé entre les points Q et Q_1 et tel que $\widehat{QQ_1C} = \widehat{ABC}$. Montrer que les points P, Q, P_1 et Q_1 sont cocycliques.

Exercice 13
(EGMO 2021 P3) Soit ABC un triangle dont l'angel en A est obtus. Soient E et F les points d'intersection respectifs de la bissectrice extérieur de l'angle $\widehat{BAC}$ avec les hauteurs issues

des sommets B et C. Soit M un point du segment $[EC]$ tel que $\widehat{EMA} = \widehat{ACB}$. Soit N un point du segment $[FB]$ tel que $\widehat{ANF} = \widehat{ABC}$. Montrer que les points E, M, N et F sont cocycliques.

Exercice 14

(IMO 2014 P3) Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe tel que $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90°$. Soit H le pied de la hauteur issue du sommet A dans le triangle ABD. Soient S et T appartiennent respectivement aux côtés AB et AD de telle sorte que

$$\widehat{SHC} - \widehat{BSC} = 90° \quad \text{et} \quad \widehat{THC} - \widehat{DTC} = 90°$$

Montrer que la droite (BD) est tangente au cercle circonscrit au triangle HST.

Exercice 15

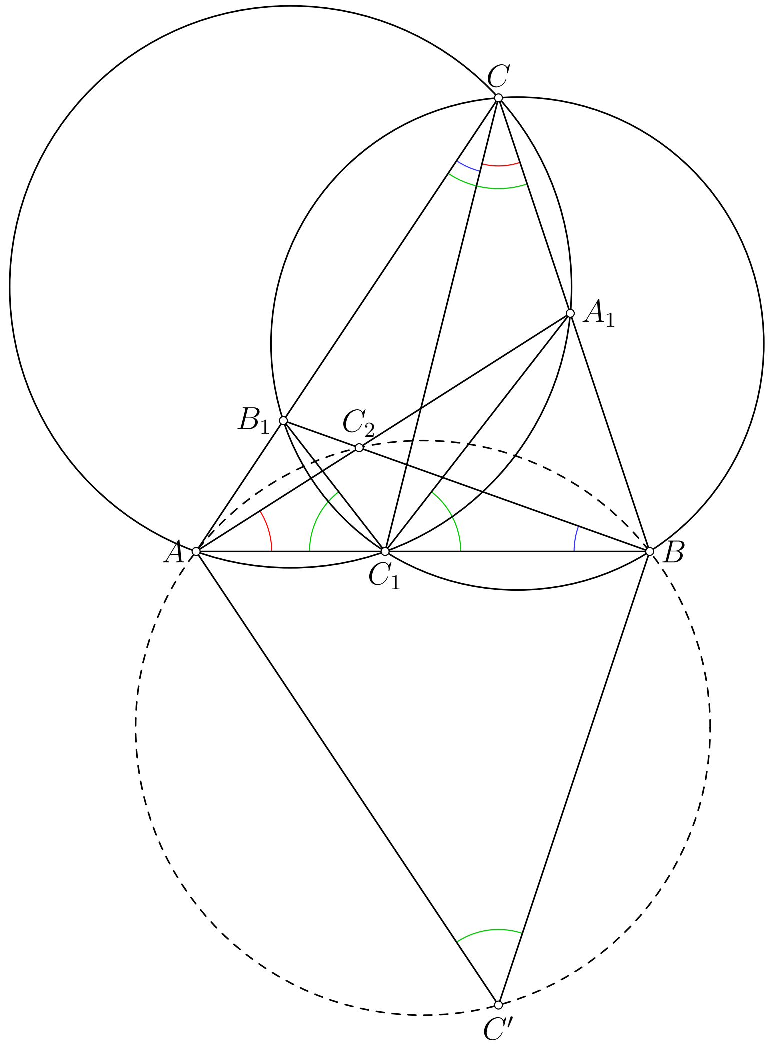
(IMO 2018 P6) Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe tel que $AB \cdot CD = AD \cdot BC$. Soit X un point à l'intérieur du quadrilatère $ABCD$. On suppose que $\widehat{XAB} = \widehat{XCD}$ et $\widehat{XBC} = \widehat{XDA}$. Montrer que $\widehat{AXB} + \widehat{CXD} = 180°$.

Solution

Exercice 1

(Russie 2013) Soit ABC un triangle et C_1 un point sur le segment $[AB]$. Soient A_1 et B_1 des points situés respectivement sur les segments $[BC]$ et $[CA]$ tels que $\widehat{AC_1B_1} = \widehat{BC_1A_1} = \widehat{ACB}$. Les droites (AA_1) et (BB_1) se coupent au point C_2. Soit C' le symétrique du point C par rapport au segment $[AB]$. Montrer que les points C', A, B et C_2 sont cocycliques. (L'énoncé original demande de montrer que la droite (C_1C_2) passe par un point fixe quand le point C_1 varie)

Solution de l'exercice 1



Les conditions d'angles données par l'énoncé nous donnent, d'après le théorème de l'angle inscrit, que les points A, C_1, A_1 et C sont cocycliques. Cela nous permet notamment de construire le point A_1. De même, on peut construire le point B_1 comme le point d'intersection du cercle (CC_1B) avec le côté $[AC]$.

En appliquant le théorème de l'angle inscrit dans ces cercles :

$$\widehat{C_2BC_1} = \widehat{B_1BC_1} = \widehat{B_1CC_1} = \widehat{ACC_1}$$

et de même

$$\widehat{C_2AB} = \widehat{C_1CB}$$

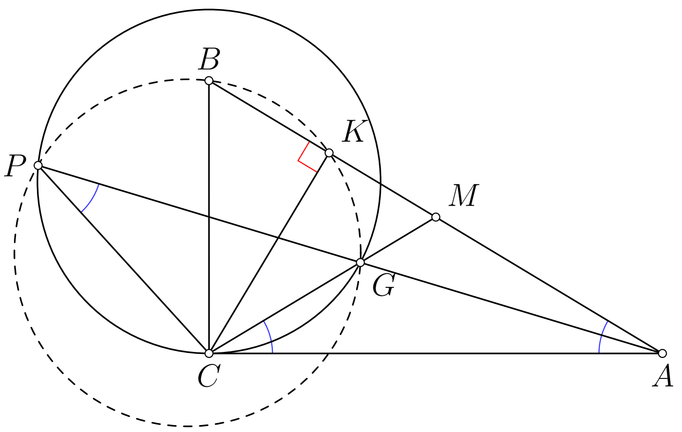
si bien que

$$\widehat{BAC_2} + \widehat{C_2BA} = \widehat{ACB} = \widehat{AC'B}$$

donc $\widehat{AC'B} = 180° - \widehat{AC_2B}$ donc les points annoncés sont bien cocycliques.

Exercice 2
(Canada 2013) Soit ABC un triangle rectangle en C et G son centre de gravité. Soit P le point sur la demi-droite $[AG)$ tel que $\widehat{CPA} = \widehat{BAC}$. Soit Q le point sur la demi-droite $[BG)$ tel que $\widehat{CQB} = \widehat{CBA}$. Montrer que les cercles circonscrits aux triangle AQG et BPG se coupent une deuxième fois en un point du segment $[AB]$.

Solution de l'exercice 2



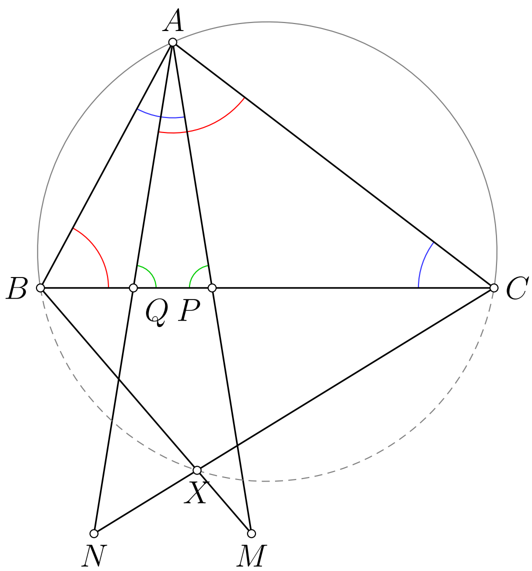
Commençons par tracer la figure et tracer de façon exacte le point P. Pour cela, on cherche un angle plus commode qui vaut $\widehat{BAC}$ pour appliquer le théorème de l'angle inscrit. La médiane (CG) étant déjà présente sur la figure, on la prolong pour qu'elle coupe le segment $[AB]$ au poin M et comme le triangle ABC est rectangle en C, $\widehat{BAC} = \widehat{MCA}$. La droite (AC) est donc tangente au cercle circonscrit au triangle PCG. On peut tracer le cercle tangent à la droite (AC) passant par G, donc on peut tracer le point P.

Une fois la figure tracée, on peut conjecturer que le point K d'intersection des deux cercles est le pied de la hauteur issue du sommet C dans le triangle ABC. On note K le pied de la hauteur et on montre que K appartient au cercle circonscrit au triangle BPG.

Utilisons les informations que nous a apportées notre construction : d'après la puissance du point A par rapport au cercle (PCG), $AC^2 = AG \cdot AP$ et on sait que $AC^2 = AK \cdot AB$. On a donc $AB \cdot AK = AG \cdot AP$ et l'on peut conclure avec la réciproque de la puissance d'un point.

Exercice 3
(IMO 2014 P4) Soit ABC un triangle. Les points P et Q appartiennent au segment $[BC]$ de telle sorte que $\widehat{PAB} = \widehat{BCA}$ et $\widehat{CAQ} = \widehat{ABC}$. Les points M et N appartiennent respectivement aux droites (AP) et (AQ) de telle sorte que le point P soit le milieu du segment $[AM]$ et que le point Q soit le milieu du segment $[AN]$. Montrer que le point d'intersection des droites (BM) et (CN) appartient au cercle circonscrit du triangle ABC.

Solution de l'exercice 3



Ici, il s'agit de réinterpréter les égalités qui sont données. Puisque $\widehat{PAB} = \widehat{BCA}$, la droite (AB) est tangente au cercle circonscrit au triangle APC. Le centre du cercle ACP s'obtient comme le point d'intersection de la perpendiculaire à la droite (AB) passant par A et la médiatrice du segment $[AC]$. Si on peut tracer le cercle APC, on peut tracer le point P. De même on trace le point Q. On peut alors tracer le reste de la figure. On note X le point d'intersection des droites (BM) et (CN).

Les égalités d'angles nous apportent que les triangles ABC, PBA et QCA sont semblables. En particulier on déduit que

$$\frac{NQ}{QC} = \frac{AQ}{CQ} = \frac{AB}{AC} = \frac{BP}{AP} = \frac{BP}{PM}$$

et puisque $\widehat{BPM} = 180° - \widehat{BPA} = 180° - \widehat{BAC} = \widehat{NQC}$, les triangles BPM et NQC sont semblables.

On a donc

$$\widehat{XBC} + \widehat{XCB} = \widehat{MBP} + \widehat{NCQ} = \widehat{MBP} + \widehat{BMP} = \widehat{BPA} = \widehat{BAC}$$

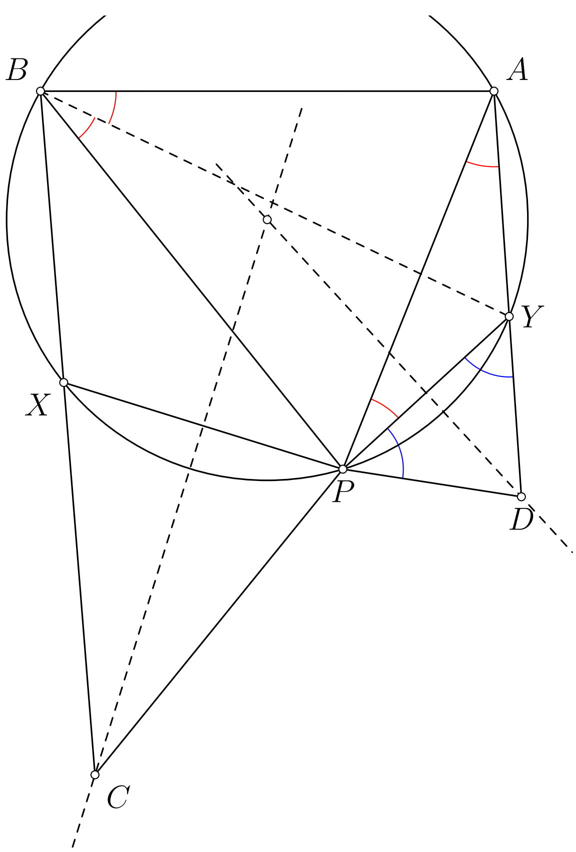
donc $\widehat{BXC} = 180° - \widehat{BAC}$ et les points A, B, C et X sont cocycliques.

Exercice 4
(IMO 2020 P1) Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe et soit P un point à l'intérieur du quadrilatère. On suppose que les égalités de rapports suivantes sont vérifiées :

$$\widehat{PAD} : \widehat{PBA} : \widehat{DPA} = 1 : 2 : 3 = \widehat{CBP} : \widehat{BAP} : \widehat{BPC}$$

Montrer que les trois droites suivantes sont concourrantes : la bissectrice de l'angle $\widehat{ADP}$, la bissectrice de l'angle $\widehat{PCB}$ et la médiatrice du segment $[AB]$.

Solution de l'exercice 4



Résoudre l'exercice consiste à trouver comment tracer la figure.

Pour cela on prend le problème à l'envers en notant que l'angle $\widehat{PBA}$ détermine la position du point D. Ceci nous conduit à construire le triangle PBA puis construire les points C et D à partir de ce triangle. Pour construire le point D, il faut déterminer l'angle $\widehat{PBA} = 2\widehat{PAD}$. Ceci conduit à couper l'angle $\widehat{PBA}$ en deux et à tracer sa bissectrice.

Supposons le point D construit. Le point Y d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{PBA}$ avec la droite (AD) vérifie par hypothèse

$$\widehat{YAP} = \widehat{DAR} = \frac{1}{2}\widehat{PBA} = \widehat{YBA}$$

donc les points Y, A, B et P sont cocycliques. Le point Y est donc le pôle Sud du sommet B dans le triangle ABP. A l'inverse, le point D appartient donc à la droite (AY) avec Y le pôle Sud du sommet B dans le triangle PAB. On a alors

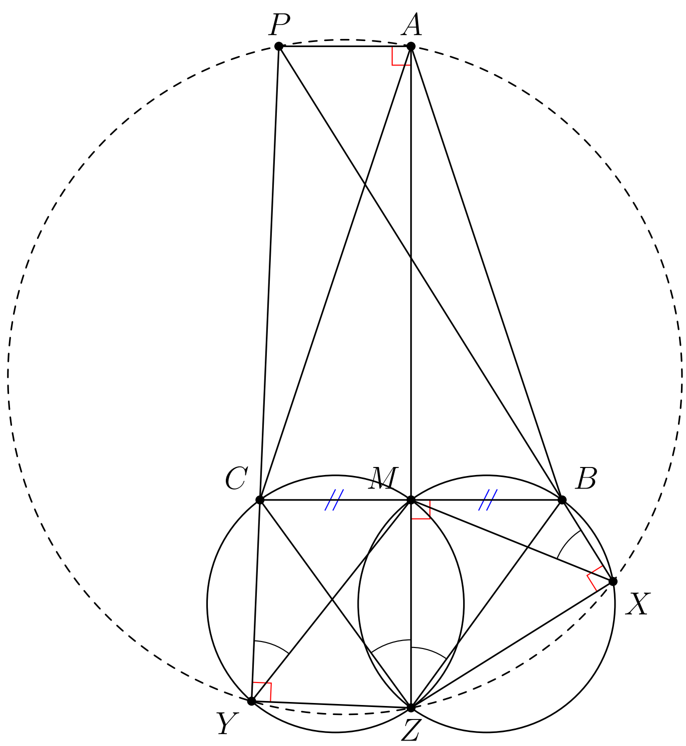
$$\widehat{DPY} = \widehat{DPA} - \widehat{YPA} = 3\widehat{PAD} - \widehat{PAD} = 2\widehat{PAD} = \widehat{PYD}$$

Le triangle PDY est donc isocèle en D. Le point D est donc le point d'intersection de la droite (AY) et de la médiatrice du segment $[PY]$. La bissectrice de l'angle $\widehat{PDA}$ est donc la médiatrice du segment $[PY]$.

De même la bissectrice de l'angle $\widehat{PCB}$ est la médiatrice du segment $[PX]$, où X est le pôle Sud du sommet A dans le triangle APB. Les bissectrices des angles $\widehat{PCB}$ et $\widehat{PDA}$ se coupent donc au point O le centre du cercle circonscrit au triangle APB. Celui-ci appartient bien à la médiatrice $[AB]$.

Exercice 5
(G2 2018) Soit ABC un triangle tel que $AB = AC$ et soit M le milieu du segment $[BC]$. Soit P un point vérifiant $PB < PC$ et tel que les droites (AP) et (BC) sont parallèles. Soient X et Y des points appartenant respectivement aux droites (PB) et (PC) de telle sorte que le point B est sur le segment $[PX]$, le point C est sur le segment $[PY]$ et $\widehat{PXM} = \widehat{PYM}$. Montrer que le quadrilatère $APXY$ est cyclique.

Solution de l'exercice 5



Le problème est le suivant : étant donné le point X placé sur la droite (PB), comment construire le point Y. Une première réponse serait de dire "étant donné l'énoncé, je n'ai qu'à tracer le cercle (APX) et prendre le point d'intersection de ce cercle avec la droite (PC)", mais cela ne nous apporterait pas beaucoup d'informations.

Penser point intermédiaire ! On va rajouter un point Z intermédiaire, qui vérifierait $\widehat{CZM} = \widehat{CYM}$ et $\widehat{MZB} = \widehat{MXB}$. On sait **qu'un point intermédiaire souvent utile est le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles dont l'un des angles est concerné par l'hypothèse d'angle.**

Ici, on considère donc le point Z, second point d'intersection des cercles (MXB) et (MYC). On le note Z. Puisque $\widehat{MZB} = \widehat{MXB} = \widehat{MYC} = \widehat{MZC}$, la droite (MZ) est la médiane et la bissectrice issue du sommet Z dans le triangle BZC. Donc le point Z est sur la médiatrice du segment $[BC]$.

Pour construire la figure on procède donc comme suit : on choisit un point Z sur la médiatrice du segment $[BC]$, on choisit X comme le second point d'intersection du cercle (ZMB) et de la droite (PB) et on construit le point Y de la même façon.

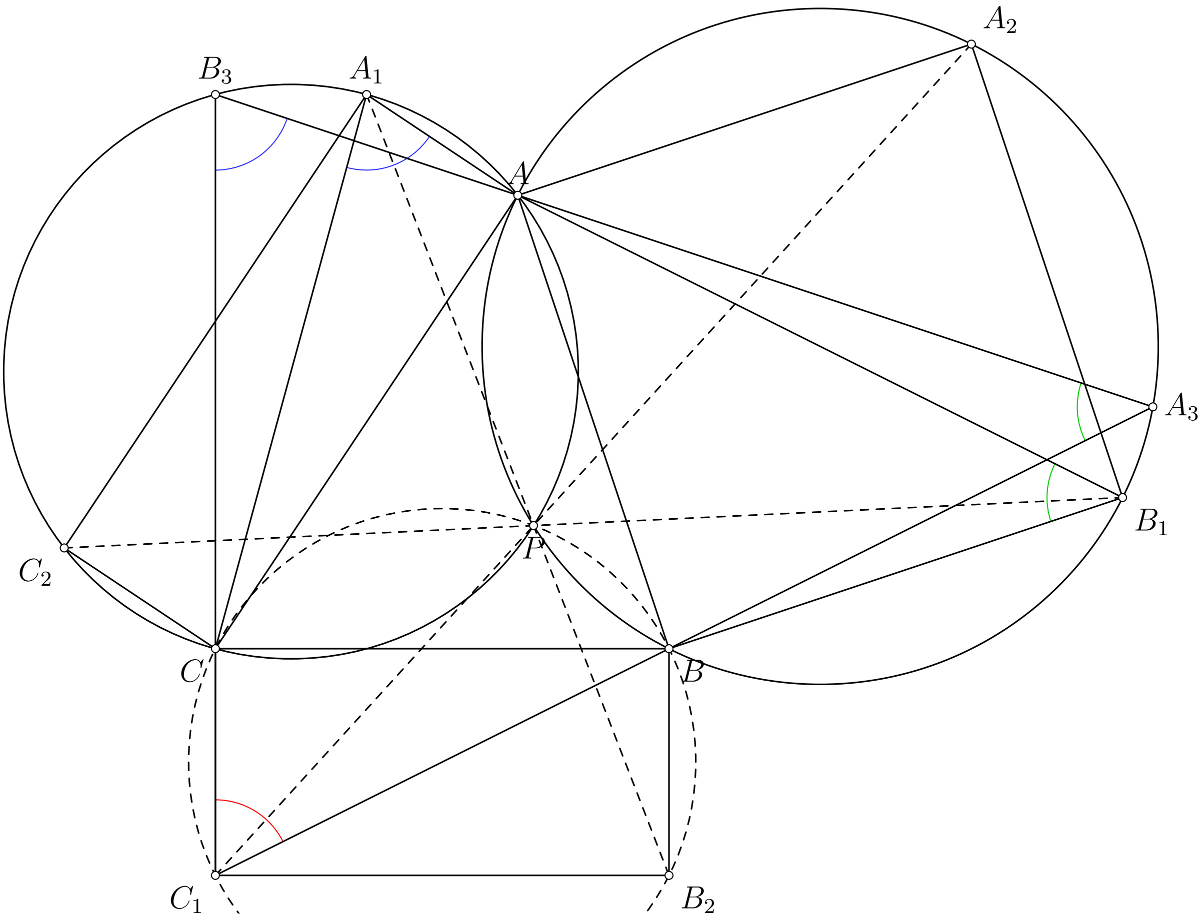
On peut imaginer que le point Z va nous servir dans la démonstration. Comme l'angle $\widehat{ZMB}$ est droit et que les points M, B, X et Z sont cocycliques, $\widehat{ZXB} = 90°$. De même, $\widehat{ZYC} = 90°$. les points A, X et Y sont donc suer le cercle de diamètre $[PZ]$ donc en particulier les points P, A, X, Z et Y sont cocycliques.

Exercice 6
(USAMO 2021 P1) Soit ABC un triangle. On construit à l'extérieur du triangle ABC les rectangles BB_2C_1C, CC_2A_1A et AA_2B_1B. On suppose que

$$\widehat{BC_1C} + \widehat{CA_1A} + \widehat{AB_1B} = 180°$$

Montrer que les droites $(A_1B_2), (B_1C_2)$ et (C_1A_2) sont concourantes.

Solution de l'exercice 6



Ici aussi, comprendre comment construire la figure permet de terminer rapidement l'exercice.

Le fait que la somme des angles vaut $180°$ nous fait penser à un triangle. On doit donc essayer de créer un triangle ayant les $\widehat{BC_1C}, \widehat{CA_1A}$ et $\widehat{AB_1B}$. Pourcela on part du rectangle CBB_2C_1 et du rectangle AA_1C_2, C. On souhaite construire un point B_3 sur la droite (C_1C) tel que $\widehat{CB_3A} = \widehat{CA_1A}$. Le théorème de l'angle inscrit est tout indiqué, on choisit B_3 comme le second point d'intersection de la droite (CC_1) et du cercle (AA_1C_2C). On Prolonge ensuite les droites (B_3A) et (BC_1) pour obtneir un point A_3 vérifiant $\widehat{AA_3B} = 180° - \widehat{BC_1C} - \widehat{CA_1A}$. Pour construire le point B_1, on utilise encore une fois le théorème de l'angle inscrit et le point B_1 est le point d'intersection du cercle (AA_3B) et de la perpendiculaire en B à la droite (AB). On peut alors construire A_2.

Lorsque l'on trace les trois droites qui doivent concourir, on s'aperçoit qu'elles se coupent sur le second point d'intersection des deux cercles (AA_1C_2C) et (AA_2B_1B). On note P ce second point d'intersection.

La symétrie du problème suggère que le point P appartient aussi au cercle (CBB_2C_1). Or

$$\widehat{CPB} = 360° - \widehat{BPA} - \widehat{CPA} = 180° - \widehat{BPA} + 180° - \widehat{CPA} = \widehat{CA_1A} + \widehat{AB_1B} = 180° - \widehat{CC_1B}$$

comme voulu. On montre ensuite que P appartient aux trois droites demandées. Or

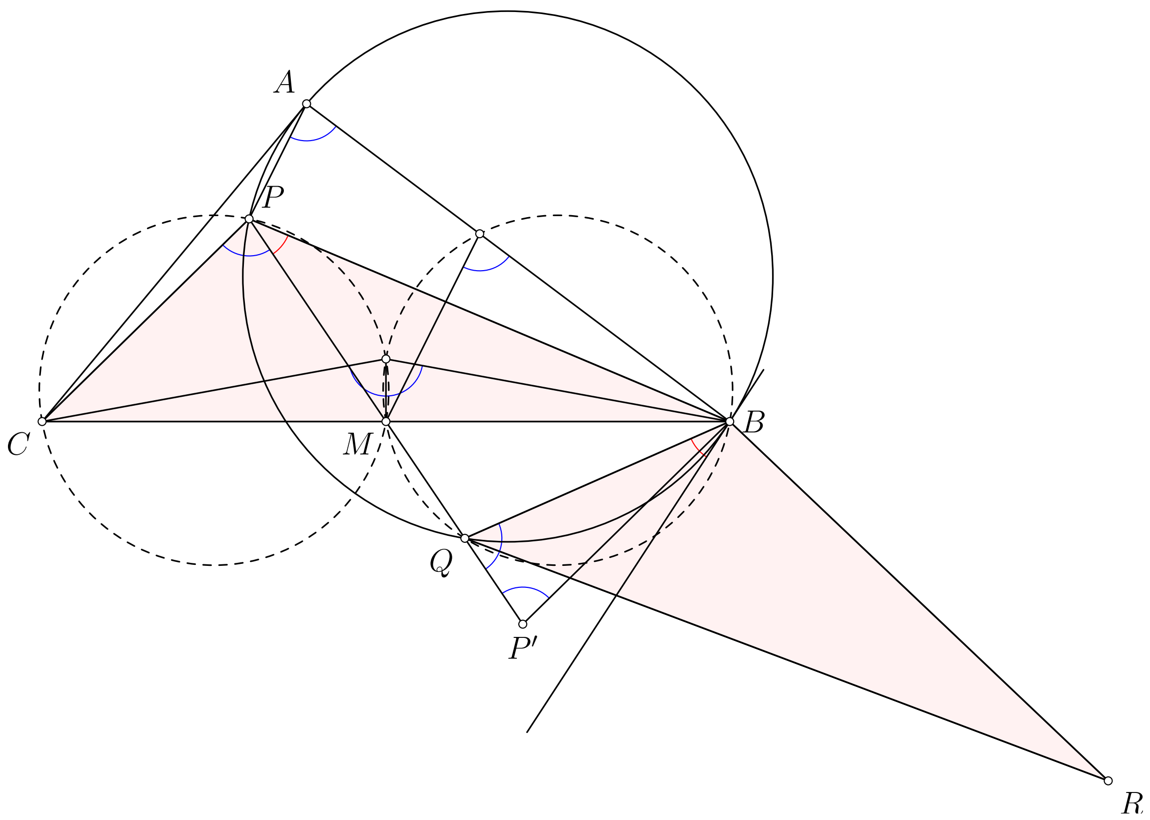
$$\widehat{A_1PB_2} = \widehat{A_1PC} + \widehat{CPB_2} = 90° + 90° = 180°$$

donc le point P appartient à la droite (A_1B_2). On procède de même pour les droites (C_2B_1) et (C_1A_2).

Remarque : On aurait également pu tracer les cercles circonscrits aux rectangles données dans l'espoir d'introduire un point intermédiaire intéressant.

Exercice 7
(BXMO 2012) Soit ABC un triangle et soit M le milieu du segment $[BC]$. Soit P un point à l'intérieur du triangle ABC vérifiant que $\widehat{CPM} = \widehat{PAB}$. Soit Γ le cercle circonscrit au triangle PAB. Soit Q le second point d'intersection de la droite (PM) avec le cercle Γ. Soit R le symétrique du point P par rapport à la tangente au cercle Γ en B. Montrer que quand P varie, la distance QR reste constante.

Solution de l'exercice 7



Commençons par tracer la figure exacte, pour pouvoir faire des conjectures et avancer dans l'exercice.

Pour construire un tel point P, il va falloir rajouter des points intermédiaires pour avoir des angles intermédiaires. Il y a plusieurs pistes à explorer et plusieurs façons de faire, en voici une. On comme par tracer une droite issue du sommet A, sur laquelle nous placerons notre point P. Soit D un point sur cette droite à l'intérieur du triangle ABC. Une façon de créer un angle commode égal à $\widehat{DAB}$ est de tracer la parallèle à (AD) passant par M. On note E le point d'intersection de cette parallèle avec le segment $[AB]$. On a donc $\widehat{MEB} = \widehat{DAB}$. Pour passer au point P, on rajoute un point intermédiaire X sur la médiatrice du segment $[BC]$ et appartenant au cercle (MEB). Alors $\widehat{CXM} = \widehat{MXB} = \widehat{MEB} = \widehat{DAB}$. Donc il ne reste plus qu'à choisir P comme le point d'intersection de la droite (AD) et du cercle (CXM). On peut ensuite tracer le reste de la figure.

Une fois cette figure tracée, on peut conjecturer que les triangles CPB et QBR sont semblables et puisque $BR = BP$, ils sont isométriques et en particulier $QR = BC$, ce qui terminaerait l'exercice. On va donc montrer que $\widehat{QBR} = \widehat{CPB}$ et $QB = CP$.

Pour la première égalité d'angle, on utilise l'angle tangentiel et le fait que (BP) et (BR) sont symétriques par rapport à la tangente en B à Γ. On note Y un point quelconque sur cette tangente dans le même demi-plan délimité par la droite (AB) que le point Q :

$$\widehat{QBR} = \widehat{QBY} + \widehat{YBR} = \widehat{QPB} + \widehat{YBP} = \widehat{QPB} + \widehat{PAB} = \widehat{CPM} + \widehat{MPB} = \widehat{CPB}$$

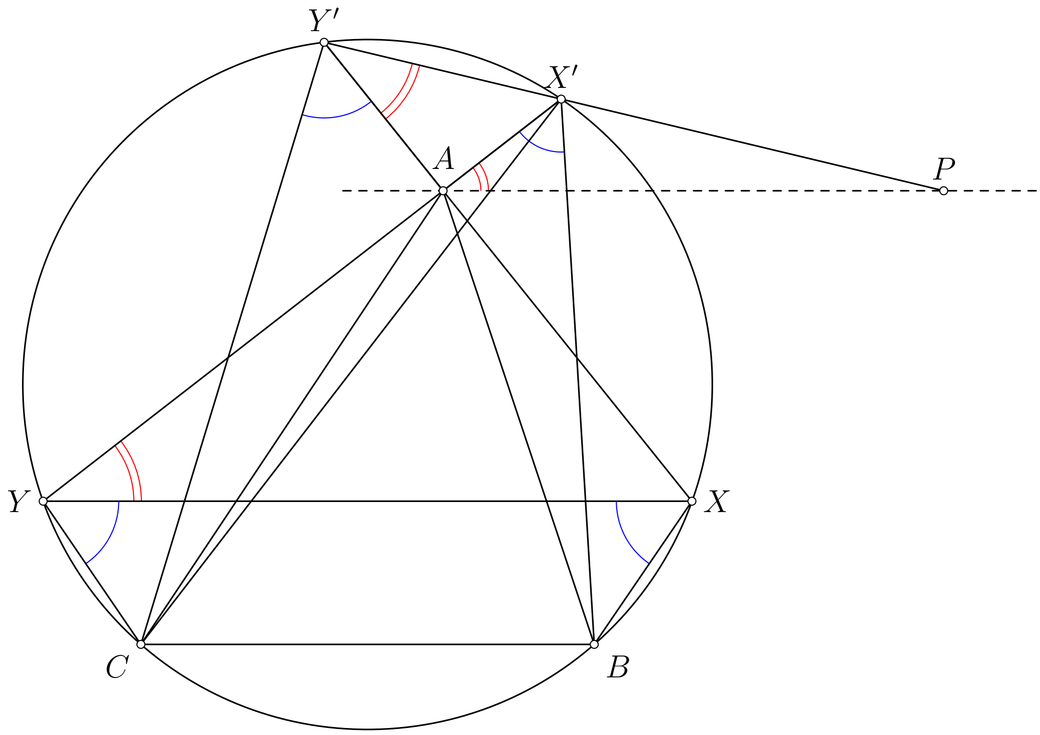
Pour montrer que $CP = BQ$, il reste encore à utiliser que le point M est le milieu du segment $[BC]$. La fçon la plus commode de procéder est donc de compléter le triangle CPB en un parallélogramme en introduisant P' le symétrique du point P par rapport au point M. Il suffit alors de montrer que $QB = BP'$, soit $\widehat{P'QB} = \widehat{QP'B}$. Or

$$\widehat{QP'B} = \widehat{MPC} = \widehat{PAB} = \widehat{P'QB}$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 8
(Balkan MO 2021 P1) Soit ABC un triangle dans lequel $AB < AC$. Soit ω un cercle passant par B et C et on suppose que le point A se trouve à l'intérieur du cercle ω. Soient X et Y des points de ω tels que $\widehat{BXA} = \widehat{AYC}$. On suppose que X et C sont situés de part et d'autre de la droite (AB) et que Y et B sont situés de part et d'autre de la droite (AC). Montrer que, lorsque X et Y varient sur le cercle ω, la droite (XY) passe par un point fixe.

Solution de l'exercice 8
Tout d'abord, nous allons chercher à tracer une figure exacte, en espérant que les raisonnements mis en oeuvre pour le tracé nous éclairerons sur la dynamique de la figure.



Pour tracer la figure, on cherche à tirer profit de l'hypothèse que les points X, B, C et Y sont sur un même cercle, à l'aide du théorème de l'angle inscrit. Supposons la figure tracée. On prolonge donc la droite (XA) et on note X' le second point d'intersection de (XA) avec ω et de même Y' le second point d'intersection de (YA) avec ω.

Le théorème de l'angle inscrit et l'hypothèse sur X et Y nous impose l'égalité suivante :

$$\widehat{CX'Y'} = \widehat{CYY'} = \widehat{CYA} = \widehat{AXB} = \widehat{X'XB} = \widehat{X'Y'B}$$

de sorte que le quadrilatère $BCX'Y'$ est un trapèze isocèle, et les droites $(X'Y')$ et (BC) sont parallèles.

On en déduit un protocole pour tracer la figure : On place un point X sur le cercle ω et on prolonge la droite (AX) de sorte à obtenir le point X'. Puis on obtient le point Y' en traçant la parallèle à la droite (BC) passant par X. On obtient enfin le point Y en prolongeant la droite $(Y'A)$.

Résolvons à présent l'exercice. Maintenant que l'on peut tracer un figure exacte, on peut tracer la figure pour deux positions différentes du point X, notées X_1 et X_2, tracer les points Y_1

et Y_2 associés et conjecturer la position du point fixe à l'aide du point d'intersection des droites $(X_1Y_1$ et (X_2Y_2). Il est frappant que le point d'intersection obtenu appartient à la parallèle à la droite (BC) passant par le point A.

Soit donc P le point d'intersection de la droite (XY) avec la parallèle à (BC) passant par A. Puisque les droites $(X'Y')$ et (AP) sont parallèles, on trouve :

$$\widehat{XAP} = \widehat{XX'Y'} = \widehat{XYY'} = \widehat{XYA}$$

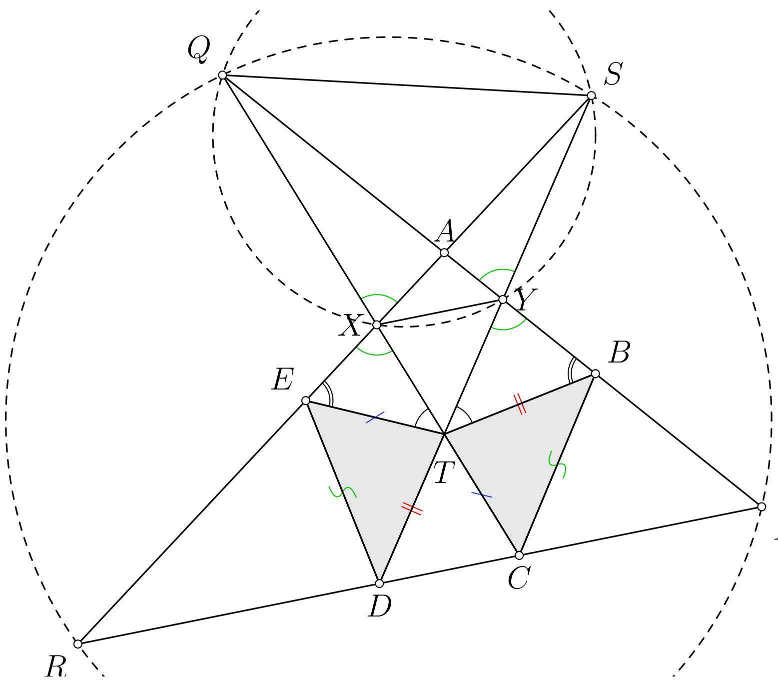
De sorte que la droite (AP) est tangente au cercle circonscrit au triangle AXY. On a donc, d'après la puissance d'un point :

$$PA^2 = PX \cdot PY = \mathcal{P}_\omega(P)$$

La position du point P sur la parallèle à (BC) passant par A est uniquement déterminée par la puissance du point P par rapport au cercle ω, qui ne dépend pas de X et Y. C'est ce que nous voulions démontrer.

Exercice 9
(IMO 2022 P4) Soit $ABCDE$ un pentagone convexe tel que $BC = DE$. On suppose qu'il existe un point T à l'intérieur de $ABCDE$ tel que $TB = TD, TC = TE$ et $\widehat{ABT} = \widehat{AET}$. On note P et Q les points d'intersection respectifs des droites (CD) et (CT) avec la droite (AB) ; on suppose que les points P, B, A et Q sont alignés dans cet ordre. De même, on note R et S les points d'intersection respectifs des droites (CD) et (DT) avec la droite (AE), et on suppose que les points R, E, A et S sont eux aussi alignés dans cet ordre. Démontrer que les points P, S, Q et R sont cocycliques.

Solution de l'exercice 9



Pour tracer la figure, on commence par le segment $[AT]$. On prend un point B et on note B' son symétrique par rapport au segment $[AT]$. On peut alors choisir E sur le cercle circonscrit au triangle $AB'T$. On choisit ensuite un point C sur le cercle de centre T et de rayon TE. Le point D sera alors le point d'intersection du cercle de centre T de rayon TB avec le cercle de centre E de rayon BC.

Passons désormais à la résolution de l'exercice. Les triangles ETD et CTB sont isométriques d'après les conditions de longueur. On déduit que

$$\widehat{QTE} = 180° - \widehat{ETD} - \widehat{DTC} = 180° - \widehat{BTC} - \widehat{DTC} = \widehat{STB}$$

Si on note X et Y les points d'intersection respectivement de (QT) avec (AE) et de (ST) avec (AB), alors on a

$$\widehat{EXT} = 180° - \widehat{XET} - \widehat{XTE} = 180° - \widehat{TYB} - \widehat{YTB} = \widehat{TYB}$$

de sorte que $\widehat{QXS} = \widehat{QYS}$ et les points Q, X, Y et S sont cocycliques.

D'autre part, puisque les triangles EXT et BYT partagent les mêmes angles deux à deux, il sont semblables et

$$\frac{XT}{YT} = \frac{ET}{BT} = \frac{TC}{TD}$$

de sorte que d'après Thalès, les droites (XY) et (CD) sont parallèles.
On peut alors conclure

$$\widehat{PQS} = \widehat{YQS} = \widehat{YXS} = \widehat{YXA} = \widehat{PRA} = \widehat{PRS}$$

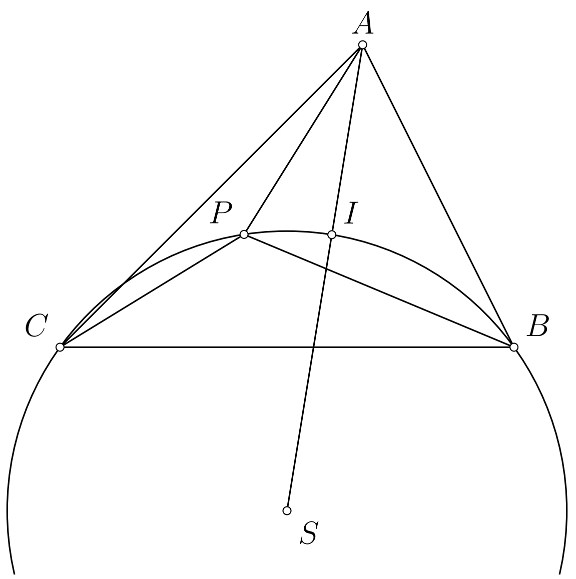
donc les points P, R, Q et S sont cocycliques.

Exercice 10
(IMO 2006 P1) Soit ABC un triangle et I le centre de son cercle inscrit. Soit P un point un point à l'intérieur du triangle ABC vérifiant

$$\widehat{PBA} + \widehat{PCA} = \widehat{PBC} + \widehat{PCB}$$

Montrer que $AP \geqslant AI$ avec égalité ssi $P = I$

Solution de l'exercice 10



Ici, il est bien sûr très difficile de placer le point P sur la figure, pourtant c'est en trouvant comment le placer que l'on va effectivement résoudre l'exercice. On commence par réfléchir à main levée.

Tout d'abord, le membre de droite de l'inégalité s'écrit $180° - \widehat{BPC}$. On calcule donc $180° - \widehat{PBA} - \widehat{PCA}$:

$$\begin{aligned}
180° - \widehat{PBA} - \widehat{PCA} &= \widehat{PAB} + \widehat{APB} - \widehat{PCA} \\
&= \widehat{PAB} + 360° - \widehat{BPC} - \widehat{CPA} - \widehat{PCA} \\
&= \widehat{PAB} + \widehat{PAC} + 180° - \widehat{BPC} \\
&= \widehat{BAC} + 180° - \widehat{BPC}
\end{aligned}$$

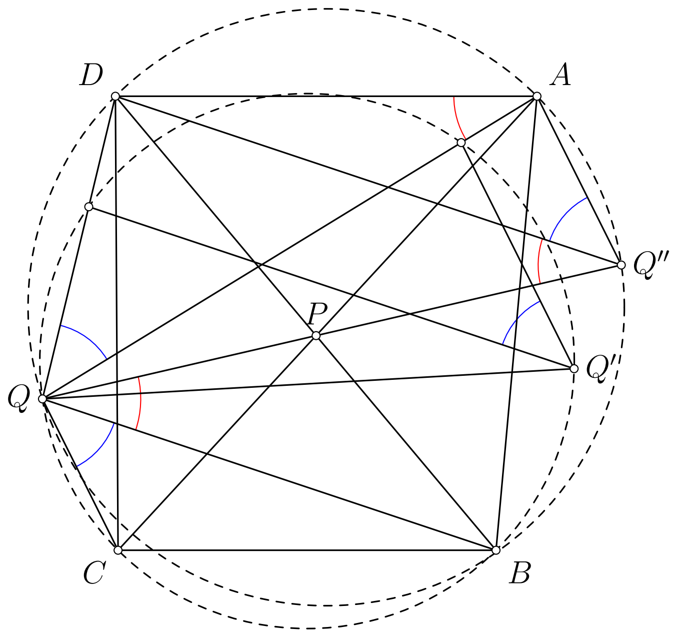
si bien que $\widehat{BPC} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} + 90°$.

Le point P est donc sur un cercle passant par les points B et C et un troisième point X fixe vérifiant $\widehat{BXC} = 90° + \frac{1}{2}\widehat{BAC}$, encore faut-il trouver le point X. Il ne faut pas chercher bien loin, l'énoncé évoque le point I, il ne reste donc plus qu'à remarquer que $\widehat{BIC} = 90° + \frac{1}{2}\widehat{BAC}$.

Le point P est donc sur le cercle antarctique, de centre le pôle Sud du sommet A. La distance du point A à ce cerlce est AI car A, I et le pôle Sud S sont alignés, donc $AP \geqslant AI$ avec égalité ssi $P = I$.

Exercice 11
(IMO SL 2007 G3) Soit $ABCD$ un trapèze avec les côtés AD et BC parallèles et dont les diagonales se coupent au point P. Le point Q est compris entre les droites (AD) et (BC) de telle sorte que $\widehat{AQD} = \widehat{BQC}$ et de telle sorte que les points P et Q sont situés de part et d'autre de la droite (CD). Montrer que $\widehat{BQP} = \widehat{DAQ}$.

Solution de l'exercice 11



Pour construire la figure, on construit d'abord le point Q et le segment $[BC]$ et on construit le segment $[AD]$ ensuite. Pour transporter l'angle $\widehat{BQC}$, on utilise un point intermédiaire Q' sur le cercle (BCQ). On cherche à utiliser le théorème de l'angle inscrit dans ce cercle, mais pour cela il faut transporter l'angle $\widehat{BQC}$ pour obtenir un angle de même mesure issue du sommet Q'. On trace les parallèles aux droites (QB) et (QC) passant par Q'. Elles forment bien sûr un angle de mesure $\widehat{BQC}$. Elles recoupent le cercle (BQC) en deux points X et Y et d'après le théorème de l'angle inscrit, $\widehat{XQY} = \widehat{XQ'Y} = \widehat{BQC}$. Pour construire le segment $[AD]$, on choisit une parallèle quelconque à la droite (BC) passant par deux points appartenant respectivement aux droites (QX) et (QY) et ces deux points seront les points A et D.

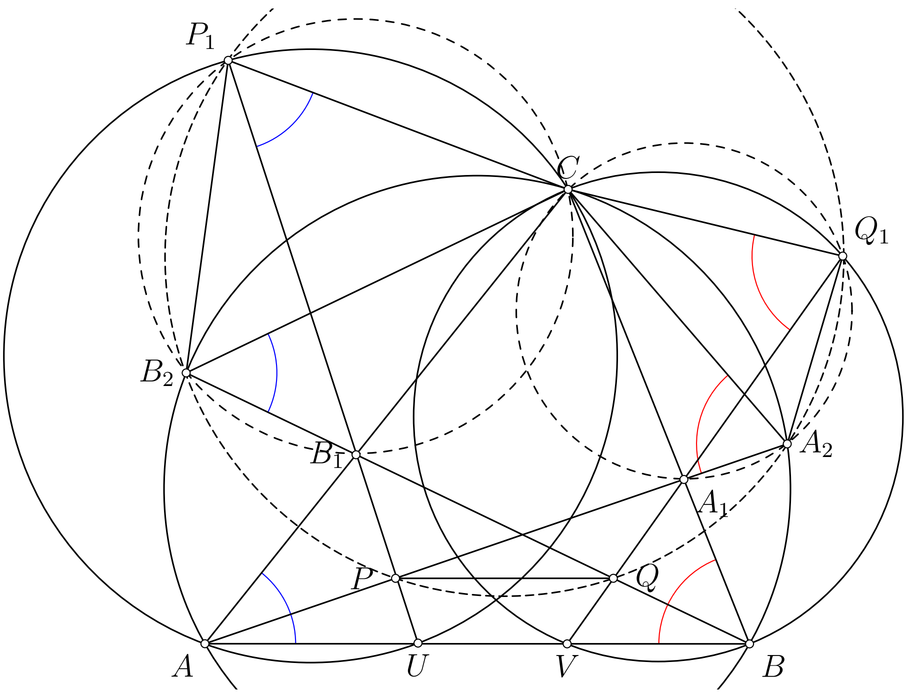
Passons à la résolution de l'exercice. Malheureusement, notre construction ne nous aide pas beaucoup ici. Cependant, en présence d'un trapèze, il est toujours bon de considérer les deux homothéties qui envoyent une base sur la deuxième. Ici, l'homothétie à considérer est tout indiquée : il s'gait de celle de centre P envoyant B sur D et C sur A. Si Q'' est l'image de Q par cette homothétie, les paires de droites $((AQ''), (QC))$ et $((DQ''), (BQ))$ sont deux à deux parallèles. On en déduit que $\widehat{AQ''D} = \widehat{BQC} = \widehat{AQD}$ donc le point Q'' appartient au cerlce (ADQ). On en déduit par le théorème de l'angle inscrit et par le parallélisme des droites (DQ'') et (QB) que

$$\widehat{DAQ} = \widehat{DQ''Q} = \widehat{BQP}$$

comme voulu.

Exercice 12
(IMO 2019 P2) Soit ABC un triangle et soient A_1 et B_1 deux points appartenant respectivement aux côtés $[BC]$ et $[CA]$. Soient P et Q deux points appartenant respectivement aux segments $[AA_1]$ et $[BB_1]$, de telle sorte que les droites (PQ) et (AB) soient parallèles. Soit P_1 un point situé sur la droite (PB_1) tel que B_1 se trouve situé entre les points P et P_1 et tel que $\widehat{PP_1C} = \widehat{BAC}$. Soit Q_1 un point situé sur la droite (QC_1) tel que C_1 se trouve situé entre les points Q et Q_1 et tel que $\widehat{QQ_1C} = \widehat{ABC}$. Montrer que les points P, Q, P_1 et Q_1 sont cocycliques.

Solution de l'exercice 12



On commence par tracer une figure exacte. La condition d'angle nous fait naturellement penser au théorème de l'angle inscrit. A cet effet, on introduit U et V les points d'intersection respectifs des droites (PB_1) et (A_1Q) avec le côté AB.

D'après le théorème de l'angle inscrit, les points P_1, C, U et A sont cocycliques, ce qui nous permet de construire le point P_1. De même on est capable de construire le point Q_1.

Cette construction peut nous inspirer une solution en barycentrique car on peut réécrire la condition de cocyclicité sous une condition autour de l'axe radical des deux cercles introduits et on peut alors tout calculer en temps fini.

On présente ici une solution géométrique.

Penser point intermédiaire. Un point intermédiaire intéressant est le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles dont l'un des angles est concerné par l'hypothèse d'angle.

On introduit donc le point intermédiaire B_2, second point d'intersection des cercles (ABC) et (B_1P_1C). Par théorème de l'angle inscrit : $\widehat{B_1B_2C} = \widehat{B_1P_1C} = \widehat{CAB} = \widehat{BB_2C}$ donc les points B_2, B_1 et B sont alignés.

On introduit de même le point A_2, second point d'intersection des cercles (ABC) et (CA_1Q_1) et on montre de même que le point A_2 est sur la droite (AA_1).

On s'empresse de remarquer, puisqu'on a préalablement tracé le cercle supposé passer par les points P, Q, P_1 et Q_1, que les points A_2 et B_2 appartiennent également à ce cercle. Or on a

$$\widehat{QPA_2} = \widehat{BAA_2} = \widehat{BB_2A_2} = \widehat{QB_2, A_2}$$

donc les points P, Q, A_2 et B_2 sont cocycliques.

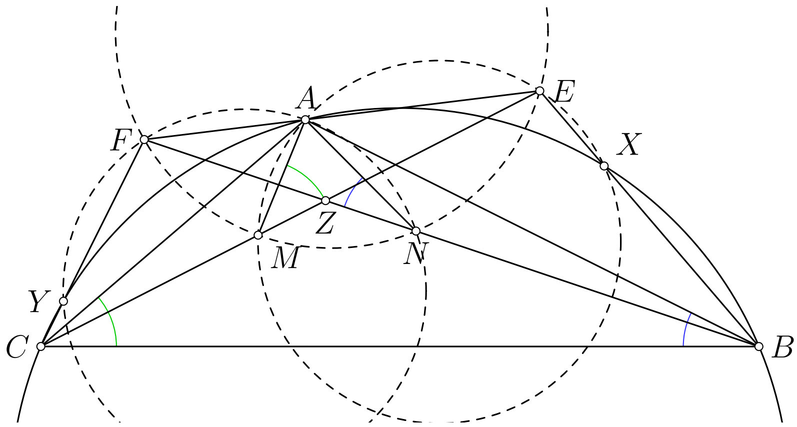
D'autre part,

$$\widehat{B_2P_1P} = \widehat{B_2P_1B_1} = \widehat{B_2CB_1} = \widehat{B_2BA} = \widehat{B_2QP}$$

donc le point P_1 appartient au cercle passant par les points B_2, P, Q et A_2. On montre de même que c'est aussi le cas du point Q_1, ce qui termine la preuve.

Exercice 13
(EGMO 2021 P3) Soit ABC un triangle dont l'angel en A est obtus. Soient E et F les points d'intersection respectifs de la bissectrice extérieur de l'angle $\widehat{BAC}$ avec les hauteurs issues des sommets B et C. Soit M un point du segment $[EC]$ tel que $\widehat{EMA} = \widehat{ACB}$. Soit N un point du segment $[FB]$ tel que $\widehat{ANF} = \widehat{ABC}$. Montrer que les points E, M, N et F sont cocycliques.

Solution de l'exercice 13



Pour tracer le point M, on introduit un point intermédiaire.

Penser point intermédiaire ! Un point intermédiaire intéressant est le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles dont l'un des angles est concerné par l'égalité d'angle.

Ici, on considère donc le point X, second point d'intersection des cercles (ABC) et (AEM). En pratique, on choisit X comme le second point d'intersection de la droite (EB) et du cercle (ABC). Alors on a bien par théorème de l'angle inscrit $\widehat{AXE} = \widehat{ACB}$. On choisit alors le point M comme le point d'intersection de la droite (CE) et du cercle (AXE).

On construit de même le point N à l'aide du point intermédiaire Y défini comme le second point d'intersection du cercle (ABC) avec la droite (CF).

Cette construction nous a apporté deux points et deux cercles. On constate que démontrer que les points E, M, N et F sont cocycliques revient à montrer que le point Z d'intersection des droites (BF) et (CE) appartient à l'axe radical des cercle (AME) et (ANF). En effet, on aura alors $ZM \cdot ZE = ZN \cdot ZF$.

Cette caractérisation est facile à exprimer en coordonnées barycentriques. Puisqu'il y a peu de points, on peut s'essayer au calcul.

On choisit ABC comme repère et a, b et c désignent les longueurs usuelles. On adopte également les notations de Conway pour les quantités S_A, S_B et S_C.

On calcule les coordonnées du point E. Si I_C est le centre du cercle $C-$exinscrit au triangle ABC, le point E est sur la droite (AI_C) donc ses coordonnées sont de la forme $(t, b, -c)$. Le point E appartient à la hauteur issue du sommet B donc ses coordonnées s'écrivent également de la forme (S_C, s, S_A). On en déduit que le point E a pour coordonnées $(cS_C, -bS_A, cS_A)$. De même, le point F a pour coordonnées $(bS_B, bS_A, -cS_A)$.

Le point Z a donc ses coordonnées de la forme $(bS_B, s, -cS_A)$ d'une part et $(cS_C, -bS_A, t)$ d'autre part. Ses coordonnées sont donc $(-bcS_BS_C, b^2S_AS_B, c^2S_AS_C)$.

On calcule les coordonnées du point X. Il appartient à la droite (BE), ses coordonnées sont donc de la forme (S_C, s, S_A). Il appartient au cercle (ABC) donc

$$s(a^2S_A + c^2S_C) = -b^2S_AS_C$$

Les coordonnées du point X sont donc $(S_C(a^2S_A + c^2S_C), -b^2S_AS_C, S_A(a^2S_A + c^2S_C)$. De même, les coordonnées du point Y sont $(S_B(a^2S_A + b^2S_B), S_A(a^2S_A + b^2S_B), -c^2S_AS_B)$.

On calcule à présent les paramètres du cercle (AEX). On sait déjà que $u = 0$ puisque le cercle passe par le point A. Puisque le point X appartient au cercle (ABC), $-a^2y_Xz_X - b^2z_Xx_X - c^2x_Xy_X = 0$ et donc en injectant ses coordonnées dans l'équation du cercle (AEX) on a

$$w(a^2S_A + c^2S_C) = vb^2S_C$$

On injecte à présent les coordonnées du point E dans l'équation de cercle :

$$\begin{aligned} 0 &= a^2bcS_A^2 - b^2c^2S_AS_C + bc^3S_AS_C + (-vbS_A + wcS_A)(\underbrace{cS_C + cS_A}_{cb^2} - bS_A) \\ &= bS_A\left(a^2cS_A - bc^2S_C + c^3S_C + (wc - vb)(cb - S_A)\right) \end{aligned}$$

On injecte la première équation liant v et w :

$$v\left(c\frac{b^2S_C}{a^2S_A + c^2S_C} - b\right)(cb - S_A) = bc^2S_C - c^3S_C - a^2cS_A$$

et après simplification :

$$vb(cb - S_A) = c(a^2S_A + c^2S_C)$$

On pose $V_B = v(bc - S_A) = \dfrac{c}{b}(a^2S_A + c^2S_C)$ et $W_B = (bc - S_A)w = bcS_C$.

On trouve de même $V_C = bcS_B$ et $W_C = \dfrac{b}{c}(a^2S_A + b^2S_B)$.

Il reste alors à vérifier que les coordonnées de Z satisfont

$$(V_B - V_C)y_Z + (W_B - W_C)z_Z = 0$$

Or

$$\begin{aligned} (V_B - V_C)b^2S_B + (W_B - W_C)c^2S_C &= cbS_B(a^2S_A + c^2S_C) - b^3cS_B^2 + c^3bS_C^2 - bcS_C(a^2S_A + b^2S_B) \\ &= cb\left(S_B(\underbrace{a^2S_A + c^2S_C - b^2S_B}_{\frac{1}{2}(b^4-(a^2-c^2)^2)}) - S_C(\underbrace{a^2S_A - b^2S_B + c^2S_C}_{\frac{1}{2}(c^4-(a^2-b^2)^2)})\right) \\ &= 2bcS_A\left(-S_BS_C + S_CS_B\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

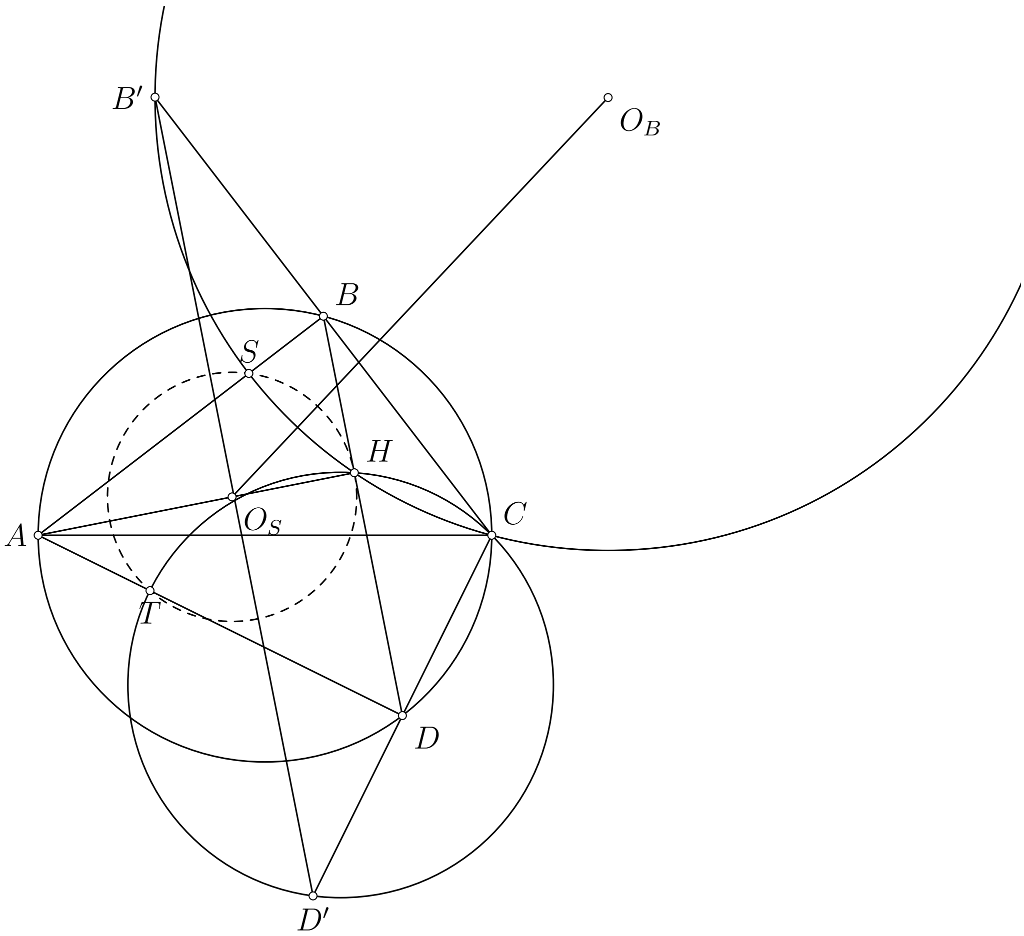
Donc le point Z appartient bien à l'axe radical des cercles (AEX) et (BFY), comme désiré.

Exercice 14
(IMO 2014 P3) Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe tel que $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90°$. Soit H le pied de la hauteur issue du sommet A dans le triangle ABD. Soient S et T appartiennent respectivement aux côtés AB et AD de telle sorte que

$$\widehat{SHC} - \widehat{BSC} = 90° \quad \text{et} \quad \widehat{THC} - \widehat{DTC} = 90°$$

Montrer que la droite (BD) est tangente au cercle circonscrit au triangle HST.

Solution de l'exercice 14



Commençons par chercher comment placer les points S et T. pour cela il y a plusieurs façon de faire (par exemple, on peut regarder une inversion de centre C), la plus simple est de manipuler l'égalité d'angle donnée.

Si on introduit la perpendiculaire à la droite (AD) en T et si X est un point quelconque de cette perpendiculaire dans le même demi-plan délimité par (AD) que C, alors

$$\widehat{XTC} = 90° - \widehat{DTC} = 180° - \widehat{THC}$$

ce qui signifie que (XT) est tangente en T au cercle (THC). Donc la tangente au cercle (THC) est perpendiculaire à la droite (AD), donc la droite (AD) contient le centre du cercle.

Cela signifie que le symétrique D' du point C par rapport au point D appartient au cercle (THC). On peut désormais tracer le point T et de même le point S, en posant B' le symétrique du point C par rapport au point B.

On déduit tout de suite que $AD' = AC = AB'$. Comme les droites $(D'B')$ et (DB) sont parallèles, les droites (AH) et $(D'B')$ sont perpendiculaires, donc la droite (AH) est la médiatrice du segment $[B'D']$, si bien que $HB' = HD'$.

Pour démontrer le problème, il suffit donc de montrer que les médiatrices des segments $[SH]$ et $[TH]$ se coupent sur le segment $[AH]$. On notera dans la suite O_B et O_D les centres respectifs des cercles (CSB') et (CTD'). Si on note O_S le point d'intersection de la médiatrice sur segment $[SH]$ avec le segmant $[AH]$ et que l'on définit de manière similaire le point O_T, il suffit de montrer que

$$\frac{O_SA}{O_SH} = \frac{O_TA}{O_TH}$$

On calcule $\dfrac{O_SA}{O_SH}$. D'après le théorème de la bissectrice, puisque (O_SO_B) est la bissetrice de l'angle $\widehat{SO_BH}$, et d'après la loi des sinus dans le triangle AO_BC, on a

$$\frac{O_SA}{O_SH} = \frac{AO_B}{O_BH} = \frac{AO_B}{O_BC} = \frac{\sin\widehat{ACO_B}}{\sin\widehat{CAB}} = \frac{\sin(\widehat{CAB} + \widehat{CO_BB}))}{\sin\widehat{CAB}} = \cos\widehat{BO_BC} + \frac{\sin\widehat{BO_BC}}{\tan\widehat{CAB}}$$

On calcule chaque terme séparément et notre objectif est de se ramener au quadrilatère $ABCD$ pour montrer que la quantité que l'on calcule est symétrique en les paramètres du quadrliatère $ABCD$, de sorte que les deux rapports seront fatalement égaux.

D'une part, avec le théorème de l'angle au centre, on a

$$\cos\widehat{BO_BC} = \cos(180° - \widehat{B'HC}) = -\cos\widehat{B'HC}$$

Le théorème d'Al-Kashi nous donne alors

$$-\cos\widehat{B'HC} = \frac{B'C^2 - HC^2 - HB'^2}{HC \cdot HB'} = \frac{4BC^2 - HC^2 - HB'^2}{2HC \cdot HB'}$$

Puisque $HB' = HD'$, on est sur la bonne voie. D'autre part,

$$\frac{\sin\widehat{BO_BC}}{\tan\widehat{CAB}} = \frac{AB}{BC} \cdot \sin\widehat{BO_BC} = \frac{AB}{O_BC}$$

En utilisant à nouveau Al-Kashi dans le triangle $B'HO_B$ et en posant $R_B = O_BC = O_BH = O_BB'$:

$$HB'^2 = 2R_B^2 - 2R_B^2\cos 2\widehat{B'CH} = 4R_B^2\sin^2\widehat{BCH}$$

donc avec la loi des sinus dans le triangle BHC :

$$\frac{AB}{O_BC} = 2\frac{AB}{HB'}\sin\widehat{BCH} = 2\frac{AB}{HB'} \cdot \frac{BH}{CH}\sin\widehat{DBC} = 2\frac{AB \cdot BH \cdot \cos\widehat{ABH}}{CH \cdot HB'} = 2\frac{BH^2}{CH \cdot HB'}$$

On somme le tout et on utilise Pythagore :

$$\begin{aligned}
\cos \widehat{BO_BC} + \frac{\sin \widehat{BO_BC}}{\tan \widehat{CAB}} &= \frac{4BC^2 - HC^2 - HB'^2}{2HC \cdot HB'} + 2\frac{BH^2}{CH \cdot HB'} \\
&= \frac{2}{HB' \cdot HC}(BC^2 + BH^2) - \frac{HC^2 + HB'^2}{2HC \cdot HB'} \\
&= \frac{2}{HB' \cdot HC}(AC^2 - AH^2) - \frac{HC^2 + HB'^2}{2HC \cdot HB'}
\end{aligned}$$

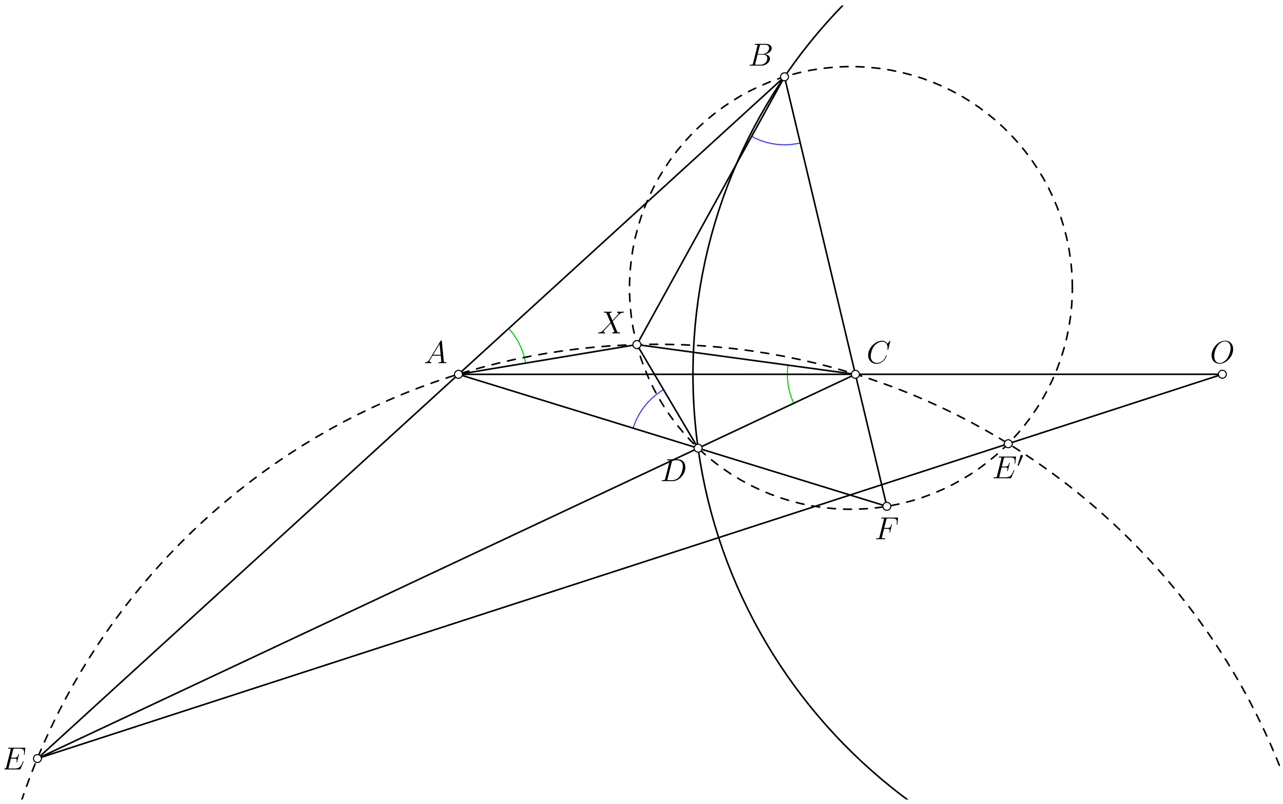
De même on trouvera :

$$\frac{O_TA}{O_TH} = \frac{2}{HD' \cdot HC}(AC^2 - AH^2) - \frac{HC^2 + HD'^2}{2HC \cdot HD'}$$

et comme$HB' = HD'$, on a bien $\frac{O_SA}{O_SH} = \frac{O_TA}{O_TH}$ et le problème est terminé.

Exercice 15
(IMO 2018 P6) Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe tel que $AB \cdot CD = AD \cdot BC$. Soit X un point à l'intérieur du quadrilatère $ABCD$. On suppose que $\widehat{XAB} = \widehat{XCD}$ et $\widehat{XBC} = \widehat{XDA}$. Montrer que $\widehat{AXB} + \widehat{CXD} = 180°$.

Solution de l'exercice 15



L'hypothèse sur le produit des longueurs signifie que le point D est sur le $B-$cercle d'Apollonius du triangle ABC, ce qui nous permet déjà de tracer le quadrilatère $ABCD$.

Avant de placer le point X, on doit en étudier quelques propriétés. Examinons l'égalité $\widehat{XAB} = \widehat{XCD}$. Les deux angles ne couvrent pas le même arc, donc on regarde plutôt $180°$ moins chacun des deux angles. Si E est le point d'intersection des droites (AB) et (CD), l'égalité devient $\widehat{EAX} = 180° - \widehat{XCE}$ donc le point X appartient au cercle (ACE). De même, en notant F le point d'intersection des droites (AD) et (BC), le point X appartient au cercle (BDF). On peut donc tracer le point X !

Passons à la résolution du problème. La présence du $B-$cercle d'Apollonius nous encourage à effectuer une inversion. On pose donc O le centre du $B-$cercle d'Apollonius relatif au triangle ABC et on note i l'inversion de centre O de rayon OB. L'inversion fixe B et D et échange A et C. Le point $E = (AB) \cap (CD)$ est envoyé sur le point $E' = (OAB) \cap (OCD)$. On a

$$\widehat{AE'C} = \widehat{AE'O} - \widehat{CE'O} = \widehat{OAE} - \widehat{OCE} = \widehat{CEA}$$

Le point E' appartient donc au cercle (ACE).

On calcule désormais l'angle $\widehat{AXB}$.

$$\begin{aligned}
\widehat{AXB} &= 360° - \widehat{BXE'} - \widehat{AXE'} \\
&= 180° - \widehat{BDE'} + \widehat{AEO} \\
&= 180° - \widehat{BDO} - \widehat{ODE'} + \widehat{AEO} \\
&= 180° - \widehat{BDO} - \widehat{OED} + \widehat{AEO} \\
&= 180° - \widehat{BDO} + \widehat{AEC}
\end{aligned}$$

On calcule désormais $\widehat{CXD}$.

$$\begin{aligned}
\widehat{CXD} &= \widehat{CXE'} + \widehat{E'XD} \\
&= \widehat{CEE'} + \widehat{DBE'} \\
&= \widehat{DEE'} + \widehat{DBO} - \widehat{E'BO} \\
&= \widehat{DBO} + \widehat{DEO} - \widehat{BEO} \\
&= \widehat{DBO} - \widehat{AEC}
\end{aligned}$$

et on a bien $\widehat{AXB} + \widehat{CXD} = 180°$.

2 Équations fonctionnelles (Rémi)

Le but de ce TD est d'essayer de voir dans quelle mesure le fait de deviner les solutions d'une équation fonctionnelle peut aider à la résoudre. Toutes les solutions des exercices sont rédigées dans ce sens. De manière plus générale, le but est d'apprendre à prendre du recul sur les équations fonctionnelles, d'essayer de mieux visualiser les équations et de voir ce que l'on peut en déduire sans se lancer dans des substitutions à tout va. Il faut essayer de comprendre comment l'exercice a été inventé : avoir l'intuition de quels sont les termes qui vont poser problème, comment interpréter la présence d'une symétrie etc. Tous les exercices ci-dessous sont difficiles mais requièrent très peu de substitutions pour être résolus.

Exercices

Exercice 1
(IMO 2022, P2) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, telles que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, il existe exactement un $y \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$xf(y) + yf(x) \leqslant 2$$

Exercice 2
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(0) = 0$, et pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$(x-y)\left(f(f(x)^2) - f(f(y)^2)\right) = (f(x)+f(y))\,(f(x)-f(y))^2$$

Exercice 3
(BMO 2007) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(f(x)+y) = f(f(x)-y) + 4f(x)y$$

Exercice 4
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ telles que $f(p) > 0$ pour tout p premier et telles que pour tout p premier et pout tout $x \in \mathbb{Z}$:

$$p \mid (f(x)+f(p))^{f(p)} - x$$

Exercice 5
(Suisse 2011) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ telles que, pour tous réels positifs a, b, c, d vérifiant $abcd = 1$,

$$(f(a)+f(b))(f(c)+f(d)) = (a+b)(c+d)$$

Exercice 6
(BMO SL 2021) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, telles que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et tout $y \in \mathbb{R}$,

$$f(x^2+y) \geqslant \left(\frac{1}{x}+1\right) f(y)$$

Exercice 7
(A4 2007) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ telles que, pour tous réels strictement positifs x, y,

$$f(x+f(y)) = f(x+y) + f(y)$$

Solutions

Solution de l'exercice 1
Cet exercice est là car c'est l'exemple qui a inspiré ce TD. Il a été corrigé par exemple sur la chaîne YouTube de la POFM : https ://www.youtube.com/watch ?v=G4z6g3P8abQ.

Solution de l'exercice 2
On devine une identité remarquable déguisée, donc on se doute que les solutions seront les fonctions linéaires. On pose $y = 0$ pour trouver $f(f(x)^2) = f(x)^3$. Cela va permettre de linéariser l'équation et de la rendre plus jolie. On peut réécrire $(x-y)\,(f(x)^3 - f(y)^3) = (f(x)+f(y))\,(f(x)-f(y))^2$. A ce stade, on doit être tentés de développer puisque des termes vont s'éliminer. On trouve après simplification

$$xyf(x)f(y)(f(x)+f(y)) = y^2 f(x)^3 + x^2 f(y)^3. \quad (\star)$$

On constate que cette équation est polynomiale en $f(x)$, donc on fixe $y = 1$ pour ne garder que la variable x et on appelle $f(1) = c$. On obtient en réordonnant les termes :

$$f(x)^3 - cxf(x)^2 - c^2xf(x) + c^3x^2 = 0.$$

Or on veut que $f(x) = cx$ soit solution de notre équation fonctionnelle, donc on peut probablement factoriser par $f(x) - cx$. En effet, cela donne $(f(x) - cx)(f(x)^2 - c^2x) = 0$. Pour $x < 0$, on a $f(x)^2 - c^2x > 0$, ce terme ne peut pas être nul, donc $f(x) = cx$. La meilleure manière de conclure est en montrant l'imparité de la fonction, ce que l'on fait en remplaçant y par $-x$ dans l'équation $(\star)$. En effet, en factorisant par $(f(x) + f(-x))$ et en regroupant les termes, on trouve $(f(x) + f(-x))^3 = 0$, donc $f(x) = -f(-x)$. Les solutions sont donc bien les fonctions linéaires, qui conviennent réciproquement.

Solution de l'exercice 3

Avec un peu de réflexion et d'expérience, on peut reconnaître quelque chose qui ressemble à une nouvelle identité remarquable déguisée, le $4f(x)y$ correspondant à deux fois le double produit. Cela marche en effet bien si f est la fonction carré. Un peu de tâtonnement laisse deviner que les solutions sont $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto 0$. Cela nous donne envie de poser la fonction auxiliaire $g(x) = f(x) - x^2$ pour éliminer les termes parasites. En remplaçant dans l'équation initiale, on trouve simplement $g(g(x) + x^2 + y) = g(g(x) + x^2 - y)$.

Ici, il faut prendre le temps de bien interpréter : cette équation nous indique que la droite d'équation $x = g(z) + z^2$ est un axe de symétrie vertical de g pour toute valeur de z. On se rappelle que $g(z) + z^2 = f(z)$, donc si f n'est pas constante, alors $g(z) + z^2$ prend au moins deux valeurs différentes. La composée de deux symétries axiales d'axes parallèles est une translation, donc le graphe de g est invariant par translation, autrement dit g est périodique. Pour tout y, on a plus précisément $g(y) = g(y + (f(x) - f(z))$, en composant les symétries d'axes $f(x)$ et $f(z)$, pour n'importe quels x et z. Prenons le temps d'apprécier toutes les informations obtenues sans la moindre substitution pour l'instant !

Procédons à notre seule substitution nécessaire : soit T la période de g, on pose $x = z + T$. Alors $f(x) - f(z) = g(z + T) + (z + T)^2 - g(z) - z^2 = 2Tz + T^2$. On voit donc que g est périodique de période n'importe quel réel, puisqu'on peut choisir z arbitrairement. On peut par exemple choisir formellement z tel que $2Tz + T^2 = -y$ et on aura alors $g(y) = g(0)$ pour tout y, donc g est bien constante. En réinjectant, on trouve que la constante doit être nulle, donc les solutions sont bien celles trouvées au début.

Solution de l'exercice 4

On prend $x = p$ premier impair, qui donne $p \mid f(p)$ pour tout p premier impair. En particulier, $x = 0$ donne $p \mid f(0)$ pour tout p premier impair, donc $f(0) = 0$. Avec $x = 0$ et $p = 2$, on obtient $2 \mid f(2)$.

Notre intuition est que la solution sera sans doute l'identité, donc que les seuls facteurs premiers de $f(n)$ sont ceux de n. Montrons maintenant que $f(q)$ n'a que q comme facteur premier. Soit p un facteur de $f(q)$, prenons $x = q$. Cela donne : $p \mid (f(p) + f(q))^{f(p)} - q$, donc $p \mid q$. Ce qui est évidemment impossible. Donc $f(q) = q^\alpha$.

On soupçonne que f est l'identité, donc on va essayer de montrer que $f(x) - x$ a une infinité de diviseurs. On a donc en particulier $f(p) \equiv 0[p]$ et $f(x)^{f(p)} \equiv f(x)[p]$ par petit Fermat, donc : $p \mid (f(x) + f(p))^{f(p)} - x$, donc $p \mid f(x)^{f(p)} - x$, d'où $p \mid f(x) - x$. Donc $f(x) - x$ a une infinité de diviseurs et vaut 0.

Solution de l'exercice 5

Une fois encore, on cherche à deviner les solutions : on trouve facilement l'identité, mais la

condition $abcd = 1$ nous pousse à chercher un peu plus loin. En effet, comme les substitutions possibles seront d'exprimer une variable en fonction de l'inverse des autres, on pense à la fonction inverse, qui est bien solution aussi. Montrons que $x \mapsto x$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ sont les seules solutions.
On va noter (a, b, c, d) les substitutions que l'on fait dans l'équation initiale. $(x, \frac{1}{x}, 1, 1)$ donne $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \frac{1}{x}$. D'autre part, $(x, 1, \frac{1}{x}, 1)$ donne après simplification grâce à l'équation précédente $f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = x \cdot \frac{1}{x} = 1$.
Les relations de Viète nous indiquent donc que $f(x)$ et $f\left(\frac{1}{x}\right)$ sont les racines du polynôme $X^2 - \left(x + \frac{1}{x}\right) X + 1$. En résolvant, on trouve que $f(x) = x$ ou $f(x) = \frac{1}{x}$. Il reste à montrer que l'on ne peut pas avoir de solutions multigraphes. On suppose donc qu'il existe a et b tels que $f(a) = a$ et $f(b) = \frac{1}{b}$. La dernière équation nous indique que $f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a}$ et $f\left(\frac{1}{b}\right) = b$. On fait alors la substitution $(a, b, \frac{1}{a}, \frac{1}{b})$, qui se simplifie en $(a-1)(b-1) = 0$, donc $a = 1$ ou $b = 1$. Mais pour ces valeurs on a de toute façon $a = \frac{1}{a}$ et $b = \frac{1}{b}$, donc il n'existe effectivement pas de solutions multigraphes.

Solution de l'exercice 6
En tâtonnant un peu avec x très petit, on se rend compte que le $\frac{1}{x}$ pose problème, les valeurs juste après $f(y)$ doivent être beaucoup trop grandes. On devine donc que la seule solution est probablement la fonction nulle (qui convient bien), montrons-le. On suppose par l'absurde qu'il existe y_0 tel que $f(y_0) \neq 0$. La première étape est de poser $x = -2$ et $y = y_0$ ce qui donne $f(y_0 + 4) \geqslant -f(y_0) > 0$, donc quitte à remplacer y_0 par $y_0 + 4$ on peut supposer $f(y_0) > 0$.
On fixe un $\varepsilon > 0$. On a $f(y_0^2 + \varepsilon^2) \geqslant \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) f(y_0)$. On itère cette relation par récurrence, et on a pour $n \in \mathbb{N}$, $f(y_0^2 + n\varepsilon^2) \geqslant \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)^n f(y_0)$. Il ne reste plus qu'à choisir un ε intelligent pour aboutir à une absurdité : on choisit $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{n}}$, ce qui donne $f(y_0^2 + 1) \geqslant \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n f(y_0)$. Le membre de gauche est donc supérieur à une quantité non bornée, d'où l'absurdité.

3 Inégalités et polynômes (Antoine)

Inégalités

Exercice 1
(A3 IMO 1993)
Montrer que pour tous $a, b, c, d > 0$,

$$\sum_{cyc} \frac{a}{b + 2c + 3d} \geq \frac{2}{3}.$$

Solution de l'exercice 1
Par mauvais élèves, on a

$$\sum_{cyc} \frac{a}{b+2c+3d} = \sum_{cyc} \frac{a^2}{ab+2ac+3ad} \geq \frac{\left(\sum_{cyc} a\right)^2}{\sum_{cyc} ab+2ac+3ad} = \frac{\sum_{cyc} a^2 + 2\sum_{sym} ab}{4\sum_{sym} ab} \geq \frac{1}{6} + \frac{1}{2}.$$

Exercice 2
(A1 IMO 1996)

Soient $a, b, c > 0$ tels que $abc = 1$. Montrer que

$$\sum_{cyc} \frac{ab}{ab + a^5 + b^5} \leq 1$$

Solution de l'exercice 2
Par IAG, on a

$$\sum_{cyc} \frac{ab}{ab + a^5 + b^5} \leq \sum_{cyc} \frac{ab}{ab + a^2b^2(a+b)} = \sum_{cyc} \frac{c}{c+a+b} = 1$$

Exercice 3
(A3 IMO 1998)
Soient $a, b, c > 0$ tels que $abc = 1$. Montrer que

$$\sum_{cyc} \frac{a^3}{(1+b)(1+c)} \geq \frac{3}{4}$$

Solution de l'exercice 3
https://artofproblemsolving.com/community/c6h18488p124421

Exercice 4
(A7 IMO 2018)
Trouver la valeur maximale de

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b+7}} + \sqrt[3]{\frac{b}{c+7}} + \sqrt[3]{\frac{c}{d+7}} + \sqrt[3]{\frac{d}{a+7}}$$

Pour $a, b, c, d \geq 0$ tels que $a + b + c + d = 100$

Solution de l'exercice 4
Voir https://artofproblemsolving.com/community/c6h1876747p12752777

Polynômes en général

Exercice 5
(Iran MO 2015, 3rd round, P4)
Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ tel que pour tout $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| = 1$, $P(z)$ soit réel.
Montrer que P est constant.

Solution de l'exercice 5
Pour z tel que $|z| = 1$, on a

$$\sum a_i z^i = P(z) = \overline{P(z)} = \sum \overline{a_i}\, \overline{z}^i = \sum \overline{a_i} z^{-i}.$$

Ainsi,

$$z^n \sum a_i z^i = \sum \overline{a_i} z^{n-i}.$$

Cette égalité est vraie sur une infinité de points, donc c'est une égalité polynomiale.
Par ailleurs, le degré d'un côté est le double du degré de l'autre côté, donc ces deux degrés sont nuls : le polynôme est constant.

Exercice 6
(A1 2017)
Soient $a_1, \dots a_n, k, M$ des entiers tels que $\sum \frac{1}{a_i} = k$ et $\prod a_i = M$. Si $M > 1$, montrer que le polynôme $P(x) = M(x+1)^k - \prod(X + a_i)$ n'a pas de racines réelles positives.

Solution de l'exercice 6
Voir https://artofproblemsolving.com/community/c6h17332p118702.

Exercice 7
(A3 2002)
Soit P un polynôme de degré 3 à coefficients entiers. Supposons que l'équation $xP(x) = yP(y)$ admette une infinité de solutions pour $x \neq y$ entiers. Montrer que P admet une racine entière.

Solution de l'exercice 7
Voir https://artofproblemsolving.com/community/c6h17332p118702.

Irréductibilité

Rappel de techniques importantes :

— Regarder les racines, en particulier, le

— Théorème de la racine rationnelle.

— Tout polynôme réel de degré impair admet une racine réelle (par TVI).

— Lemme de Gauss : Un polynôme unitaire à coefficients entiers est irréductible dans $\mathbf{Z}[X]$ si et seulement si il l'est dans $\mathbf{Q}[X]$.

— Arithmétique des polynômes : PGCD, Bézout, algorithme d'Euclide, décomposition en facteurs premiers, modulos de polynômes...

— Pour montrer qu'un polynôme est irréductible :
Supposer que le polynôme est réductible, et réduire l'égalité polynomiale $P = QR$ modulo un nombre (souvent premier, c'est plus pratique), et en déduire une contradiction d'une manière ou d'une autre.
Exemple : Eisenstein.

— Polynôme minimal : Soit $z \in \mathbf{C}$. L'ensemble $I_z = \{P \in \mathbf{K}[X], P(z) = 0\}$ s'écrit sous la forme $\mu_z \mathbf{K}[X]$ pour un certain $\mu_z \in \mathbf{K}[X]$, et où $\mathbf{K}$ représente $\mathbf{Q}, \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ (pourquoi ?).
Souvent, seul $\mathbf{Q}$ représente un intérêt.
Dans la formule précédente, on peut choisir μ_z unitaire, et c'est souvent fait. On appelle alors μ_z le polynôme minimal de z.

— Dériver ?

— Adapt. Improvise. Overcome.

Exercice 8
Montrer que $X^n + 3X^{n-1} + 5$ est irréductible sur $\mathbf{Z}$ pour tout $n \geq 2$.

Solution de l'exercice 8
Supposons par l'absurde que $P = QR$ avec Q, R à coefficients entiers.
On passe modulo 5 , et on trouve $X^{n-1}(X+3) \equiv QR$. Comme X et $X+3$ sont irréductibles dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[X]$ car de degré 1, donc il y a un des deux facteurs, spdg Q, qui a le facteur $X+3$, et on a donc $Q \equiv \alpha(X+3)X^k$ et $R = \alpha^{-1}X^{n-k-1}$.
Si $k \neq 0$, alors $Q(0) \equiv 0 \pmod 5$. De même, si $k \neq n-1$, $R(0) \equiv 0 \pmod 5$. Ainsi, si $k \neq 0, n-1$, alors $25 \mid Q(0)R(0) = P(0) = 5$, contradiction. Si $k = 0, n-1$, alors comme P est unitaire, Q et R sont également unitaires, donc le degré de la réduction de $Q \mod 5$ est aussi le degré de Q. Finalement, l'un des deux facteurs R ou Q est de degré $n-1$, donc l'autre est de degré 1. Autrement dit, P admet une racine entière. Celle-ci doit diviser 5, et on teste à la main que $-5, -1, 1, 5$ ne sont jamais racines de P. Ainsi, P est bien irréductible.

Exercice 9
Soit P un polynôme à coefficients entiers tel que toutes ses racines sont de module strictement plus petit que 1, sauf une qui est de module plus grand que 1, et $P(0) \neq 0$. (Cette racine est ce qu'on appelle un nombre de Pisot).
Montrer que P est irréductible.

Solution de l'exercice 9
Supposons par l'absurde que $P = QR$. Alors un des deux polynômes a toutes ses racines de module strictement plus petit que 1, mettons R. Comme $|R(0)|$ est le produit du module de ses racines, on a $|R(0)| < 1$, donc $R(0) = 0$, donc $P(0) = 0$, contradiction.

Exercice 10
(A1 IMO 2005)
Trouver tous les couples d'entiers (a, b) tels qu'il existe un polynôme $P \in \mathbf{Z}[X]$ tel que $(X^2 + aX + b)P$ soit unitaire et à coefficients dans $\{\pm 1\}$.

Solution de l'exercice 10
Soit r une racine de $Q = (X^2 + aX + b)P$. Supposons $|r| \geq 2$. Alors $r^n = \sum c_i r^i$ avec $c_i \in \{\pm 1\}$. Ainsi par inégalité triangulaire,

$$|r^n| = \left| \sum_{i=0}^{n-1} c_i r^i \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{|c_i|}_{1} |r|^i = \frac{|r|^n - 1}{|r| - 1} \leq |r|^n - 1$$

car $|r| - 1 \geq 1$, ce qui constitue une contradiction.
Ainsi, toutes les racines de Q sont de module strictement plus petit que 2, cela vaut donc également pour les racines de $X^2 + aX + b$.
En remarquant de plus que $b \mid c_0 = \pm 1$, donc $b = \pm 1$. En faisant une disjonction de cas selon $b = 1$ ou $b = -1$ et en utilisant la formule explicite pour les racines d'un degré 2, on obtient un nombre fini de valeurs de a possibles

Exercice 11
(A2 IMOC 2018)
Soient $P_1, \ldots P_n$ des polynômes non constants à coefficients entiers. Existe-t-il toujours $Q \in \mathbf{Z}[X]$ tel que pour tout i, $P_i \circ Q$ soit réductible ?

Solutions

Solution de l'exercice 11
Remarquons que si $R_i = \mathrm{pgcd}(P_i, P_i \circ Q) \neq 1$, comme $\deg R_i \leq \deg P_i < \deg P_i \circ Q$, et que le pgcd de deux polynômes à coefficients entiers et encore à coefficients entiers (regarder l'algorithme d'Euclide), $P_i \circ Q$ n'est pas irréductible.
Alors, en utilisant la remarque sur le polynôme minimal faite dans les techniques importantes, si P_i et $P_i \circ Q$ ont une racine commune r, μ_r divise les deux polynômes et le pgcd est non trivial.
On pose alors

$$Q = \left(\prod_{i=1}^{n} P_i \right) + X,$$

de sorte qu'on ait, pour une racine r de P_i, $Q(r) = 0 + r = r$, donc $P_i(r) = P_i(Q(r)) = 0$, ce qui conclut.

Exercice 12
Soient p, q des nombres premiers impairs distincts, et $n \geq 5$.
Montrer que $P = X^n + (p+q)X^{n-2} - pq$ est irréductible sur $\mathbf{Z}[X]$.

Solution de l'exercice 12
Supposons que ce n'est pas le cas, mettons $P = QR$.
On fait comme dans la preuve d'Eisenstein.
En réduisant modulo p, on obtient $QR = X^{n-2}(X^2+q)$. On en a pas grand chose à faire de savoir si $X^2 + q$ est irréductible dans $\mathbf{F}_p$, tout ce qu'on a besoin de savoir est que $Q = X^a \cdot Q_0$, et $R = X^b \cdot R_0$, avec Q_0 et R_0 des polynômes, possiblement constants, à coefficients dans $[\![0, p-1]\!]$.
Ainsi, dans $\mathbf{Z}$, $Q = X^a Q_0 + pQ_1$ et $R = X^b R_0 + pR_1$, avec Q_1 et R_1 à coefficients entiers. Mais si $a \geq 1$ et $b \geq 1$, on aurait $p \mid Q(0)$ et $p \mid R(0)$, donc $p^2 \mid P(0) = pq$, contradiction. Ainsi, $a = 0$ ou $b = 0$.
Dans tous les cas, l'un des deux a un degré plus petit que 2, (rappelons que $a + b = n - 2$) mettons Q spdg.
Si $\deg Q = 0$, pas de problème.
Si $\deg Q = 1$, on vérifie aisément que $-pq, -q, -p, -1, 1, p, q, pq$ ne sont pas racines de P.
Ainsi $\deg Q = 2$, soit $\deg R_0 = 0$: $R = cX^{n-2}$ dans $\mathbf{F}_p$. Par ailleurs P est unitaire donc Q et R sont aussi unitaires : $c = 1$.
Comme $n \geq 5$, $\deg R \neq \deg Q$, donc lorsqu'on refait le même argument en remplaçant p par q, le polynôme qui doit avoir un coefficient non nul modulo q doit lui aussi avoir un degré plus petit que 2 : c'est encore Q.
Ainsi, $R \equiv X^{n-2} \pmod{pq}$, et comme $P \equiv X^{n-2}(X^2 + p + q)$ et $P \equiv X^{n-2}Q$, on obtient finalement $Q \equiv X^2 + p + q \pmod{pq}$.
Mais comme $pq \mid R(0)$, on doit avoir $Q(0) = \pm 1$, donc $\pm 1 \equiv p + q \pmod{pq}$, ce qui est impossible car $p + q + 1 < pq$ puisque $p, q \geq 3$, d'où la contradiction tant attendue.

Exercice 13
(Romania TST 1998)
Montrer que pour tout n, le polynôme $P(X) = (X^2+X)^{2^n} + 1$ est irréductible sur $\mathbf{Z}$.

Solution de l'exercice 13
Voir https://artofproblemsolving.com/community/c6h403517

4 Lemmes classiques en géométrie (Baptiste)

– Enoncé des exercices –

L'auteur de ce cours a changé l'ordre des exercices par rapport à celui du cours, l'ordre actuel est une tentative de classement par ordre de difficulté.

Exercice 1
Soit ABC un triangle, M le milieu du côté $[BC]$ et H l'orthocentre du triangle. La médiatrice de $[BC]$ coupe les droites (AB) et (AC) en les points P et Q. On note N le milieu du segment $[PQ]$. Montrer que les droites (AN) et (HM) s'intersectent un un point du cercle circonscrit du triangle ABC.

Exercice 2
Soit ABC un triangle dont les bissectrices sont (AD), (BE) et (CF) et I le centre de son cercle inscrit. La médiatrice de $[AD]$ coupe (BE) et (CF) en X et Y respectivement. Montrer que le quadrilatère $AXYI$ est cyclique.

Exercice 3
Soit $ABCD$ un trapèze ($(AB)//(CD)$, $AB > CD$) est circonscrit dans un cercle de centre I. On note M et N les points de tangence du cercle inscrit du triangle ABC avec (AC) et (AB). Montrer que les points M, N et I sont alignés.

Exercice 4
Soit ABC un triangle, on note A_1 et A_2 (resp. B_1 et B_2 ; C_1 et C_2) des points sur la droite (BC) (resp. (CA) et (AB)) de telle sorte que $\widehat{A_1AB} = \widehat{A_2AC}$ (resp. $\widehat{B_1BC} = \widehat{B_2BA}$ et $\widehat{C_1CA} = \widehat{C_2CB}$). Montrer que A_1, B_1 et C_1 sont alignés si et seulement si A_2, B_2 et C_2 sont alignés.

Exercice 5
Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle Γ. On choisit un point P dans le triangle ABC. On note A', B' et C' les intersections respectives des droites (AP), (BP) et (CP) avec (BC), (CA) et (AB). On note ω_A (resp. ω_B et ω_C) le point de tangence intérieure du cercle tangent à (BC) en A' (resp. (CA) en B' et (AB) en C') et intérieurement à Γ en A'' (resp. B'' et C'') sur l'arc $\widehat{BC}$ (resp. $\widehat{CA}$ et $\widehat{AB}$) ne contenant pas A (resp. B et C). Montrer que les droites (AA''), (BB'') et (CC'') sont concourantes.

Exercice 6
Soit ABC un triangle, O le centre du cercle circonscrit, on note D le pied de la bissectrice issue de A. On note également O_1 et O_2 les centres des cercles circonscrits aux triangles ABD et ACD. Montrer que $OO_1 = OO_2$.

Exercice 7
Soit ABC un triangle, on note D et E les pieds des bissectrices issues de B et C. Soit P un point sur la droite (DE) de telle sorte que P se trouve dans le cône formé par les demi-droites

$[BA)$ et $[BC)$ et de l'autre côté de B de la droite (AC). Montrer que la somme des distances de P aux côtés (AC) et (BC) vaut la distance de P à (AB).

Exercice 8
Soit $ABCD$ un cerf-volant de telle sorte que (AC) soit l'axe de symétrie et $\widehat{ABC} = 90$. On dispose de deux points E et F sur les côtés (DC) et (BC) de telle sorte que $(AF) \perp (BE)$. Montrer que $(AE) \perp (DF)$.

Exercice 9
Soit ABC et $A'B'C'$ deux triangles et P un point. On suppose que (PA) (resp. (PB) et (PC)) est perpendiculaire à $(B'C')$ (resp. $(C'A')$ et $(A'B')$). Montrer que les perpendiculaires à A', B' et C' respectivement à (BC), (CA) et (AB) sont concourantes.

Exercice 10
Soit Γ_1 et Γ_2 deux cercles qui se coupent en A et B, on note P et Q les points de tangence respectifs d'une tangente commune au cercle Γ_1 et Γ_2. On note X l'intersection des tangentes en P et Q au cercle circonscrit du triangle PQA. On note également C le symétrique de B par rapport à la droite (PQ). Montrer que les points X, C et B sont alignés.

Exercice 11
Soit $ABCD$ un quadrilatère inscrit dans un cercle. On note X l'intersection des diagonales (AC) et (BD), on note P et Q les projections orthogonales de X sur les droites (AD) et (BC). On note de plus M et N les milieux des segments $[AB]$ et $[CD]$. Montrer que les droites (MN) et (PQ) sont perpendiculaires.

Exercice 12
Soit $ABCD$ un quadrilatère, on note E et F les intersections des droites (AD) et (BC) ainsi que (AB) et (DC). Montrer que les points A, B, C et D sont cocycliques si et seulement si

$$AE \cdot ED + FA \cdot FB = EF^2.$$

Exercice 13
Soit $A_1A_2 \dots A_n$ un n-gone régulier. Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ on note X_i l'intersection des droites $(A_{i-2}A_{i-1})$ et (A_iA_{i+1}). On suppose que les points X_i sont tous à l'intérieur d'un cercle Γ. On note ω_i le cercle tangent aux demi-droites $[A_{i-1}X_i)$ et $[A_iX_i)$ au-delà de X_i et intérieurement tangent à Γ en T_i. On note Ω_i le cercle tangent aux demi-droites $[A_{i-1}X_i)$ et $[A_iX_i)$ au-delà de X_i et extérieurement tangent à Γ en S_i.
a) Montrer que les n droites (X_iT_i) sont concourantes.
b) Montrer que les n droites (X_iS_i) sont concourantes.

Exercice 14
Soit $ABCD$ un quadrilatère circonscriptible. On prend (g) une droite passant par A, elle recoupe l'intérieur du segment $[BC]$ en M et (DC) en N. On note I_1, I_2 et I_3 les centres des cercles inscrits des triangles ABM, MCN et ADN. Montrer que l'orthocentre du triangle $I_1I_2I_3$ est sur la droite (g).

Exercice 15
Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle Γ et d'orthocentre H. Soit P un point du plan,

on note P_A (resp. P_B et P_C) les intersections de (AP_A) (resp. (BP_B) et (CP_B)) avec Γ. On note alors P'_A (resp. P'_B et P'_C) le symétrique de P_A (resp. P_B et P_C) par rapport à (BC) (resp. (CA) et (AB)). Montrer que les points P'_A, P'_B et P'_C et H sont cocycliques.

Exercice 16
Soit ABC un triangle, on note H_B et H_C les pieds des hauteurs issues de B et C. Soit X un point quelconque sur la droite (CH_C), la droite (BX) coupe une deuxième fois le cercle circonscrit du triangle ABC en Y, la droite (CY) intersecte le droite (BH_B) en Z. Montrer que le milieu du segment $[XZ]$ est sur la droite (H_BH_C).

Exercice 17
Soit $ABCD$ un quadrilatère inscrit dans un cercle Γ. On note P l'intersection des droites (AB) et (CD). On note (d) la droite passant par P et parallèle à la tangente à Γ passant par D. On note de plus U et V les intersections respectives avec (d) des tangentes en A et B. Montrer que Γ et le cercle circonscrit de UVC sont tangents.

Exercice 18
Soit ABC un triangle. Notons X l'intersection des trisectrices issues de B et C les plus proches du segment $[BC]$. On note de même Y et Z les autres intersections des trisectrices. Montrer que le triangle XYZ est équilatéral.

Exercice 19
Soit $ABCD$ un quadrilatère tel que les demi-droites $[AB)$ et $[DC)$ se coupent en E. $[BC)$ et $[AD)$ se coupent en F. On note X_1, X_2, X_3 et X_4 les points de tangences du cercle inscrit de EBC, du cercle inscrit de FCD, du cercle E-exinscrit de EAD, du cercle F-exinscrit de FAB sur (BC), (CD), (DA) et (AB) respectivement. Montrer que les points X_1, X_3 et E sont alignés si et seulement si les points X_2, X_4 et F sont alignés.

Exercice 20
Soit ABC un triangle, H son orthocentre, M le milieu de $[BC]$ et F le pied de la hauteur issue de A. On note D le point du cercle ABC tel que $\widehat{HDA} = 90$. On note K le point du cercle ABC tel que $\widehat{DKH} = 90$. Montrer que les cercles DKH et FKM sont tangents en K.

Exercice 21
Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle Γ et N le milieu de l'arc $\widehat{BC}$ contenant A. On note M le milieu du segment $[BC]$. On note de plus I_1 (resp. I_2) le centre du cercle inscrit du triangle BAM (resp. CAM). Montrer que les points N, A, I_1 et I_2 sont cocycliques.

Exercice 22
Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle Γ, on note D et E des points respectivement sur les arcs $\widehat{BA}$ ne contenant pas C et $\widehat{AC}$ ne contenant pas B de telle sorte que $(DE)//(BC)$. On note ω_B (resp. ω_C) un cercle tangent intérieurement à Γ sur l'arc $\widehat{AD}$ ne contenant pas B (resp. $\widehat{AE}$ ne contenant pas C), à (AB) (resp. (AC)) et (DE). On note X et Y les points de tangence respectifs de ω_B et ω_C avec (AB) et (AC). Montrer que la droite (XY) est parallèle à la droite (BC).

Exercice 23
Un quadrilatère $ABCD$ admet un cercle inscrit de centre I. Soit I_a, I_b, I_c et I_d les centres des

cercles inscrits de DAB, ABC, BCD et CDA respectivement. On suppose que les tangentes commune extérieurs des cercles AI_bI_d et CI_bI_d se coupent en X, et les tangentes communes extérieures de BI_aI_c et DI_aI_c en Y. Montrer que $\widehat{XIY} = 90$.

Exercice 24
Soit ABC un triangle et Ω son cercle circonscrit. on prend une tangente (t) à Ω. On note (t_a), (t_b) et (t_c) les symétriques de (t) par rapport à BC, CA et AB. Montrer que le cercle circonscrit du triangle formé par (t_a), (t_b) et (t_c) est tangent à Ω.

Exercice 25
Soit ABC un triangle, on note D, E et F les points de tangence du cercle inscrit avec les côtés (BC), (CA) et (AB). On note X (resp. Y et Z) un point dans le triangle ABC sur la perpendiculaire à (BC) (resp. (CA) et (AB)) passant par D (resp. E et F) de telle sorte que $DX = EY = DZ$. Montrer que les droites (AX), (BY) et (CZ) sont concourantes.

Exercice 26
Soit ABC un triangle. On place A_1 et A_2 (resp. B_1 et B_2 ; C_1 et C_2) sur le segment $[BC]$ (resp. $[CA]$ et $[AB]$) de telle sorte que $BA_1 = A_2C$ (resp. $CB_1 = B_2A$ et $AC_1 = C_2B$). On note X (resp. Y et Z) l'intersection des droites (BB_1) et (CC_2) (resp. (CC_1) et (AA_2) ; (AA_1) et (BB_2)). Montrer que les droites (AX), (BY) et (CZ) sont concourantes.

Exercice 27
Soit ω_a, ω_b et ω_c trois cercles tangents extérieurement en A (point de tangence de ω_b et ω_c), B et C. On note Ω le cercle de telle sorte que ω_a, ω_b et ω_c soient tangents intérieurement à Ω. On note X, Y et Z les points de tangences de Ω avec ω_a, ω_b et ω_c. On note A' (resp. B' et C') l'intersection des droites (BZ) et (CY) (resp. (CX) et (ZA) ; (BX) et (AY)). Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.

– Enoncé des lemmes utilisés –

On démontre essentiellement tous les lemmes, il est néanmoins conseillé au lecteur d'essayer de les démontrer ou de les redémontrer par lui-même.

Lemme 1 (Théorème du Pôle Sud)**.** Soit ABC un triangle (non isocèle en A), supposons que S vérifie deux des trois propriétés suivantes, alors il vérifie la troisième.

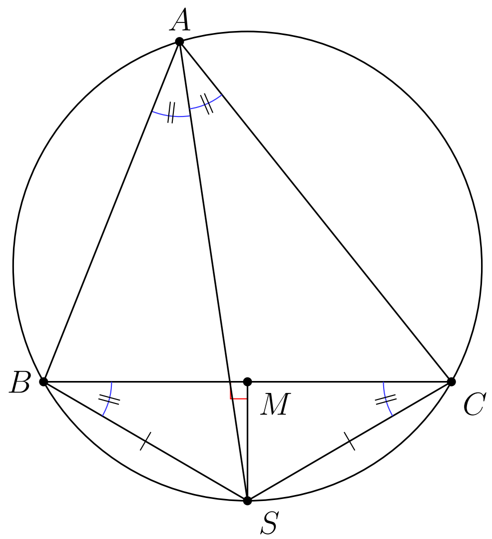
(i) S est sur la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{CAB}$;

(ii) S est sur la médiatrice du segment $[BC]$;

(iii) S est sur le cercle circonscrit du triangle ABC (dans ce cas il s'agit du milieu de l'arc $\widehat{BC}$ ne contenant pas A).

Remarque 2.
En pratique la combinaison, $((i)$ et $(ii)) \Rightarrow (iii)$ est la plus dure à remarquer.

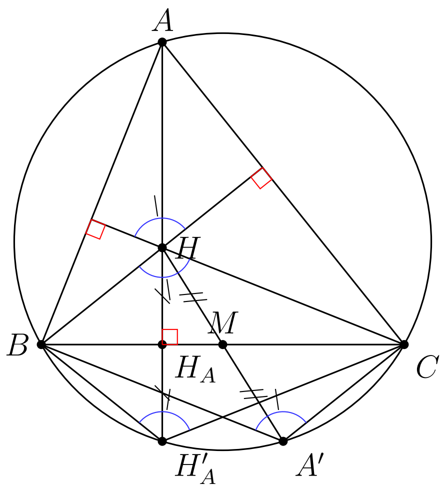
Démonstration. Tant que le triangle ABC n'est pas isocèle en A les intersections sont toujours bien définies (par exemple si on suppose (i) et (ii), on a une définition unique de S). Ainsi, quitte à changer la définition du point S on peut toujours supposer que l'on est dans le cas où S vérifie (ii) et (iii). Dans ce cas S est le milieu de l'arc $\widehat{BC}$ et le triangle BSC est isocèle en S. Ainsi, $\widehat{BAS} = \widehat{BCS} = \widehat{CBS} = \widehat{CAS}$ et ainsi S vérifie (i) également.



□

Lemme 3. Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle ω de centre O. On note également H l'orthocentre du triangle ABC. On note H_A le pied de la hauteur issue de A ainsi que M le milieu du côté $[BC]$, alors les symétriques de H par rapport à H_A et M sont sur ω.

Démonstration. On note H'_A et A' les symétriques respectifs de H par rapport à H_A et M. On effectue la chasse aux angles suivante $\widehat{BA'C} = \widehat{BH'_AC} = \widehat{BHC} = 180 - \widehat{BAC}$, cela conclut.

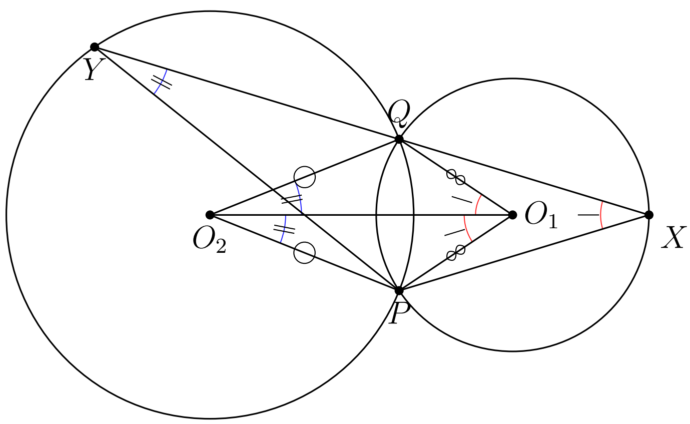


□

Remarque 4.
On peut montrer de plus que A' est le point diamétralement opposé à A. En effet, $\widehat{AH'_AA'} = \widehat{HH'_AA'} = \widehat{HH_AM} = 90$.

Lemme 5 (Condition pour une similitude)**.** Soit ω_1 et ω_2 deux cercles qui se coupent en P et Q, on note $\mathcal{S}$ la similitude directe de centre P qui envoie ω_1 sur ω_2. Soit X un point sur le cercle ω_1, la similitude S envoie alors X sur Y, un point de ω_2 si et seulement si X, Q et Y sont alignés.

Démonstration. On note O_1 et O_2 les centres des cercles ω_1 et ω_2. Il suffit de démontrer que $PXY \sim PO_1O_2$ pour conclure. On calcule alors quelques angles $\widehat{O_2O_1P} = \frac{\widehat{QO_1P}}{2} = \widehat{PXQ} = \widehat{PXY}$, de même $\widehat{O_1O_2P} = \widehat{PYX}$, ce qui conclut la preuve du lemme.

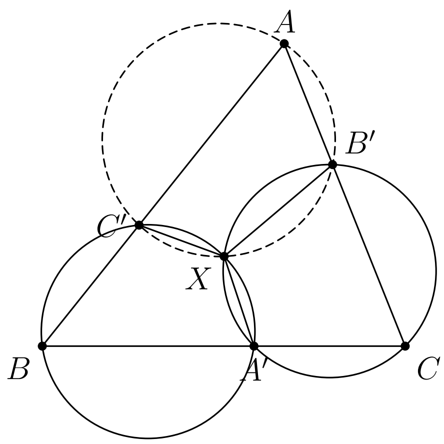


□

Lemme 6 (Théorème de Miquel)**.** *Variante 1 :* Soit ABC un triangle. On dispose de points A', B' et C' sur les côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Alors les cercles circonscrits des triangles $AB'C'$, $A'BC'$ et $A'B'C$ sont concourants.

Variante 2 : Soit ω_1, ω_2 et ω_3 des cercles concourants en un point X. On note de plus A' (resp. B' et C') les intersections des cercles ω_2 et ω_3 (resp. ω_1 et ω_3 ; ω_1 et ω_2). Soit A un point du cercle ω_1, on note B et C les intersections respectives de (AC') avec ω_2 et de (AB') avec ω_3, alors les points B, C et A' sont alignés.

Démonstration. On donne deux preuves de ce lemme, une preuve par variante.



Variante 1 : On note X l'intersection des cercles $A'BC'$ et $A'B'C$, on va alors montrer que les points X, A, B' et C' sont cocycliques. On effectue alors la chasse aux angles suivantes en supposant que X est dans le triangle ABC, les autres cas se traitent de manière analogue (ou bien directement avec des angles orientés)

$$\widehat{B'XC'} = 360 - \widehat{C'XA'} - \widehat{B'XA'} = \widehat{C'BA'} + \widehat{B'CA'} = 180 - \widehat{B'AC'}.$$

Ce qui conclut.

Variante 2 : On note S_i la similitude directe de centre X envoyant le cercle ω_i sur le cercle ω_{i+1} (les indices sont pris modulo 3). On remarque que

$$S_2 \circ S_1 \circ S_3 = Id \tag{VI.2}$$

car $S_2 \circ S_1 \circ S_3$ envoie ω_3 sur ω_3 par une similitude directe et fixe X. De plus, grâce aux alignements, on remarque que S_3 envoie C sur A, S_1 envoie A sur B. On montre alors que S_2 envoie B sur C grâce à l'égalité VI.2 et ainsi B, C et A' sont alignés. □

Remarque 7.

On remarque que les angles $\widehat{BAX}$, $\widehat{CB'X}$ et $\widehat{AC'X}$ sont égaux à un angle φ, on dira que les points A', B' et C' sont des φ-projections.

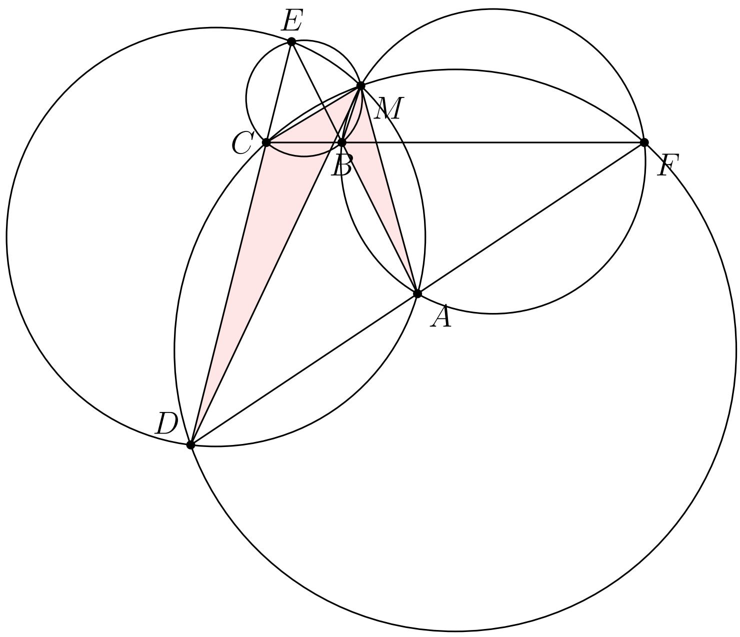
Lemme 8 (Point de Miquel)**.** Soit quatre points dans le plan A, B, C et D. On note E (resp. F) les intersections des droites (AB) et (CD) (resp. (AD) et (BC)). Alors les quatre cercles FAB, FCD, EAD et EBC sont concourants en un point M, appelé le point de Miquel.

Remarque 9.

La particularité du point de Miquel est d'être le centre de la similitude directe envoyant A sur B ainsi que D sur C, et de manière équivalente de celle qui envoie A sur D et B sur C

(on appelle alors cette similitude la *similitude intérieure*). Un autre point de vue équivalent est de remarquer que M est le centre de l'involution projective échangeant B avec D ainsi que A avec C.

Démonstration. On donne également deux preuves de ce fait.

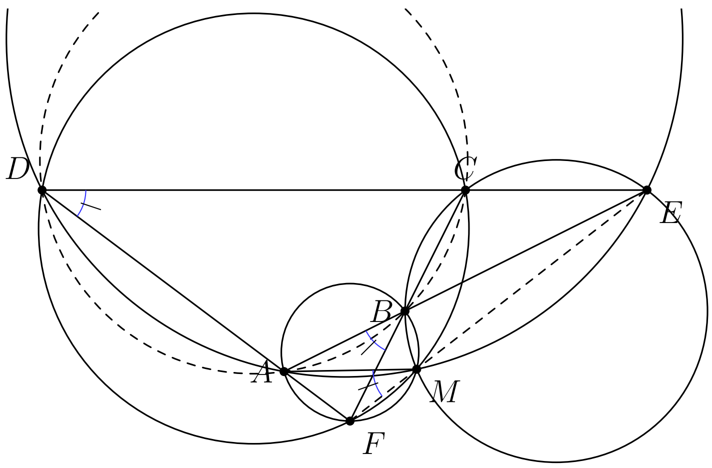


Première preuve : On montre que les cercles circonscrits aux triangles FAB, FCD et EAD se coupent en un point. Pour cela il suffit d'appliquer le Théorème de Miquel (6) au triangle EBC avec les points F, D et A sur les côtés BC, CA et EB. On conclut ensuite par symétrie.

Deuxième preuve : On utilise ce qui est dit dans la Remarque 9, en effet l'intersection des cercles FAB et FCD est l'unique centre de similitude intérieure envoyant A sur D et B sur C. C'est donc également le centre de la similitude directe envoyant D sur C et A sur B, il est donc également sur les cercles EBC et EAD. □

Lemme 10 (Lemme Français)**.** Soit $ABCD$ un quadrilatère et soit M le point de Miquel des droites (AB), (BC), (CD) et (AD). On note E l'intersection des droites (AB) et (CD) ainsi que F l'intersection des droites (AD) et (BC), alors M est sur la droite (EF) si et seulement si $ABCD$ est inscriptible.

Démonstration. On fait une petite chasse aux angles avec tous les cercles de la figure.



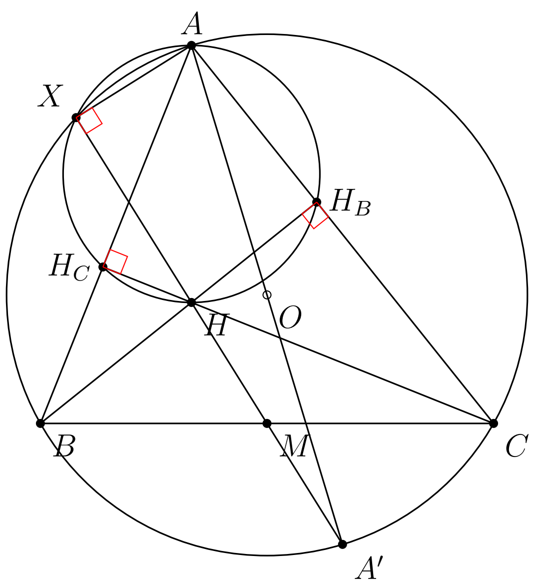
$$(FM, MA) = (EM, MA) \Leftrightarrow (FB, BA) = (ED, DA).$$

Cela conclut la preuve du lemme.

La preuve que l'on vient de donner est essentiellement une autre preuve du Théorème de Miquel (6). □

Lemme 11 (Point de Miquel Particulier)**.** Soit ABC un triangle d'orthocentre H. On note H_B et H_C les pieds des hauteurs issues de B et C. On note X l'intersection des cercles circonscrits aux triangles ABC et H_BH_CA, alors X, H et le milieu de $[BC]$ sont alignés.

Démonstration. Soit A' le point diamétralement opposé à A. On sait d'après le Lemme 3 que les points A', M et H sont alignés. En notant Y l'autre intersection de la droite (HM) avec le cercle circonscrit à ABC, alors $\widehat{HYA} = \widehat{A'YA} = 90$, ce qui montre que $Y = X$ et conclut la preuve du lemme.



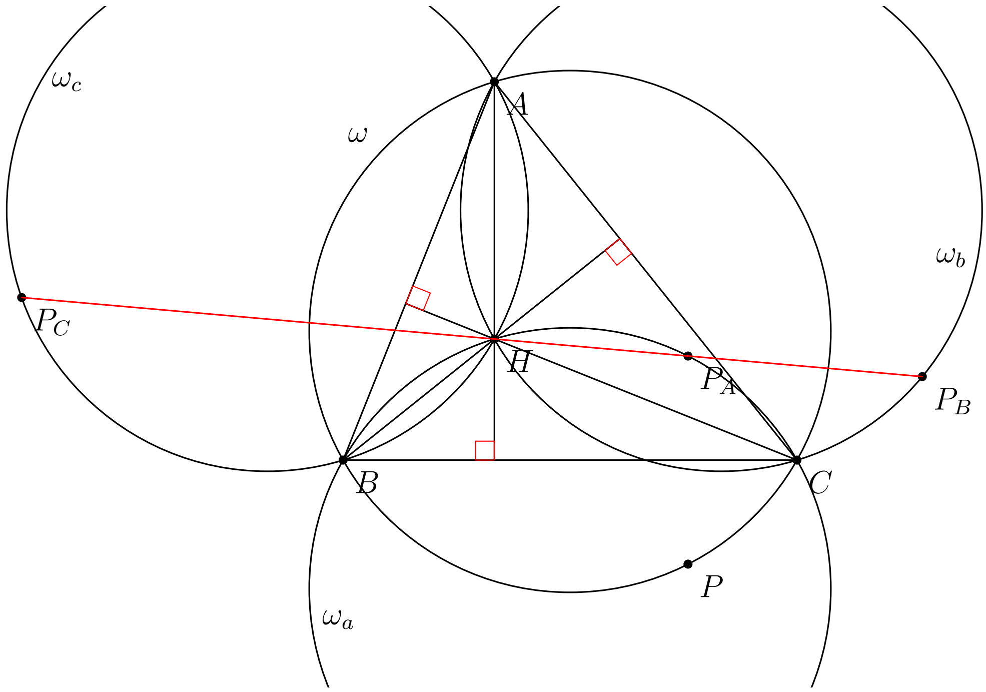
□

Remarque 12.
Ce lemme est aussi un cas particulier du résultat suivant : "Soit $ABCD$ un quadrilatère inscrit dans un cercle de centre O, M le point de Miquel et E l'intersection des droites (AC) et (BD), alors M, O et E sont alignés".

Lemme 13 (Droite de Steiner et de Simson)**.** *Droite de Steiner :* Soit ABC un triangle, on note H son orthocentre et on choisit un point P sur le cercle circonscrit du triangle ABC. On note P_A (resp. P_B et P_C) les symétriques de P par rapport aux côtés (BC) (resp. (CA) et (AB)). Alors P_A, P_B, P_C et H sont alignés.

Droite de Simson généralisé : Soit ABC un triangle et P un point du cercle circonscrit au triangle ABC, alors les φ-projections (voir Remarque 7) de P sur les côtés du triangle ABC sont alignés.

Démonstration. On note ω le cercle circonscrit du triangle ABC, notons ω_a, ω_b et ω_c les symétriques de ω par rapport aux droites (BC), (CA) et (AB). On note $\mathcal{S}_a$, $\mathcal{S}_b$ et $\mathcal{S}_c$ les trois symétries par rapport à ces droites.



D'après le Lemme 3, les trois cercles ω_a, ω_b, ω_c passent par l'orthocentre H du triangle. La composition $S_b \circ S_a$ envoie P_A sur P_B, or $S_b \circ S_a = \rho_{C,2\gamma}$ est une similitude directe de centre C qui envoie ω_a sur ω_b. La droite reliant P_A et P_B passe donc par H. On conclut par symétrie.

On laisse la preuve de la droite de Simson au lecteur. □

Remarque 14.
La réciproque de la droite de Steiner est la suivante : "Soit ABC un triangle et (d) une droite, si les symétriques de la droite (d) par rapport à (BC), (CA) et (AB) sont concourantes en un point P, alors P est sur le cercle circonscrit du triangle ABC et la droite (d) passe par H". On la laisse en exercice au lecteur.

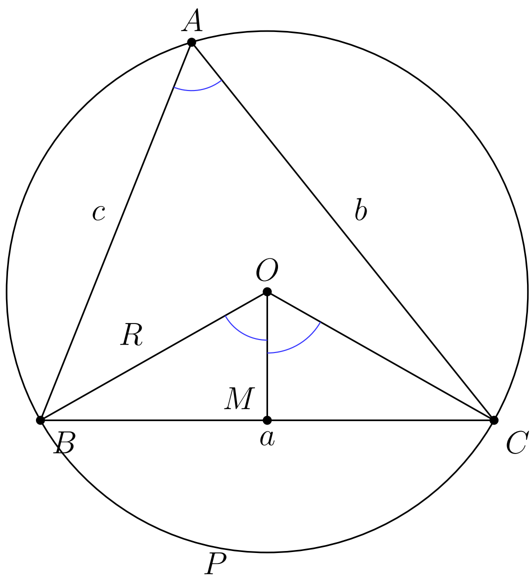
Lemme 15. Soit ABC un triangle, I le centre du cercle inscrit, on note également E et F les points de tangence du cercle inscrit sur les côtés (AB) et (AC). On note X l'intersection des droites (BI) et (MN), alors $\widehat{BXC} = 90$.

Démonstration. On va procéder en renversant le problème. Soit C' le symétrique de C par rapport à la droite (BI), alors C' est sur le cercle circonscrit à CIA (c'est le cercle antarctique depuis B). On remarque alors que les points X, M et N sont les projections orthogonales de I sur les côtés du triangle ACC', d'après la droite de Simson, ils sont alignés. □

Lemme 16 (Loi de sinus)**.** Soit ABC un triangle, on note α, β et γ les angles en A, B et C respectivement. On note de plus $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$ les longueurs de côtés et R le rayon du cercle circonscrit, on a alors l'identité suivante

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2R.$$

Démonstration. Il suffit de montrer que $\frac{a}{\sin(\alpha)} = 2R$ pour conclure ensuite par un argument de symétrie.



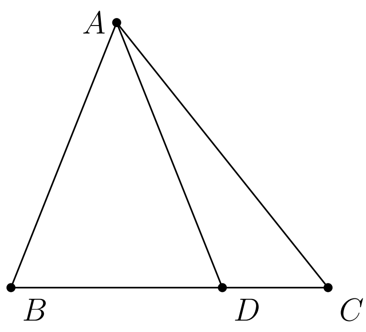
Notons O le centre du cercle circonscrit du triangle ABC et M le milieu du côté BC. On sait que $\widehat{BOC} = 2\alpha$ et ainsi $\widehat{BOM} = \alpha$. Dans le triangle BOM, rectangle en M, on obtient donc $\sin(\alpha) = \dfrac{BM}{BO} = \dfrac{a}{2R}$, ce qui conclut. □

Lemme 17 (Lemme Magique et Lemme de la bissectrice)**.** Soit ABC un triangle et D un point sur le segment $[BC]$. On a l'identité suivante

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin(\widehat{BAD})}{\sin(\widehat{CAD})}.$$

Le lemme de la bissectrice est le cas particulier où (BD) bissecte la paire de droite $((A, B), (A, C))$

Démonstration. Pour montrer cette identité on va utiliser la loi des sinus 16 dans les triangles ABD et ACD.



On a les identités suivante

$$\frac{BA \cdot \sin(\widehat{BAD})}{BD} = \sin(\widehat{BDA}), \qquad \sin(\widehat{CDA}) = \frac{AC \cdot \sin(\widehat{CAD})}{CD}.$$

Mais $\sin(\widehat{BDA}) = \sin(180 - \widehat{BDA}) = \sin(\widehat{CDA})$, d'où le résultat. □

Lemme 18 (Ceva et Ceva Trigonométrique)**.** Soit ABC un trianle, on note A', B' et C' des points respectivement sur (BC), (CA) et (AB). Alors les propositions suivantes sont équivalentes

(i) les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes ;

(ii) l'identité suivante est vérifiée (avec des longueurs orientées)

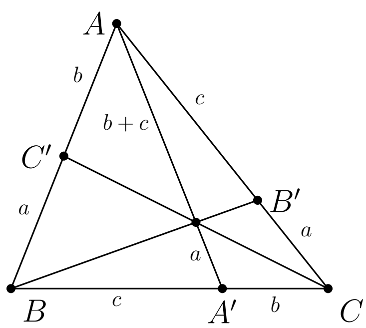
$$\frac{BA' \cdot AC' \cdot CB'}{CA' \cdot BC' \cdot AB'} = -1 \quad \text{(Ceva)};$$

(iii) On note $\alpha_1 = \widehat{BAA'}$, $\alpha_2 = \widehat{CAA'}$, $\beta_1 = \widehat{CBB'}$, $\beta_2 = \widehat{ABB'}$, $\gamma_1 = \widehat{ACC'}$ et $\gamma_2 = \widehat{BCC'}$, l'identité suivante est vérifiée

$$\frac{\sin(\alpha_1) \cdot \sin(\beta_1) \cdot \sin(\gamma_1)}{\sin(\alpha_2) \cdot \sin(\beta_2) \cdot \sin(\gamma_2)} = -1, \quad \text{(Ceva trigonométrique)}.$$

Démonstration. $(ii) \Leftrightarrow (iii)$: La preuve de l'équivalence entre ces deux propriétés est une application du Lemme Magique (17).

$(i) \Rightarrow (ii)$: Supposons que l'on considère le point P soit de barycentre $(a : b : c)$ dans le triangle ABC. On représente la situation comme sur la figure suivante.



Une manière d'obtenir ce point est de dire qu'il est sur la droite reliant A et le barycentre de poids $(b:c)$ de $[BC]$. De la même manière pour les droites partant de B et C. Dans ce cas les pieds des céviennes (AP), (BP) et (CP) vérifient bien l'identité de Ceva.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Les deux propositions sont équivalentes par unicité. □

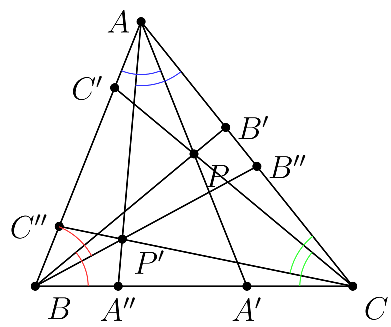
Définition 19 (Conjugué isogonal)**.**
Soit ABC un triangle et (d) une droite passant par A. On dira que la droite *conjugué isogonale* de (d) est la droite (d') telle que $(AB, d) = (d', AC)$. On signifiera qu'une droite est la conjuguée isogonale d'une autre droite avec le préfixe "sy-".

Remarque 20.
Soit ABC un triangle, on note I le centre du cercle inscrit, O le centre du cercle circonscrit et H l'orthocentre du triangle. Alors la droite (AI) est sa propre conjuguée isogonale et (AH) et (AO) sont conjuguées isogonales l'une de l'autre. Soit (t) la tangente au cercle circonscrit de ABC en A et (s) la droite parallèle à (BC) passant par A, alors ces deux droites forment une paire de droite conjuguées isogonalement.

Ainsi, la droite (AO) est la *syhauteur* tandis que la bissectrice est également la *sybissectrice*.

Lemme 21 (Conjugués isogonaux)**.** Soit ABC un triangle et soit (d), (e) et (f) trois droites concourantes au point P partant des sommets A, B et C, alors les trois droites conjuguées isogonales, (d'), (e') et (f') sont concourantes en un point P', appelé le *conjugué isogonal*.

Démonstration. La preuve est immédiate après application de Ceva trigonométrique.



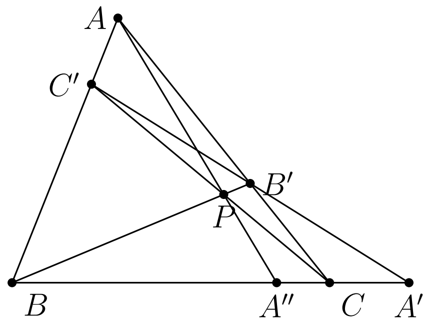
En effet, l'identité de Ceva trigonométrique est juste inversée après passage aux conjuguées isogonales. □

Remarque 22.
Des conjugués isogonaux connus (et à connaître !) sont I avec lui-même ainsi que H avec O.

Lemme 23 (Menelaüs)**.** Soit ABC un triangle et A', B' et C' des points sur les côtés BC, CA et AB. Les points A', B' et C' sont alignés si et seulement si

$$\frac{BA' \cdot AC' \cdot CB'}{CA' \cdot BC' \cdot AB'} = -1 \quad \text{(Menelaüs)}.$$

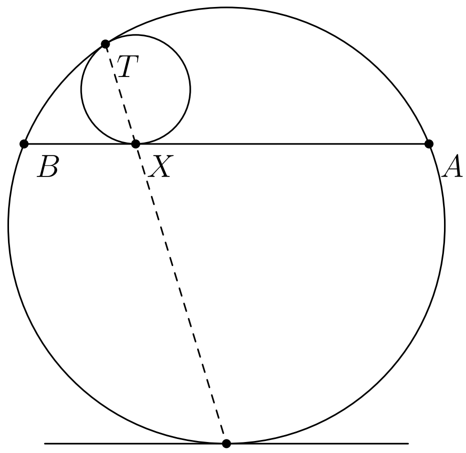
Démonstration. Une preuve consiste en l'application successive du Lemme 42 pour la quadrilatère (BC'), $(C'C)$, (CB') et $(B'C)$ pour trouver que $\frac{BA''\cdot CA'}{CA''\cdot BA'} = -1$ puis du Lemme 18.



□

Lemme 24 (Lemme du bocal)**.** Soit ω et Ω deux cercles tangents intérieurement en T avec ω à l'intérieur du cercle Ω. On note A et B deux points sur le cercle Ω de telle sorte que (AB) une droite tangente à ω au point X. Montrer que la droite (TX) coupe l'arc $\widehat{AB}$ en son milieu.

Démonstration. On note r le rayon du cercle ω et R le rayon de Ω. Soit $\mathcal{H}_{T,\frac{R}{r}}$ l'homothétie de centre T et de rapport $\frac{R}{r}$, elle fixe T et envoie ω sur Ω. $\mathcal{H}$ envoie également la droite (AB) sur une droite parallèle à (AB) et tangente au cercle Ω, elle envoie donc le point X sur le milieu de l'arc $\widehat{AB}$. Cela conclut la preuve du lemme.



□

Lemme 25 (Théorème de Monge)**.** Soit ω_1, ω_2 et ω_3 trois cercle du plans, alors les trois centres d'homothétie extérieure (resp. deux centres d'homothétie intérieure et un extérieur) sont alignés.

Démonstration. Première preuve :

On note $\mathcal{H}_1$ (resp. $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_3$) l'homothétie de rapport positifs envoyant ω_2 et ω_3 (resp. ω_3 sur ω_1 ; ω_1 sur ω_2). On note X, Y et Z les centres de ces homothéties. Regardons $\mathcal{H}_3 \circ \mathcal{H}_2 \circ \mathcal{H}_1$, c'est une similitude directe qui fixe le cercle ω_2, ainsi la composition des trois homothéties est l'identité. Notons $X' := \mathcal{H}_2(X)$, on remarque que $X = \mathcal{H}_3 \circ \mathcal{H}_2 \circ \mathcal{H}_1(X) = \mathcal{H}_3(X')$. On en déduit que les points X', X et Z sont alignés. De même par la définition de X', on a également X', X et Y alignés. Cela conclut.

Deuxième Preuve :

On note O_1, O_2 et O_3 les centres respectifs des cercles ω_1, ω_2 et ω_3, on note également r_1, r_2 et r_3 les rayons des trois cercles. On remarque alors que $\frac{XO_2}{XO_3} = \frac{r_2}{r_3}$, $\frac{YO_3}{YO_1} = \frac{r_3}{r_1}$ et $\frac{ZO_1}{ZO_2} = \frac{r_1}{r_2}$, on peut alors appliquer le Théorème de Menelaüs (23). □

Remarque 26.
On peut utiliser les deux preuves pour redémontrer le Théorème de Menelaüs. Pour cela, on peut utiliser la composition d'homothéties de la première preuve.

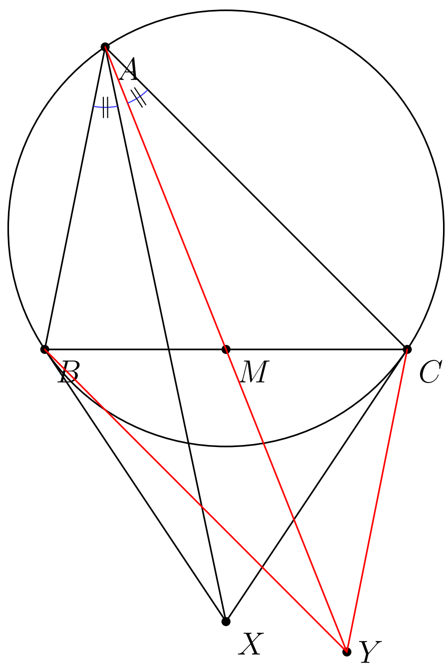
Remarque 27.
On peut alors démontrer l'énoncé suivant qui est également très utile. On ne fait pas de Lemme spécifique étant donné qu'il s'agit d'un cas particulier du Théorème 25.

Soit ω_1 et ω_2 deux cercles, on note Z le centre d'homothétie extérieure de ces deux cercles. Soit γ un cercle qui est tangent extérieurement à ω_1 et ω_2 en P et Q, alors P, Q et Z sont alignés. (On le laisse en exercice au lecteur).

La partie vraiment intéressante est maintenant que la réciproque est vraie. Il faut juste faire attention à la position des points P et Q (étant donné que pour une droite il y a plusieurs intersections possibles).

Lemme 28 (La Symédiane)**.** Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle Γ. On note X l'intersection des tangentes en B et C à Γ. La droite (AX) est appelée la *symédiane*. Elle porte bien son nom puisqu'il s'agit du conjugué isogonal de la médiane en A.

Démonstration. On va donner une preuve très courte. On peut en effet passer par les conjugués isogonaux. Les deux tangentes sont envoyés sur des droites parallèles au côté opposé, et la symédiane sur la médiane. Mais on a alors formé un parallélogramme avec les deux paires de droites parallèles et donc la diagonale de ce parallélogramme coupe le côtés (BC) en son milieu, cela conclut.



Il y a d'autres preuves de ce lemme et de résultats sur la symédiane de manière générale, Alexander Semenov a fait des preuves projectives pendant son cours, tandis que Thomas Budzinski a utilisé des sinus pendant le cours qu'il a donné au groupe D durant le stage d'été de 2016. □

Lemme 29 (Lemmes sur les triangles)**.** Soit ABC un triangle, on note A', B' et C' trois points supplémentaires. On suppose les relations suivantes ;

$$(BC', C'A) + (AB', B'C) + (CA', A'B) = 360,$$

$$\frac{BC' \cdot AB' \cdot CA'}{C'B \cdot B'C \cdot A'B} = 1,$$

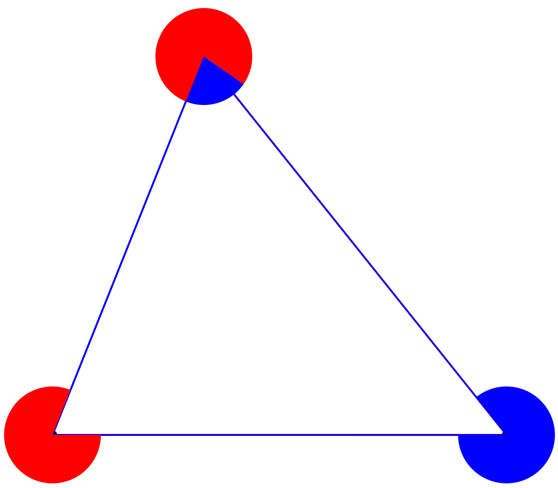
alors on connaît les angles du triangle $A'B'C'$. Plus précisément

$$(B'A', C'A') = (C'B, BA) + (B'C, CA),$$

$$(C'B', A'B') = (A'C, CB) + (C'A, AB),$$

$$(A'C', B'C') = (B'A, AC) + (A'B, BC).$$

Démonstration. On note S_a la similitude de centre A' qui envoie C sur B. De même on définit S_b et S_c. Sur la figure ci-dessous les points A'', A' et A sont alignés, cela n'est pas tout le temps le cas.



On regarde alors la composition des trois similitudes $S_c \circ S_b \circ S_a$. La condition de l'énoncé nous dit alors que la composition est une similitude directe d'angle $(BC', C'A) + (AB', B'C) + (CA', A'B) = 0$ et de rapport $\frac{BC' \cdot AB' \cdot CA'}{C'B \cdot B'C \cdot A'B} = 1$, c'est donc une translation. De plus, elle envoie C sur C, la similitude directe $S_c \circ S_b \circ S_a$ est donc l'identité. Notons A'' l'image de A' par S_b. Alors, l'image de A'' doit être A' par la similitude S_c. Ainsi $A''C'A' \sim AC'B$ et $A''B'A' \sim AB'C$ ce qui conclut la preuve du lemme. □

Remarque 30.
Plusieurs élèves m'ont reproché de montrer ici un lemme inutile. Ils n'avaient jamais vu ce lemme dans aucun exercice. Chaque élève du groupe D a sûrement vu un exercice où l'on pouvait utiliser ce lemme mais au lieu de l'appliquer a préféré réintroduire le point A'' ainsi que les similitudes entre triangles et l'a donc utilisé sans le savoir.

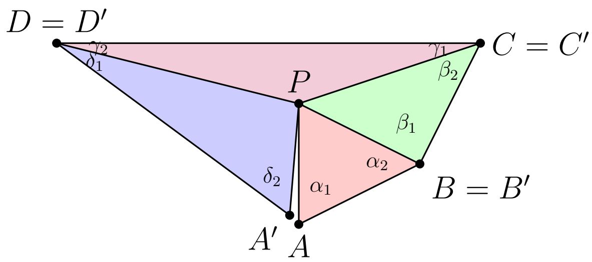
Remarque 31.
On peut alors montrer le joli résultat suivant (exercice laissé au lecteur !) : "Soit $ABCD$ un quadrilatère et P un point du plan, P admet un conjugué isogonal si et seulement si $\widehat{APB} + \widehat{CPD} = 180$.".

Lemme 32 (Puzzles)**.** Soit P_aAB', P_bBC', P_cCD' et P_dDA' quatre triangles, on note de plus $\alpha_1 = \widehat{P_aAB'}$, $\alpha_2 = \widehat{P_aB'A}$, on définit de manière cyclique β_1, β_2, γ_1, γ_2, δ_1 et δ_2. On s'autorise alors à translater, rotater et agrandir/rétrécir nos quatre triangles dans le plan, on peut alors les regrouper autour d'un point P (i.e. $P_a = P_b = P_c = P_d$, $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$ et $D = D'$) si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées.

$$\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2+\gamma_1+\gamma_2+\delta_1+\delta_2 = 360, \quad \text{(Les sommes des angles d'un quadrilatère font } 360)$$

$$\frac{\sin(\alpha_1)\cdot\sin(\beta_1)\cdot\sin(\gamma_1)\cdot\sin(\delta_1)}{\sin(\alpha_2)\cdot\sin(\beta_2)\cdot\sin(\gamma_2)\cdot\sin(\delta_2)} = 1, \quad \text{(Condition qui vient de la loi des sinus).}$$

Démonstration. Le sens direct de la preuve ne présente aucune difficultés et est laissé au lecteur. Pour la seconde partie de la preuve, on va essayer d'assembler les triangles un par un. Tout d'abord on place P_aAB', puis on place P_bBC' de telle sorte que les deux segments $[P_aB]$ et $[P_bB]$ et coïncident, de même en rajoutant successivement P_cCD' et P_dDA', il suffit alors de montrer que les points A et A' sont bien confondus.



La première condition est de montrer que la somme des angles autour de P est bien 360, ce qui découle de la première identité. La deuxième condition doit être que les longueurs PA et PA' doivent coïncider. On conclut ceci en appliquant la loi des sinus dans les quatre triangles et en appliquant la seconde condition. □

Remarque 33.
Le lemme en lui-même ne présente aucune difficulté pour le groupe D, mais il faut comprendre un peu comment on peut l'appliquer. On commence par supposer l'énoncé vrai et

on triangule la figure de telle sorte que l'on connaisse tous les angles, ensuite on 'éclate' la figure afin de la reconstruire morceaux par morceaux. La figure construite contiendra la propriété de l'énoncé par construction et avec un peu de chance on pourra conclure par unicité.

Lemme 34 (Lemme sur les diagonales perpendiculaires)**.** Soit $ABCD$ un quadrilatère, alors $(AC) \perp (BD)$ si et seulement si $AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2$.

Démonstration. $\Rightarrow$ *:* Soit X l'intersection des deux diagonales perpendiculaires (AC) et (BD). Alors $AB^2+CD^2 = XA^2+XB^2+XC^2+XD^2 = BC^2+DA^2$ d'après le théorème de Pythagore.

$\Leftarrow$ *:* On passe par le produit scalaire des deux diagonales en calculant,

$$2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = AB^2 - BC^2 + CD^2 - AD^2.$$

Pour un cours plus élaboré sur ce lemme on réfère au cours pour le groupe D de Thomas Budzinski du stage de Valbonne 2015. □

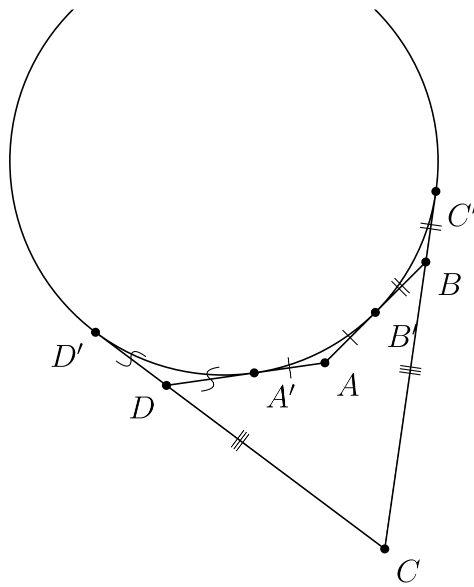
Lemme 35 (Résultat basique de la chasse aux tangentes)**.** Soit $ABCD$ un quadrilatère, $ABCD$ est circonscriptible si et seulement si $AB + CD = BC + DA$.

Démonstration. $\Rightarrow$ *:* Soit ω le cercle inscrit au quadrilatère $ABCD$, on note A', B', C' et D' les points de tangence de ω avec (AB), (BC), (CD) et (DA). Alors,

$$AB + CD = AA' + A'B + CC' + C'D = D'A + BB' + CB' + DD' = BC + DA.$$

on trace la figure suivante pour montrer que l'identité est à comprendre avec des orientations. L'orientation des droites (AB), (BC), (CD) et (DA) est donnée par une orientation du cercle qui leur est tangent. Regardons ce que cela donne pour la figure ci-dessous. On suppose que le cercle est orienté dans le sens trigonométrique, dans ce cas la droite (AB) est orientée de A vers B, la droite (BC) de C vers B, la droite (CD) de D vers C, et la droite (DA) de D vers A. La relation $AB - BC + CD - DA = 0$ devient alors

$$|AB| + |BC| - |CD| - |DA| = 0.$$

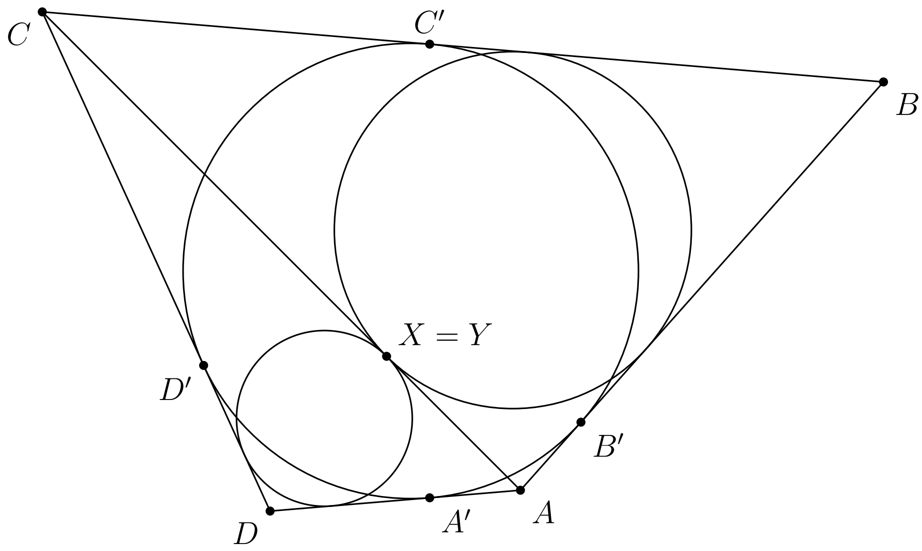


$\Rightarrow$:

On procède par unicité en considérant le cercle ω tangent aux droites (DA), (AB) et (BC). On note D' l'intersection de la tangente en C avec la droite (AD). Alors $AB - BC + CD - DA = 0$, mais $AB - BC + CD' - D'A = 0$, ainsi $D'D + D'C = DC$, ce qui montre bien que $D = D'$ d'après l'inégalité triangulaire. $\square$

Lemme 36. Soit $ABCD$ un quadrilatère circonscriptible, alors les cercles inscrits des triangles ABC et ADC touchent la droite (AC) au même point.

Démonstration. Soit X (resp. Y) le point de tangence du cercle inscrit de ABC (resp. ADC) sur la droite (AC). On calcule les distances CX et CY.



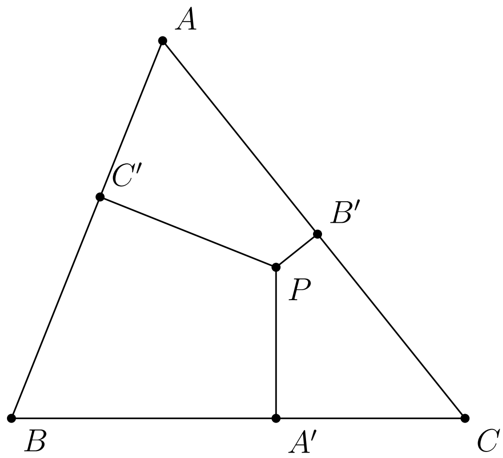
$$CX = \frac{CB - AB + CA}{2} \underset{CB-AB=DA-CD}{=} \frac{DA - CD + CA}{2} = CY.$$

Cela conclut. $\square$

Lemme 37 (Théorème de Carnot)**.** Soit ABC un triangle et A', B' et C' des points sur les côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Les perpendiculaires en A', B' et C' aux côté sur lesquels ils se trouvent sont concourantes si et seulement si

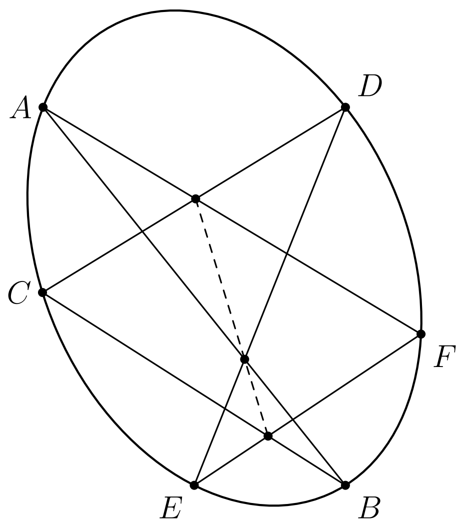
$$CA'^2 + BC'^2 + AB'^2 = BA'^2 + AC'^2 + CB'^2.$$

Démonstration. Ce théorème se démontre facilement en utilisant l'unicité en géométrie. On peut en effet démontrer seulement le sens direct, si on suppose déjà B' et C' placés il n'y a qu'un point A' sur $[BC]$ qui vérifie les deux propriétés différentes de l'énoncé.



Le sens direct est alors évident en utilisant le théorème de Pythagore. □

Lemme 38 (Théorème de Pascal)**.** Soit $ABCDEF$ un hexagone. Les points A, B, C, D, E et F sont coconiques si et seulement si les intersections $(AB) \cap (DE)$, $(BC) \cap (EF)$ et $(CD) \cap (FA)$ sont alignés.

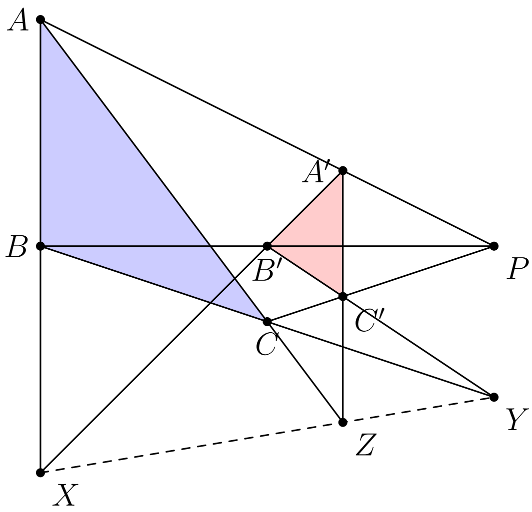


Démonstration. Il suffit de montrer le théorème de Pascal dans une infinité de cas pour le montrer pour tous (des histoires de continuité avec les équations de droite et de conique). On peut alors supposer que, les points d'intersections sont en dehors de la conique. On peut alors envoyer $(BC) \cap (EF)$ et $(CD) \cap (FA)$ sur la droite à l'infini et la conique sur un cercle. Dans ce cas le théorème devient une bête chasse aux angles que l'on laisse au lecteur. □

Lemme 39 (Théorème de Brianchon)**.** Soit (a), (b), (c), (d), (e) et (f) 6 droites. Les 6 droites sont tangentes à une conique si et seulement si les droites $(a\cap b, d\cap e)$, $(b\cap c, e\cap f)$ et $(c\cap d, f\cap a)$ sont alignés.

Démonstration. Le théorème de Brianchon est le dual du Théorème de Pascal (38). □

Lemme 40 (Premier Théorème de Desargues)**.** Soit ABC et $A'B'C'$ deux triangles, on dit qu'ils sont *perspectifs* si et seulement si les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes. Les triangles ABC et $A'B'C'$ si et seulement si les points $X = (AB) \cap (A'B')$, $Y = (BC) \cap (B'C')$ et $Z = (CA) \cap (C'A')$ sont alignés.



Démonstration. On note P l'intersection des trois droites (AA'), (BB') et (CC'). On se place dans $\mathbb{R}P^2$ le plan projectif réel. On envoie alors la droite (XY) sur la droite à l'infini. Les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèle ainsi que les droites (BC) et $(B'C')$. On conclut alors en utilisant le Théorème de Thalès. En effet, en appelant P le point d'intersection des droites (AA'), (BB') et (CC'),

$$\frac{PA}{PA'} = \frac{PB}{PB'} = \frac{PC}{PC'}.$$

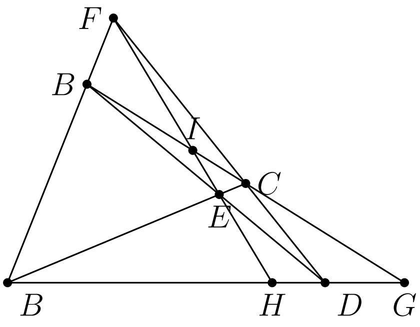
Donc $(AC)//(A'C')$ et Z est également sur la droite à l'infini ce qui conclut. La réciproque s'obtient par dualité. □

Lemme 41 (Lemme de Sawayama)**.** Soit Ω un cercle, on place A, B, C et D dans cet ordre sur Ω, on note X l'intersection des droites (AC) et (BD). Soit ω le cercle tangent à l'intérieur du triangle formé par $[AX]$, $[XD]$ et l'arc $[\widehat{DA}]$ ne contenant pas B. Soit S et T les points de tangence de ω avec les droites (AX) et (XD). Alors la droite (ST) passe par le centre du cercle inscrit du triangle ABX.

Démonstration. Pour une preuve de ce magnifique théorème on se réfère à la preuve de Jean-Louis Ayme dans un papier intitulé *Sawayama and Thébault's theorem.* □

Lemme 42 (Théorème du quadrilatère complet)**.** Soit $ABCD$ un quadrilatère, on note E, F et G les intersections des droites (AC) avec (BD), (AB) et (CD) et (BC) et (AD). On note de plus H l'intersection des droites (AD) et (EF), alors A, D, H et G sont en division harmonique (c-à-d. $b_{ADHG} = -1$).

Démonstration. On note I l'intersection des droites (EF) et (BC).



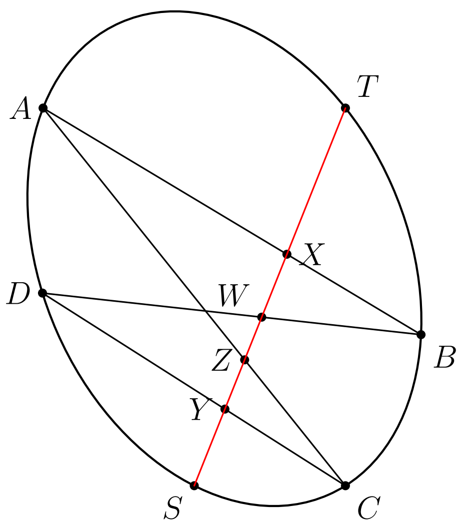
On a la suite d'égalité suivante :

$$\begin{aligned} b_{ADHG} &= b_{BCIG} && \text{(projection depuis } F) \\ &= b_{DAHG} && \text{(projection depuis } E) \\ &= \frac{1}{b_{ADHG}} && \text{(identité standard).} \end{aligned}$$

Ce qui montre que $b_{ADHG}^2 = 1$, comme $b_{ADHG} \neq 1$ (pas de points égaux), on a bien $b_{ADHG} = -1$. □

Lemme 43 (Troisième théorème de Desargues)**.** Soit A, B, C et D quatre points et (d) une droite. On définit une transformation $\mathcal{I}$ de la droite (d). Soit X un point de la droite (d), alors $\mathcal{I}(X)$ est la deuxième intersection (ou bien X si le point d'intersection est double) de la droite (d) avec l'unique conique passant par les points A, B, C, D et X. Dans ce cas $\mathcal{I}$ est une transformation projective.

Démonstration. On note X, Y, Z et W les points d'intersections des droites (AB), (CD), (AC) et (BD).



On sait qu'il existe une unique transformation projective $\mathcal{I}$ de la droite (d) qui échange X et Y ainsi que Z et W. Soit $\mathcal{C}$ une conique qui passe par les points A, B, C et D, on suppose qu'elle recoupe la droite (d) en S et T. pour conclure la preuve du théorème il suffit de démontrer que la transformation $\mathcal{I}$ envoie également S sur T. Pour cela il suffit de démontrer l'identité suivante : $b_{XWST} = b_{YZTS}$. Mais on a la suite d'égalités suivante :

$$\begin{aligned} b_{XWST} &= b_{ADST} && \text{(projection depuis } B) \\ &= b_{ZYST} && \text{(projection depuis } C) \\ &= b_{YZTS} && \text{(formule standard sur les birapports).} \end{aligned}$$

Cela conclut. □

Remarque 44.
Le Deuxième Théorème de Desargues est le seul cas des trois coniques particulières formées par les paires de droites passant par A, B, C et D.

Lemme 45. Soit (d_1) et (d_2) deux droites du plan ainsi que $\mathcal{I}$ une transformation projective. Pour trois points distincts X_1, X_2 et X_3, on note de plus $\mathcal{C}$ une conique tangente aux droites (d_1), (d_2), $(X_1\mathcal{I}(X_1))$, $(X_2\mathcal{I}(X_2))$ et $(X_3\mathcal{I}(X_3))$. Dans ce cas la transformation $\mathcal{I}$ est "définie par la conique $\mathcal{C}$", c'est-à-dire qu'un point $X \in (d_1)$ est envoyé sur l'intersection entre (d_2) et à l'autre tangente à $\mathcal{C}$ passant par X.

Démonstration. La preuve fonctionne essentiellement par unicité, la transformation $\mathcal{I}$ est déterminée uniquement par les images de X_1, X_2 et X_3 par $\mathcal{I}$. Il suffit donc de démontrer que la transformation définie dans l'énoncé du lemme est bien une transformation projective. Pour cela on se ramène à la configuration où $\mathcal{C}$ est un cercle (on peut toujours appliquer une transformation projective). On note alors O le centre du cercle $\mathcal{C}$ et α l'angle entre les droites (d_1) et (d_2), on peut alors décrire la transformation définie par $\mathcal{C}$ grâce à la composition des transformations projectives suivantes

$$A \mapsto (OX) \mapsto (O\mathcal{I}(X)) \mapsto \mathcal{I}(X),$$

La deuxième transformation est une rotation d'angle $90 - \frac{\alpha}{2}$. On laisse le soin au lecteur de vérifier que ces deux transformations coïncident. Cela conclut la preuve du Lemme 45 □

Remarque 46.
On remarque que lorsque la conique $\mathcal{C}$ est une parabole, la transformation projective induite par la conique envoie le point à l'infini d'une droite sur celui de l'autre droite, la transformation est donc affine (car $b_{ABC\infty} = r_{ABC}$), ceci est une équivalence.

Lemme 47. Soit (d_1) et (d_2) deux droites du plan et $\mathcal{I}$ une transformation projective de la droite (d_1) vers la droite (d_2). On suppose que pour trois points différents A_1, A_2 et A_3 les milieux des segments $[A_1\mathcal{I}(A_1)]$, $[A_2\mathcal{I}(A_2)]$ et $[A_3\mathcal{I}(A_3)]$ sont alignés sur une droite (d), alors pour un quelconque point X sur le droite (d_1), le milieu du segment $[X\mathcal{I}(X)]$ est également sur la droite (d). De plus, la transformation $\mathcal{I}$ est alors une transformation affine.

Démonstration. Notons $\mathcal{C}$ la conique tangente aux droites (d_1), (d_2), $(A_2\mathcal{I}(A_2))$, la droite à l'infini et la droite reliant les milieux. On veut montrer que les droites $(A_1\mathcal{I}(A_1))$ et $(A_3\mathcal{I}(A_3))$ sont également tangentes à la conique $\mathcal{C}$. On remarque seulement que la conique $\mathcal{C}$ induit une transformation projective entre les droites $(A_1\mathcal{I}(A_1))$ et $(A_2\mathcal{I}(A_2))$, en envoyant A_1 sur A_2, $\mathcal{I}(A_1)$ sur $\mathcal{I}(A_2)$, un milieu sur l'autre milieu et le point à l'infini de l'un sur l'autre (c'est une forme de réciproque par unicité du Lemme 45 juste au-dessus), cela montre alors que la droite $(A_1\mathcal{I}(A_1))$ est en effet tangent à $\mathcal{C}$. De même pour la droite $(A_3\mathcal{I}(A_3))$. On conclut alors de la manière suivante, soit X un point de la droite (d_1), on sait que la droite $(X\mathcal{I}(X))$ est tangente à la conique $\mathcal{C}$, comme la droite à l'infini est tangente à $\mathcal{C}$ la conique induit une transformation projective entre $(A_1\mathcal{I}(A_1))$ et $(X\mathcal{I}(X))$ qui envoie donc le milieu sur le milieu, cela conclut. De plus, la transformation est en effet affine (est projective et envoie les points à l'infini sur les points à l'infini). □

On énonce également le lemme suivant que l'on laisse en démonstration au lecteur.

Lemme 48 (Lemme des escargots)**.** Soit A, B et C trois points du plan, on note $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ deux transformations projectives respectivement le faisceau des droites passant par a sur le faisceau des droites passant par B, de même pour le faisceau de droite passant par A et C. Soit (d) une droite passant par A, et $\mathcal{I}(d)$ et $\mathcal{J}(d)$ les images, on veut trouver une condition nécessaire pour que ces trois droites sont toujours concourantes. Pour cela, il suffit qu'elles s'intersectent au moins 5 fois et que sur 3 de ces fois il faut que le point d'intersection soit A, B et C.

Lemme 49 (Condition de coconicité)**.** Soit ABC un triangle et A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 et C_2 des points sur les droites (BC), (CA) et (AB) (deux par droites).Alors les points A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 et C_2 sont coconiques (i.e. sur la même conique) si et seulement si on a l'identité suivante.

$$r_{BCA_1} \cdot r_{BCA_2} \cdot r_{CAB_1} \cdot r_{CAB_2} \cdot r_{ABC_1} \cdot r_{ABC_2} = 1.$$

Démonstration. La preuve est très directe. La formule $r_{BCA_1} \cdot r_{BCA_2} \cdot r_{CAB_1} \cdot r_{CAB_2} \cdot r_{ABC_1} \cdot r_{ABC_2}$ est un invariant projectif (on veut montrer que la quantité est invariante par projection pour cela on trace toutes les droites passant par P et on change la formule en la même mais avec les droites (on utilise pour cela le Lemme Magique) elle est alors invariante par projection). On envoie la conique passant par les points A_1, A_2, B_1, B_2 et C_1 sur un cercle, la formule $r_{BCA_1} \cdot r_{BCA_2} \cdot r_{CAB_1} \cdot r_{CAB_2} \cdot r_{ABC_1} \cdot r_{ABC_2} = 1$ découle alors des puissances du point depuis A, B et C. □

Remarque 50.
On peut bien évidemment regarder le dual de ce lemme mais en considérant les rapport entre droites.

– Indications pour les exercices –

Indication pour l'exercice 1 : 11.
Indication pour l'exercice 2 : 1.
Indication pour l'exercice 3 : 15.
Indication pour l'exercice 4 : 2317.
Indication pour l'exercice 5 : 24, 17, 16 et 18.
Indication pour l'exercice 6 : 5.
Indication pour l'exercice 7 : l'esprit du lemme des escargot.
Indication pour l'exercice 8 : 34.
Indication pour l'exercice 9 : 37.
Indication pour l'exercice 10 : 28.
Indication pour l'exercice 11 : 29.
Indication pour l'exercice 12 : 8.
Indication pour l'exercice 13 : 25.
Indication pour l'exercice 14 : 35 et 13.
Indication pour l'exercice 15 : 23.
Indication pour l'exercice 16 : 48.
Indication pour l'exercice 17 : 43.
Indication pour l'exercice 18 : 32.
Indication pour l'exercice 19 : 27.
Indication pour l'exercice 20 : 11.
Indication pour l'exercice 21 : 21.
Indication pour l'exercice 22 : 41.
Indication pour l'exercice 23 : 36 et 16.
Indication pour l'exercice 24 : 13 et 8.
Indication pour l'exercice 25 : 48.
Indication pour l'exercice 26 : 49 et 39.
Indication pour l'exercice 27 : 39, 40 et 25.

– Correction des exercices –

Solution de l'exercice 1
D'après le Lemme 11, on veut juste montrer que les droites (AN) et (HM) sont perpendiculaires. Cela découle alors du fait que les droites des triangles APQ et HBC sont perpendiculaires deux à deux et que (AN) et (MH) sont les médianes correspondantes.

Solution de l'exercice 2
On note M le milieu du segment $[AD]$. On sait alors que (YM) est la médiatrice de $[AD]$ et que (CY) est a bissectrice de l'angle $\widehat{ACD}$, ainsi d'après le théorème du pôle Sud (1) on trouve que les points A, Y, D et C sont cocycliques. Cela permet d'affirmer que $\widehat{AYC} + \widehat{AXB} = \widehat{ADC} + \widehat{ADB} = 180$, ce qui conclut.

Remarque 51.
On peut aussi conclure en appliquant le Théorème de Miquel (6) au triangle BIC, avec les points Y, D et X sur les côtés $[IC]$, $[CB]$ et $[BI]$ respectivement.

Solution de l'exercice 3
On remarque dans un premier temps que l'angle $\widehat{CIB}$ est droit, mais comme la droite (BI) bissecte l'angle $\widehat{CBA}$, on peut directement appliquer le Lemme 15.

Solution de l'exercice 4
On veut démontrer que $\frac{AB_1 \cdot BC_1 \cdot CA_1}{B_1C \cdot C_1A \cdot A_1B} = 1$ si et seulement si $\frac{AB_2 \cdot BC_2 \cdot CA_2}{B_2C \cdot C_2A \cdot A_2B} = 1$ ce qui conclura par le Théorème de Menelaüs (23). Pour cela on va utiliser le Lemme magique (17). En effet, $\frac{AB_1}{CB_1} = \frac{BA}{BC} \cdot \frac{\sin(\widehat{ABB_1})}{\sin(\widehat{CBB_1})}$ et d'autres relations de manière symétrique.

Solution de l'exercice 5
On va dans un premier temps utiliser le Lemme du Bocal (24), on sait alors que la droite $(A''A')$ passe par le milieu de l'arc $\widehat{BC}$ passant par A, d'après Théorème du Pôle Sud on sait donc que la droite $(A'A'')$ bissecte l'angle $\widehat{BA''C}$, d'après le Lemme Magique (17) on trouve donc que $\frac{A''B}{A''C} = \frac{BA'}{CA'}$, on trouve alors les deux autres inégalités suivante de manière symétriques : $\frac{C''A}{C''B} = \frac{AC'}{BC'}$ ainsi que $\frac{B''C}{B''A} = \frac{CB'}{AB'}$. la multiplication des trois égalités et l'application du théorème de Ceva montre alors que

$$\frac{A''B}{A''C} \cdot \frac{C''A}{C''B} \cdot \frac{B''C}{B''A} = 1.$$

On conclut alors en appliquant la loi des sinus (16) ainsi que le Théorème de Ceva trigonométrique (18).

Solution de l'exercice 6
On note S le pôle Sud du triangle ABC issue de A. On remarque d'après le Lemme 5 qu'il existe une similitude directe de centre A qui envoie le cercle circonscrit à ADB sur le cercle circonscrit à ABC et que cette similitude envoie B sur S ainsi que O_1 sur O. Ainsi, $AO_1O \sim ABS$, de la même manière $AO_2O \sim ACS$, donc $AO_1O_2O \sim ABCS$, cela montre bien que $OO_1 = OO_2$.

Solution de l'exercice 7
On va utiliser l'esprit du lemme des escargots. Pour cela on remarque que la somme des

distances de P à (BC) et (AC) varie linéairement quand on bouge P linéairement sur la droite (EF), de la même manière la distance de P à (AB) varie linéairement. Il suffit donc de trouver deux positions de P pour lesquelles l'exercice est vérifié. On prend alors $P = E$ et $P = D$ pour conclure l'exercice.

Solution de l'exercice 8
On va appliquer le Lemme 34 pour s'en sortir avec seulement un peu de calcul. On sait donc que $(AE) \perp (DF)$ ce qui se réécrit $FA^2 - AD^2 + DE^2 - FE^2 = 0$ et on veut montrer l'identité $BA^2 - BF^2 + FE^2 - AE^2 = 0$. Cela découle sans surprises de quelques applications du théorème de Pythagore. On a en effet, $0 = FA^2 - AD^2 + DE^2 - FE^2 = (BA^2 + BF^2) - AB^2 + (AE^2 - AD^2) - FE^2 = +BF^2 - FE^2 + AE^2 - AB^2$, cela conclut.

Solution de l'exercice 9
On va noter X, Y et Z les intersections des droites (PA), (PB) et (PC) avec $(B'C)$, $(C'A')$ et $(A'B')$. D'après le Théorème de Carnot (37) ainsi que le Théorème du Pythagore la concourance des perpendiculaires en A, B et C aux côtés $(B'C'')$, $(C'A')$ et $(A'B')$ est alors équivalente à l'identité $BA'^2 - A'C^2 + CB'^2 - B'A^2 + AC'^2 - C'B^2 = 0$. Cette relation est symétrique ce qui conclut.

Solution de l'exercice 10
Il s'agit d'un exercice d'un test de mi-parcours au stage de Valbonne 2016 (suite au cours de Thomas Budzinksi sur les symédianes (28)).

Solution de l'exercice 11
On va utiliser le Lemme 29 pour le triangle ABX avec les poins Q, P et M. On vérifie aisément que la condition du lemme est vérifiée pour trouver que $\widehat{MPQ} = \widehat{QXB} = 90 - \widehat{XBQ} = 90 - \widehat{PAX} = \widehat{AXP} = \widehat{MQP}$ et $\widehat{MQP}$ sont égaux. On a donc $NQ = NP$ et par symétrie $MQ = MP$ ce qui montre que la droite (MN) est la médiatrice du segment $[PQ]$ et en particulier que $(MN) \perp (PQ)$.

Solution de l'exercice 12
On suppose dans un premier temps que l'égalité de l'énoncé est vraie. On choisit M un point du segment $[EF]$ de telle sorte $EF \cdot EM = EA \cdot ED$, alors les points F, A, D et E sont cocycliques, de même pour E, A, B et M (d'après l'identité de l'énoncé). Donc M est le point de Miquel (8). Or M est sur la droite $[EF]$ donc $ABCD$ est cyclique. La réciproque est maintenant évidente.

Solution de l'exercice 13
a) On note Ω le cercle inscrit de $A_1A_2 \dots A_n$ et T le centre d'homothétie négative qui envoie Ω sur Γ. X_i est ainsi le centre d'homothétie négative qui envoie Ω sur ω_i, T_i est le centre d'homothétie positive qui envoie ω_i sur Γ, donc d'après le Théorème de Monge (25), les points T_i, X_i et T sont alignés. T est donc un point commun aux n droites, elles sont donc concourantes.

b) On reprend les notations précédentes, on note de plus S le centre d'homothétie positive qui envoie Ω sur Γ. On montre, également en utilisant le Théorème Monge (25), que les points S, S_i et X_i sont alignés. S est donc un point commun à toutes les droites, elles sont donc concourantes.

Solution de l'exercice 14
On note ω_i le cercle inscrit de centre I_i. On va démontrer que la seconde tangente intérieure de ω_1 et ω_3, que l'on appellera (g') passe par C. La seconde tangente de ω_1 depuis C recoupe (g)

en X. on va alors montrer que le quadrilatère $ADCX$ est circonscriptible. D'après la condition du Lemme 35, on peut établir deux relations sur les quadrilatères $ABXC$ et $ABCD$ au vu de leur circonscriptibilité. On trouve

$$AD - AB + BC - CD = 0 \tag{VI.3}$$

et

$$CX - XA + AB - BC = 0 \tag{VI.4}$$

On somme les relations VI.3 et VI.4 pour obtenir $CX - XA + AD - DC = 0$, cette dernière relation implique que le quadrilatère $ADCX$ est circonscriptible. Cela montre bien que la seconde tangente intérieure de ω_1 et ω_3 passe par C. Dans l'optique de démontrer que l'orthocentre de $I_1I_2I_3$ se trouve sur g on va montrer que les symétriques de g par rapport aux trois côtés de $I_1I_2I_3$ sont concourantes, on finira ensuite en utilisant la droite de Steiner (13). Le symétrique de g par rapport à (I_1I_2) est la droite (BC), le symétrique de g par rapport à (I_2I_3) est (DC) et enfin le symétrique de (g) par rapport à (I_1I_3) est (g'). Or les droites (BC) et (DC) se coupe en C mais comme démontré plus haut (g') passe également par C, on conclut en disant que la droite de Steiner (13) d'un point (la droite formé par les symétriques d'un point sur le cercle circonscrit) par un triangle passe par l'orthocentre du triangle.

Remarque 52.
On peut trouver en corollaire du Lemme 13 que le point C est sur le cercle circonscrit du triangle $I_1I_2I_3$.

Solution de l'exercice 15
On fait une inversion de centre H. La preuve de l'exercice est alors une application de Menelaüs (23).

Solution de l'exercice 16
On va utiliser le lemme des escargots (48), on laisse le lecteur montrer que faire bouger le point X sur la droite (CH_C) induit une transformation projective pour le point Z sur la droite (BH_B). Il suffit alors de démontrer la proposition pour trois choix judicieux du point X. On choisit $X = H_C$, $X = H$ et $X = H'_A$ (intersection de la droite (CH_C) et du cercle circonscrit au triangle ABC), on applique deux fois le fait que le symétrique de H par rapport à (AC) et (AB) est sur le cercle circonscrit du triangle à ABC.

Solution de l'exercice 17
On va utiliser le troisième Théorème de Desargues (43) pour montrer le lemme suivant :

Lemme 53. Soit A et B deux points sur un cercle Γ, on note (d) une droite du plan. Notons X et Y les intersections des tangentes en A et B à Γ avec la droite (d). On note P l'intersection de la droite (AB) et de la droite (d), ainsi que S et T les intersections de la droite (d) avec le cercle Γ. Dans ce cas, il existe une involution projective de la droite (d) qui échange P avec lui-même, X avec Y ainsi que S avec T.

Démonstration. La preuve est juste une application dégénérée du troisième Théorème de Desargues pour le quadrilatère $AABB$ avec les coniques, $(AA) \cup (BB)$, $(AB) \cup (AB)$ ainsi que Γ (en pratique on construit $AA'BB'$ et on fait tendre A' et B' vers A et B respectivement). $\square$

On revient maintenant à l'exercice, on note alors S et T les intersections de Γ et de (d), ainsi que Z l'intersection de la tangente en C à Γ avec la droite (d), on note également. De plus, d'après l'énoncé, l'intersection de la tangente en D à Γ avec (d) est $\infty_{(d)}$. Ainsi d'après le lemme ci-dessus, on montre qu'il existe une involution de la droite (d) qui échange S avec T, Z avec $\infty_{(d)}$, P avec P ainsi que U avec V.

Solution de l'exercice 18

On va commencer par une chasses aux angles pour essayer de trouver tous les angles de la figure en supposant le Théorème de Morley est vérifié. On note $\alpha = \widehat{ZAY}$, $\beta = \widehat{XBZ}$ et $\gamma = \widehat{YCX}$. Remarquons que l'on a les identités suivantes.

$$\frac{ZX}{XB} = \frac{\sin(\beta)}{\sin(\widehat{BZX})},$$

$$\frac{CX}{XY} = \frac{\sin(\widehat{XYC})}{\sin(\gamma)},$$

$$\frac{XB}{XC} = \frac{\sin(\gamma)}{\sin(\beta)}.$$

On les multiplie ensemble pour obtenir l'identité suivante $1 = \frac{\sin(\widehat{XYC})}{\sin(\widehat{BXZ})}$, ainsi les angles $\widehat{XYC}$ et $\widehat{BXZ}$ sont égaux. Notons leur valeur commune ϕ et notons également $\psi = \widehat{AZY} = \widehat{CXY}$ ainsi que $\mu = \widehat{ZXB} = \widehat{AYZ}$. Calculons $\mu - \psi = 180 - \beta - \phi - 180 + \gamma + \phi = \gamma - \beta$ ainsi que autour de l'angle X, $\mu + \phi = 360 - 60 - 180 + \beta + \gamma$. En sommant ces deux égalités on obtient $\mu = 60 + \gamma$, on a de même $\phi = 60 + \alpha$ et $\psi = 60 + \beta$. On a triangulé notre figure et on peut maintenant appliquer le lemme 32 successivement pour reconstruire la figure de départ. Sur la nouvelle figure les angles du triangle ABC sont alors bien 3α, 3β et 3γ, ce qui conclut bien que la nouvelle figure est semblable à celle que l'on voulait obtenir.

Solution de l'exercice 19

Comme la conclusion est symétrique il suffit de montrer que si X_1, X_3 et E sont alignés alors X_2, X_4 et F le sont également. On note Y_1, Y_2, Y_3 et Y_4 les points de tangences respectifs de ω_1, ω_2, ω_3 et ω_4 (ω_i est le cercle inscrit dont le point de tangence est X_i) sur les côtés AB, BC, CD et DA. On note aussi Z_1, Z_2, Z_3 et Z_4 les points de tangences respectifs de ω_1, ω_2, ω_3 et ω_4 sur les côtés CD, DA, AB et BC.

On prend γ_1 le cercle tangent extérieurement à ω_1 en X_1 et à ω_3 en T, alors d'après la Remarque 27, on a $X_3 = T$. Donc γ_1 est tangent au cercle ω_1 en X_1 et ω_3 en X_3. les tangentes communes sont donc (BC) et (AD).

On effectue maintenant une chasse aux tangentes. On obtient ainsi $FX_1 = FX_3$, on sait aussi que $FY_2 = FZ_2$ et $FZ_4 = FY_4$, donc $X_1Y_2 = X_3Z_2$ et $Z_4X_1 = X_3Y_4$. Or, $Z_4X_1 = Y_1X_4$, $Y_4X_3 = Z_3X_4$ donc $Y_1Z_3 = 2Z_4X_1$. De la même manière, $Z_1Y_3 = 2X_1Y_2$. On a cependant $Z_1Y_3 = Y_1Z_3$ ce qui montre que $Z_4X_1 = X_1Y_2$, ou encore $Y_1X_4 = Z_1X_2$ et donc $EX_4 = EX_2$. Il existe donc un cercle γ_2 tangent à (AB) et (CD) en X_4 et X_2. De nouveau d'après la Remarque 27, les points X_4, X_2 et F sont bien alignés.

Solution de l'exercice 20

On note H_B et H_C les pieds des hauteurs issues de B et C respectivement dans ABC. On note A' le symétrique de H par M et H' le symétrique de H par F. D'après le Lemme 11, on sait que les points D, H, M et A' sont alignés et que $[AA']$ est un diamètre du cercle circonscrit au triangle ABC.

On veut démontrer que les cercles circonscrits aux triangles DKH et FKM sont tangents, on pense donc tout naturellement à regarder le deuxième cercle passant par F et M qui est tangent au cercle circonscrit de DKH (ce genre de raisonnement vient d'un problème de lors de la définition, si on veut en effet définir le cercle passant par F et M et qui est tangent au cercle circonscrit de DKH il faut faire attention parce qu'il y en a deux, introduire la deuxième définition est souvent utile), il s'agit en fait du cercle HFM en effet les diamètres des cercles circonscrits aux triangles DKH et HFM, respectivement $[DH]$ et $[HM]$, sont alignés. On prend la tangente commune à ces deux cercles en H, il s'agit aussi de la perpendiculaire en H à la droite (HM). Cette droite recoupe (BC) en un point que l'on notera X.

On veut montrer que X est sur la tangente commune aux cercles circonscrits aux triangles DKH et FKM (vrai d'après l'énoncé !).

Soit Y le milieu de $[DH]$ la projection orthogonale de H sur (XY) est notée Z, on note T le symétrique de H par Z, alors $YD = YH = YT$ ce qui montre que $\widehat{DTH} = 90$. On sait que $XZ \cdot XY = XH^2 = XF \cdot XM$ donc les points Y, Z, M et F sont cocycliques. l'homothétie de centre H et de facteur 2 envoie Y sur D, Z sur T, M sur A' et F sur H', cela montre que le point T est cocyclique avec D, H' et A' donc que T est également sur le cercle ABC d'après ce qui est dit au dessus. Tout cela démontre que $T = K$. On peut maintenant conclure avec un peu de puissance du point.

On sait que $XK = XH$ par construction du point $T = K$. Donc, $XK^2 = XH^2 = XF \cdot XM$ ce qui montre que la droite (XK) est tangente au cercle KFM de plus par symétrie axiale d'axe (XY) la droite (XK) est tangente au cercle DKH. Cela montre donc que les cercles DKH et FKM sont tangents.

Solution de l'exercice 21

On note α, β et γ les angles du triangle ABC. On va montrer que dans les triangles NBM et NCM les points I_1 et I_2 sont conjugués isogonaux (21). En effet, on remarque dans un premier temps que $\widehat{I_1MI_2} = 90$, donc $\widehat{NMI_1} = 90 - \widehat{I_2MN} = \widehat{CMI_2}$. On montre également par une petite chasse aux angles que $\widehat{NCI_2} = \widehat{NCM} - \widehat{MCI_2} = 90 - \widehat{CNM} - \frac{\gamma}{2} = 90 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma}{2} = \frac{beta}{2} = \widehat{MBI_1}$. Cela montre bien que I_1 et I_2 sont conjugués isogonaux. Ainsi, $\widehat{I_1NI_2} = \widehat{I_1NM} + \widehat{MNI_2} = \widehat{I_1NM} + \widehat{BNI_1} = \alpha/2 = \widehat{I_1AI_2}$. Cela montre bien que les points A, N, I_1 et I_2 sont cocycliques.

Solution de l'exercice 22

On va utiliser le Lemme de Sawayama (41) pour introduire des points intéressants. Soit I le centre du cercle inscrit AED. On note B' et C' les points de tangence des cercles ω_b et ω_c avec (BC). On sait alors que la droite $(B'X)$ et $(C'Y)$ passent par I. On note B'' et C'' les intersections de la droite (DE) avec les droites B'' et C''. Considérons maintenant J le centre du cercle inscrit au triangle $AB''C''$. On remarque que les angles $\widehat{I'B''A}$ et $\widehat{IXA}$ sont égaux et de même pour les angles $\widehat{I_1YA}$ et $\widehat{IC''A}$. Ainsi, $(IX)//(I'B'')$ et $(IY)//(I'C'')$, ainsi d'après le Théorème de Thalès (ou bien d'après le Premier Théorème de Desargues) on conclut bien que $(XY)//(B''C'')$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 23

On note ω_i le cercle inscrit de centre I_i et de rayon r_i, on note aussi O_A, O_B, O_C et O_D les centres des cercles AI_bI_d, BI_aI_c, CI_bI_d et DI_aI_c. On va commencer par remarquer, d'après le

Lemme 36 que les cercles ω_a et ω_c sont tangents tous les deux en le même point sur (AC), nommé T.

Alors les points I_a, T et I_c sont alignés et $(I_aI_c) \perp (BD)$. On note $\widehat{ABT} = 2\phi$ et $\widehat{TBC} = 2\mu$, alors $\widehat{ABI} = \phi + \mu$ et $\widehat{ABI_a} = \phi$, ce qui montre que $\widehat{I_aBI} = \mu$ et ainsi que les droites (BT) et (BI) sont conjuguées isogonales dans le triangle BI_aI_c, or (BT) est la hauteur dans ce même triangle et son conjugué est la droite passant par B et le centre du cercle circonscrit (Remarque 22). Donc O_B est sur la droite (BI). De la même manière O_D se trouve sur la droite (DI). On sait aussi que $(O_BO_D) \perp (I_aI_c)$ donc $(DB)//(O_BO_D)$.

On va maintenant démontrer que la droite (IY) bissecte l'angle $\widehat{BID}$. X se trouve sur la droite O_BO_D de telle sorte que $\dfrac{XO_B}{XO_D} = \dfrac{r_b}{r_d}$, par le lemme de la bissectrice on veut montrer que $\dfrac{IO_B}{IO_D} = \dfrac{r_b}{r_d}$, or comme $(DB)//(O_BO_D)$ on a $\dfrac{IO_B}{IO_D} = \dfrac{IB}{ID}$. On va maintenant calculer

$$X := \frac{IB}{ID} = \frac{\sin(\widehat{IAB}) \cdot AI}{\sin(\widehat{ABI})} \frac{\sin(\widehat{ADI})}{\sin(\widehat{IAD}) \cdot AI},$$

d'après la loi des sinus (16) dans les triangles IAB et IAD, $X = \dfrac{\sin(\widehat{ADI})}{\sin(\widehat{ABI})}$. On trouve d'autre part, d'après la dernière partie de la Loi de Sinus,

$$X' := r_b \cdot \frac{1}{r_d} = \frac{2I_aI_c}{\sin(\widehat{I_aDI_c})} \cdot \frac{\sin(\widehat{I_aBI_c})}{2I_aI_c} = \frac{\sin(\widehat{I_aDI_c})}{\sin(\widehat{I_aBI_c})},$$

or, $\widehat{ADI} = \dfrac{\widehat{ADC}}{2} = \widehat{I_aDI_c}$ et également $\widehat{ABI} = \widehat{I_aBI_c}$ ce qui montre que $X = X'$ et ainsi que la droite (IY) est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{BID}$.

On montre de la même manière que la droite (XI) est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{AIC}$. Dans le but de démontrer que $\widehat{XIY} = 90$ il faut démontrer que les angles $\widehat{AIC}$ et $\widehat{BID}$ ont les mêmes bissectrices. Il faut donc montrer que $(DI, IC) = (AI, IB)$. Ou encore que $(CI, ID) + (AI, IB) \equiv 0 \pmod{180}$. On va démontrer cette dernière relation par une chasse aux angles pas trop compliquée, on appelle E le point d'intersection des droites (AD) et (BC), Alors $(AI, IB) = 90 + \dfrac{(BE, EA)}{2}$ et $(CI, ID) = 90 - \dfrac{(BE, EA)}{2}$, donc $(AI, IB) + (BE, EA) = 180 \equiv 0 \pmod{180}$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 24

Avec $\{I, J, K\}$ une permutation de $\{A, B, C\}$, on note T_I le symétrique de T par la droite (JK), on note X_I l'intersection des droite (t_J) et (t_K). D'après une homothétie de facteur 2 de la droite de Simson on remarque que les points T_A, T_B et T_C sont alignés.

Lemme 54.
Les points T_A, T_B, C et X_C sont cocycliques.

On va compose la symétrie d'axe (AC) et la symétrie d'axe (BC), on appelle cette composition R, la composition de ces deux symétrie axiale est une rotation d'angle $2\widehat{ACB} = 2\gamma$. R envoie t_b sur t_a et plus précisément T_B sur T_A. Ainsi par nature de R on trouve

$(T_BC, CT_A) = 2\gamma$ mais aussi X_C étant l'intersection de t_b et t_c que $(T_BX, XT_A) = (t_b, t_c) = 2\gamma$, donc $(T_BC, CT_A) = (T_BX, XT_A)$ ce qui montre bien que les points T_B, T_A, C et X_C sont cycliques, on note ω_c le cercle circonscrit de ce quadrilatère.

On définit de la même manière ω_a et ω_b.

Lemme 55.
Les cercle ω_a et ω_c se coupent sur Ω

On note X la deuxième intersection des cercle ω_a et ω_c autre que T_B. On veut monter que $(AX, XC) = (AB, BC)$. Or $(AX, X) = (AX, XT_B)+(XT_B, XC) = (AT_C, T_CT_B)+(T_AT_B, T_AC)$ On note maintenant Y_B l'intersection des droites (T_CA) et (T_AC). Alors comme les points T_A, T_B et T_C sont alignés on trouve $(AT_C, T_CT_B) + (T_AT_B, T_AC) = (AT_C, T_CT_A) + (T_AT_C, T_AC) = (AT_C, T_AC) = (AY_B, Y_BC)$. On veut ainsi montrer que $(AY_B, Y_BC) = (AB, BC)$ ou encore que les points, A, B, C et Y_B sont cocycliques. Comme le point T est sur Ω, on trouve $(TC, CB) = (TA, AB)$ et par symétrie axiale on trouve $(TC, CB) = -(T_AC, CB)$ ainsi que $(TA, AB) = -(T_CA, AB)$. donc $(Y_BA, AB) = (T_CA, AB) = (T_AC, CB) = (Y_BC, CB)$ ce qui montre bien que le point Y_B se trouve sur Ω et donc que $(AY_B, Y_BC) = (AB, BC)$ et donc que X est sur Ω.

On remarque que dans le quadrilatère complet formé par les droites (t_a), $(t_b$, (t_c) et T_AT_C on a les cercles ω_a et ω_c qui contiennent le point de Miquel du quadrilatère donc X est aussi sur ω_b (trivial par argument de symétrie) mais également sur $X_AX_BX_C$ ainsi le point X est sur les deux cercles dont nous ovulons montrer la tangence il s'agit donc du point de tangence. on remarque que l'on a pas utilisé le fait que la droite t est tangente au cercle Ω.

On peut maintenant finir de deux manières :

a) On peut tout d'abord introduire la tangente (l) au cercle $X_AX_BX_C$ en X et montrer qu'elle est également tangente au cercle Ω. On a $(X_CX, l) = (X_CX_A, X_AX)$, comme les points X_A, T_B et X_C sont alignés on trouve $(X_CX_A, X_AX) = (T_BX_A, X_AX) = (T_BA, AX)$. On a aussi $(CX, X_CX) = (CT_B, X_CT_B) = -(CT, t)$ par symétrie axiale. $-(CT, t) = -(CA, AT) = (CA, T_BA)$ pr symétrie. Donc $(CX, l) = (CX, X_CX) + (X_CX, l) = (T_BA, AX) + (CA, T_BA) = (CA, AX)$ donc la droite l est tangente à Ω et à $X_AX_BX_C$ en X, ces deux cercles sont donc tangents.

b) On va utiliser que avant un état avancé de la preuve la condition que t est tangente à Ω n'est pas utile. Prenons maintenant une droite (t) qui n'est pas tangente à Ω mais qui coupe ce cercle en T et T', alors d'après ce que l'on a vu plus tôt on peut introduire X en correspondance à T comme fait précédemment, on peut aussi introduire X' pour le point T, on a montré que le cercle $X_AX_BX_C$ passe par X, il passe donc aussi par argument de symétrie par X'. Ainsi, les deux cercles $X_AX_BX_C$ et Ω ont X et X' en commun. On fait maintenant tourner la droite t autour du point t de tel sorte que T' se rapporte vers T. En même temps que T' se rapproche de T le point X' se rapproche du point X, on passe maintenant à la limite, lorsque $T' = T$ la droite t est tangente à Ω mais alors $X' = X$ donc les cercles $X_AX_BX_C$ et Ω sont alors tangents ce qui conclut.

Solution de l'exercice 25
On va appliquer un lemme des escargots. On veut donc montrer que pour 5 choix de distance sur la perpendiculaire issue de D, les trois droites sont concourantes et l'intersection se situe sur une même conique passant par A, B et C. Soit S l'intersection de la droite (AC) avec la perpendiculaire à (AB) issue de F, on note T la même intersection mais en échangeant les rôles de B et C dans la figure. Comme les points $STEF$ est cyclique et que $AE = AF$ on

obtient $FS = ET$, cela conclut que la conique passe bien par A, de la même manière elle passe par B et C. Avec une distance nulle l'intersection est le point de Nagel et avec les distance égale à $2r$ on obtient le point de Gergonne. Cela conclut.

Solution de l'exercice 26
On note $a = (BC)$, $b = (CA)$ et $c = (AB)$, ainsi que $a_1 = (AA_1)$, $a_2 = (AA_2)$, etc... On a alors $r_{bca_1} = \dfrac{\sin(c, a_1)}{\sin(b, a_1)} = \dfrac{CA_1 \cdot BA}{BA_1 \cdot CA}$, donc le Lemme 49 permet de montrer que les droites a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 et c_2 sont tangentes à une même conique, on conclut ensuite par le Théorème de Brianchon (39).

Solution de l'exercice 27
Lorsque l'on voit la conclusion de l'exercice on pense bien évidemment au Théorème de Brianchon (39). On veut donc démontrer que les droites (CA'), $(A'B)$, (BC'), $(C'A)$, (AB') et $(B'C)$ sont tangentes à une seule et même conique. On peut alors rester bloqué longtemps si on ne pense pas à ce 'trick' assez simple. On peut changer l'ordre des droites pour obtenir une autre concourance de droites (équivalente à la propriété de coconicité). On choisit par exemple l'ordre $(C'A)$, (CA'), (CB'), (BC'), (BA') et (AB'), dans ce cas le théorème de Brianchon nous dit que ces 6 droites sont tangentes à une seule et même conique si et seulement si les droites (AX), (BY) et (CZ) sont concourantes. Comme l'exercice est vrai cette dernière concourance doit également être vraie !

On peut maintenant démontrer la concourance de ces droites là, il s'agit d'un exercice traditionnel d'application du Premier Théorème de Desargues (40) puis du Théorème de Monge (25). On applique est effet le Premier Théorème de Desargues aux triangles ABC et XYZ, il faut alors montrer que les intersections des droites (AB) et (XY), (BC) et (YZ) ainsi que (CA) et (ZX) sont alignés. Cependant, d'après le Théorème de Monge les deux droites (AB) et (XY) passent toutes deux par le centre d'homothétie extérieure de ω_a et ω_b, c'est donc leur point d'intersection. Ainsi, les intersection des droites (AB) et (XY), (BC) et (YZ) ainsi que (CA) et (ZX) sont en fait les trois centres d'homothétie extérieure des cercles ω_a , ω_b et ω_c, bien alignés après une dernière application du Théorème de Monge.

5 Géométrie (Alexander)

Nous reproduisons ci-dessous le sujet distribué pendant la séance.

Échauffement

Exercice 1

Dans un triangle acutangle ABC, $\widehat{B} > \widehat{C}$, M est le milieu de $[BC]$, E le pied de la hauteur issue de B et F le pied de la hauteur issue de C, K est le milieu de $[ME]$, L est le milieu de $[MF]$ et T est un point du segment $[KL]$ tel que $(TA)//(BC)$. Montrer que $TA = TM$.

Exercice 2

Soit D, E, F les pieds des hauteurs dans un triangle non équilatéral ABC issues de A, B, C respecrivement. Le centre du cercle circonscrit de ABC est noté O. Montrer que les cercles AOD, BOE et COF s'intersectent en un point X autre que O.

Sur les inversions

Exercice 3

Soit ABC un triangle d'othocentre H et dont les pieds des hauteurs issues A, B, C sont D, E, F respectivement. Donner les images des points mentionnés par l'inversion de centre C et de rayon $\sqrt{CH \cdot CF}$.

Exercice 4

Soit ABC un triangle dont le centre du cercle circonscrit est O. Par l'inversion de centre C et de rayon 1, les images de O, A, B sont O', A', B' respectivement. Montrer que $A'B'$ est la médiatrice de $O'C$.

Exercice 5

Soit ABC un triangle et D, E, F les points de contact du cercle inscrit. Montrer que l'inversion par rapport au cercle inscrit envoie le cercle circonscrit de ABC sur le cercle d'Euler de DEF.

Exercice 6

Soit $ABCD$ un quadrilatère dont les diagonales AC et BD sont perpendiculaires et s'intersectent en E. Montrer que les réflexions de E par rapport à AB, BC, CD et DA sont cocycliques.

Exercice 7

Soit ABC un triangle dont le cercle circonscrit est Γ. La bissectrice intérieure de $\widehat{A}$ intersecte BC en D et Γ en E. Le cercle de diamètre DE rencontre Γ en F. Montrer que AF est une symédiane issue de A du triangle ABC.

Exercice 8

Soient ω_1 et ω_2 deux cercles orthogonaux et soit O le centre de ω_1. Soit AB un diamètre de ω_1 tel que B se trouve à l'intérieur de ω_2. Les deux cercles passant par A et O et tangents à ω_2 touchent ω_2 en F et G. Montrer que F, O, G, B sont cocycliques.

Droite et cercle d'Euler

Exercice 9

Soit ABC un triangle non équilatéral dont le centre du cercle circonscrit est O et le centre du cercle inscrit est I. Soit $A'B'C'$ le triangle obtenu avec les bissectrices extérieures du triangle ABC (tels que A est opposé à A', B à B' et C à C'). Montrer que (OI) est la droite d'Euler du triangle $A'B'C'$.

Exercice 10

Soit ABC un triangle, A', B', C' les milieux des côtés BC, CA, AB respectivement et P, Q, R les pieds des hauteurs issues de A, B, C respectivement. Soit S_1 le point d'intersection de PQ et $A'C'$ et S_2 le point d'intersection de PR et $A'B'$. Montrer que les points A, S_1, S_2 sont alignés.

Exercice 11

Soit $ABCD$ un quadrilatère inscriptible avec $AB < CD$, dont les diagonales s'intersectent au point F et AD, BC s'intersectent au point E. Soient K, L les projections de F sur AD, BC respectivement, et M, S, T les milieux des côtés EF, CF, DF. Montrer que le second point d'intersection des cercles circonscrits des triangles MKT et MLS se trouve sur le côté CD.

Symédianes

Exercice 12

Soit ABC un triangle et $\mathcal{C}$ son cercle circonscrit. Soient A', B', C' les intersections des tangentes à $\mathcal{C}$ en A, B, C respectivement avec BC, AC, AB respectivement. Montrer que A', B', C' sont alignés.

Exercice 13

Soit ABC un triangle et $\mathcal{C}$ son cercle circonscrit. Soit A' le point d'intersection des tangentes à $\mathcal{C}$ en B et en C. Soit A'' le milieu de $[BC]$ et C'' le milieu de $[AB]$. Soit D le pied de la hauteur issue de A et E le pied de la hauteur issue de B. Montrer que $AA', A''C'', ED$ sont concourantes.

Exercice 14

Soit ABC un triangle, A' le pied de la hauteur issue de A, M le milieu de $[AA']$, I le milieu de $[BC]$ et K le point de Lemoine de ABC. Montrer que I, K, M sont alignés.

Exercice 15

Soit ABC un triangle, A' le milieu de $[BC]$, A'' le symétrique de A par rapport à A', E le projeté orthogonal de A sur BA'', F le symétrique de E par rapport à B et D le pied de la hauteur issue de A. Soit P le point d'intersection de DA'' et FC. Montrer que AP est la symédiane de ABC issue de A.

Exercice 16

Soit ABC un triangle et K un point. Soient P, Q, R les projetés orthogonaux de K sur BC, CA, AB respectivement. Montrer que K est le point de Lemoine de ABC SSI K est le centre de gravité de PQR.

Où trouver les solutions

Les exercices de la partie échauffement sont tirés du chapitre sur les axes radicaux du livre d'Evan Chen. Les exercices de la partie inversions sont tirés du chapitre sur les inversions du livre d'Evan Chen. Les parties sur les droite et cercle d'Euler ainsi que sur les symédianes correspondent à la séance de géométrie donnée au groupe D en 2020 par moi-même.

6 Suites/inclassables en algèbre (Tristan et Aurélien)

Introduction : Ce qui suit est un TD d'algèbre destiné au groupe D. La résolution de ces exercices suppose une connaissance des techniques classiques. Chaque exercice est accompagné d'une estimation de la difficulté (F facile, M moyen, D difficile).

Exercices

Exercice 1 (A1 21,F-M)
Soit n un entier et soit A un sous ensemble de $\{0, 1, 2, ..., 5^n\}$ constitué de $4n + 2$ nombres. Montrer qu'il existe $a < b < c$ tels que $c + 2a > 3b$.

Exercice 2 (A2 21, F-M)
Trouver les entiers $n \geqslant 1$ tels que

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \left\lfloor \frac{ij}{n+1} \right\rfloor = \frac{1}{4}n^2(n-1).$$

Exercice 3 (A3 21, M)
Soit $n \geqslant 1$ trouver la valeur minimale de $\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \left\lfloor \frac{a_i}{i} \right\rfloor$, où $(a_1, a_2, ..., a_n)$ est une permutation de $(1, 2, ..., n)$.

Exercice 4 (A4 21, D)
Montrer que pour tous $a_1, a_2, ...a_n \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{|a_i - a_j|} \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{|a_i + a_j|}$$

Exercice 5 (A6 21, D)

Soit n un entier et $A_0, A_1, A_2, ..A_{n-1}$ des ensembles d'entiers relatifs de sommes $\sum A_i = n^i$. Montrer que le cardinal de $\uplus_i A_i$ est au moins $n/2$.

Exercice 6 (A1 20, F-M)
Soit $N = 2^n$ pour un entier $n \geqslant 1$. Trouver les réels a_n minimaux tels que l'on ait

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt[N]{\frac{x^{2N}+1}{2}} \leqslant a_n(x-1)^2 + x.$$

Exercice 7 (A2 20, M-D)
Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des polynômes en x, y, z à coefficients entiers. Soit $\mathcal{B}$ le sous ensemble de $\mathcal{A}$ composé des polynômes pouvant s'exprimer sous la forme :

$$(x+y+z)P(x,y,z) + (xy+zy+zx)Q(x,y,z) + xyzR(x,y,z), P, Q, R \in \mathcal{A}.$$

Trouver le n minimal tel que pour tous (i,j,k) avec $i+j+k \geqslant n$, on a $x^i y^j z^k \in \mathcal{B}$.

Exercice 8 (A5 20, D)
Aurélien est magicien. Il choisit un entier $n \geqslant 1$ et $2n$ réels $x_1 < x_2 < ... < x_{2n}$ et les annonce au public. Tristan choisit secrètement un polynôme P de degré n et de coefficients réels. Tristan calcule et écrit dans l'ordre croissant $\{P(x_1), P(x_2), ..., P(x_{2n})\}$ au tableau. Puis Aurélien annonce le polynôme P.
Aurélien peut il trouver une stratégie pour faire marcher son tour de magie ?

Exercice 9 (A3 19, M)
Soit $n \geqslant 3$ et $(a_1, a_2, ..., a_n)$ une suite strictement croissante de réels strictement positifs de somme égale à 2. Soit $X \subset \{1, 2, ..., n\}$ minimisant $\left|1 - \sum_{i \in X} a_i\right|$. Montrer qu'il existe $(b_1, b_2, ..., b_n)$ une suite strictement croissante de réels strictement positifs telle que

$$\sum_{i \in X} b_i = 1.$$

Exercice 10 (A4 19, D)
Soit $n \geqslant 2$, et soient $a_1, ..., a_n$ des réels tels que $a_1 + a_2 + ... + a_n = 0$. Soit

$$A = \{(i,j) | 1 \leqslant i < j \leqslant n, |a_i - a_j| \leqslant 1\}.$$

Montrer que si A est non vide, alors $\sum_{(i,j) \in A} a_i a_j < 0$.

Exercice 11 (A6 19, D)
Soit P un polynôme à coefficients réels en 3 variables. Supposons que

$$P(x,y,z) = P(yz - x, y, z) = P(x, xz - y, z) = P(x, y, xy - z)$$

Montrer qu'il existe un polynôme à coefficients réels en une variable F tel que

$$P(x,y,z) = F(x^2 + y^2 + z^2 - xyz)$$

Exercice 12 (BMO A4 21, F-M)
Soient f, g des fonctions de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$. Salomé se déplace sur un grille d'entiers. Sa position initiale est $(x_0, y_0) = (0, 0)$, et pour chaque $n \geq 1$, elle saute de $f(n)$ dans une direction et de $g(n)$ dans l'autre direction, dans un sens ou dans l'autre.

$$(x_n, y_n) - (x_{n-1}, y_{n-1}) = (\pm f(n), \pm g(n)) \text{ ou } (\pm g(n), \pm f(n)),$$

soit 8 sauts possibles. Salomé peut-elle forcément repasser par $(0,0)$ une infinité de fois si

— (a) f, g sont dans $\mathbb{Z}[X]$?

— (b) f, g sont des fonctions quelconques ?

Exercice 13 (BMO A1 19, F)
Tristan choisit un entier strictement positif qu'il écrit au tableau. Puis il rajoute successivement des entiers strictement positifs de manière que le k-ième entier qu'il rajoute (sans conter l'entier initial) soit le plus petit qui rende la somme de tous les nombres du tableau divisible par k. Montrer que Tristan finit par écrire le même entier en boucle.

Solutions

Les exercices précédents sont issus des listes courtes des IMO (ou BMO). On peut retrouver les solutions officielles sur https ://www.imo-official.org/problems.aspx ?language=fr ou (aops.com).

4 Entraînement de fin de parcours

Veuillez rédiger chaque problème sur une copie différente. N'oubliez pas d'écrire votre nom et chaque numéro d'exercice. Les calculatrices sont interdites.

Pour les exercices de géométrie, on attend de l'élève une figure propre, grande, où la propriété que l'on cherche à démontrer est apparente : s'il faut démontrer que des points sont alignés (ou cocycliques), il faut tracer la droite (ou le cercle) qui passe par ces points.

Exercice 1
Soient x_1 et x_2 les deux solutions de l'équation polynômiale suivante $X^2-6X+1=0$. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, le nombre $x_1^n + x_2^n$ est un entier non divisible par 5.

Exercice 2
Soit ABC un triangle, on note D, E et F les pieds de hauteurs issues de A, B et C, ainsi que O et H les centres du cercle circonscrit et orthocentre du triangle ABC. On note également X le symétrique de A par rapport à la droite (EF). Montrer que les points O, H, D et X sont cocycliques.

Exercice 3
Soit ABC un triangle, M le milieu du segment $[BC]$, on note E et F deux points des demi-droites $[AB)$ et $[AC)$ de telle sorte que $2\widehat{AEC} = \widehat{AMC}$ et que $2\widehat{AFB} = \widehat{AMB}$. On note X et Y les intersections du cercle circonscrit au triangle AEF avec la droite (BC). Montrer que $XB = YC$.

Exercice 4
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui satisfont

$$f(x + yf(x)) + f(xy) = f(x) + f(2022y),$$

pour tous les nombres réels x et y.

Solution de l'exercice 1

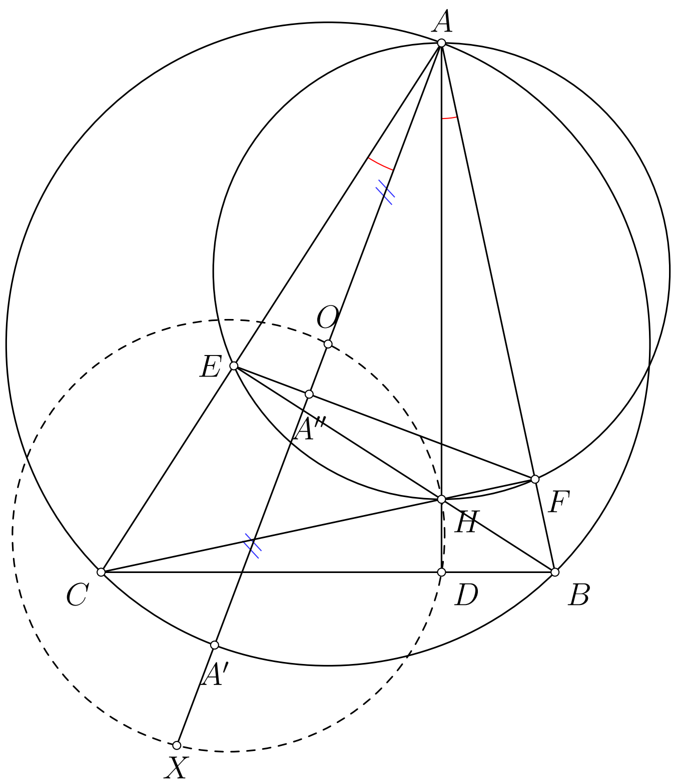
Notons $a_n = x_1^n + x_2^n$. On va montrer dans un premier temps une relation de récurrence sur la suite $(a_n)_n$. Pour cela on remarque que pour $n \geqslant 2$, on a l'identité suivante

$$x_1^n + x_2^n = (x_1 + x_2)(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}) - x_1 x_2 (x_1^{n-2} + x_2^{n-2}).$$

Avec les relations de Viète ($x_1 x_2 = 1$ et $x_1 + x_2 = 6$) on peut transformer cela en $a_n = 6a_{n-1} - a_{n-2}$. Puisque $a_0 = 2$ et que $a_1 = x_1 + x_2 = 6$, on obtient directement que la suite (a_n) est entière.

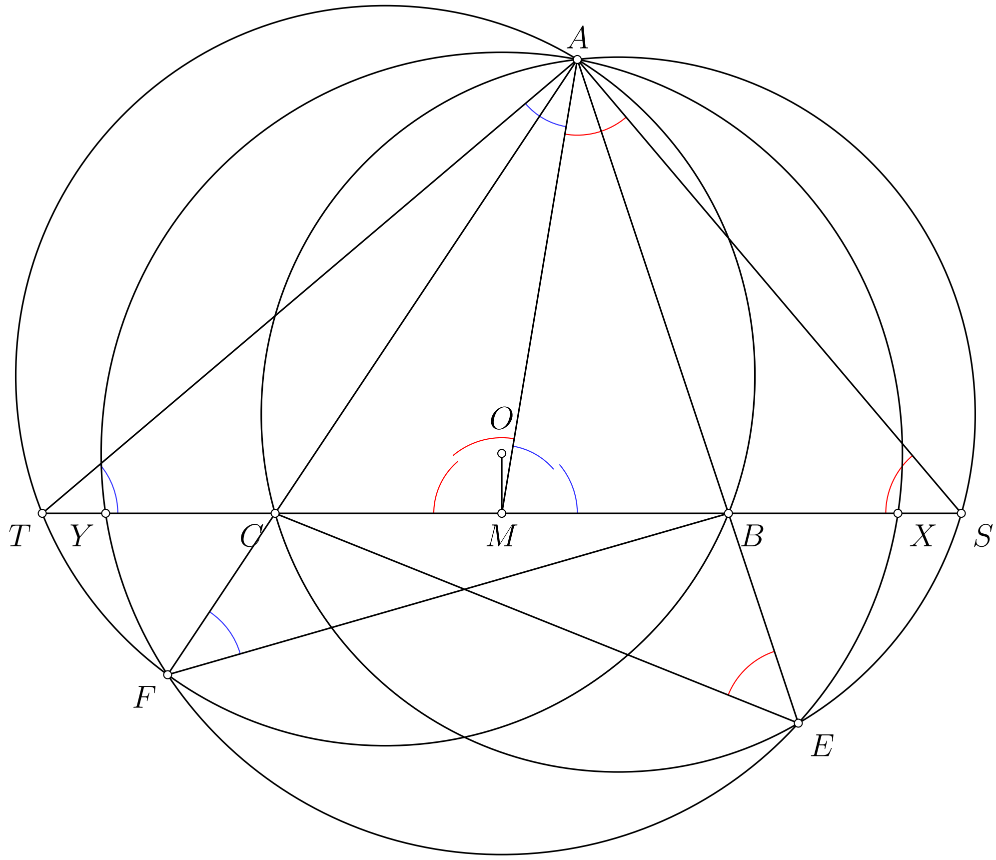
Regardons maintenant la suite $(a_n)_n$ modulo 5. On note $(b_n)_n$ cette suite. La relation est alors $b_n \equiv b_{n-1} - b_{n-2} \pmod 5$. On va procéder par l'absurde pour montrer que cette suite ne peut jamais s'annuler modulo 5. Supposons par l'absurde qu'elle s'annule pour la première fois au rang $n \geqslant 3$ (b_0 et b_1 ne sont pas nuls modulo 5 et non égaux). Dans ce cas $b_{n-1} \equiv b_{n-2} \pmod 5$, calculons alors b_{n-3}, on a $b_{n-1} \equiv b_{n-2} - b_{n-3} \pmod 5$, ainsi $b_{n-3} \equiv 0 \pmod 5$ ce qui est la contradiction recherchée.

Solution de l'exercice 2



On va considérer l'inversion de centre A et de rayon $r = \sqrt{AB \cdot AF}$. Il a été vu en TD que cette inversion échange les points B et F ; E et C ainsi que H et D. On veut montrer que les points O et X sont également échangés par cette inversion. Soit A' le point diamétralement opposé à A dans le triangle ABC, la droite $(A'OA)$ est orthogonale au cercle circonscrit du triangle ABC, après l'inversion elle sera donc échangé par une droite orthogonale à la droite (EF). Le point A' est donc échangé avec A'' la projection orthogonale de A sur la droite (EF) et O est donc échangé avec le point X. Cela montre que A, O et X sont alignés et de plus d'après la propriété des inversions $r^2 = AO \cdot AX = AH \cdot AD$.

Solution de l'exercice 3



On va considérer le cercle passant par les points A, C et E ainsi que le cercle passant par les points A, B et F. On note leurs seconds points d'intersection avec la droite (BC) respectivement S et T. On va montrer dans un premier temps que le cercle passant par les points A, S et T est de centre M.

Mais par une courte chasse aux angles, $\widehat{AST} = \widehat{AET} = \frac{\widehat{AMT}}{2}$, on calcule également $\widehat{SAM} = 180° - \widehat{ASM} - \widehat{AMS} = 180° - \widehat{SMA} - \frac{\widehat{AMT}}{2} = \frac{\widehat{AMT}}{2}$, ainsi le triangle AMS est isocèle en M. De la même manière le triangle AMT est isocèle en M. Cela conclut le fait que le cercle circonscrit du triangle AST a pour centre M.

Pour conclure on remarque que la puissance de B par rapport au cercle circonscrit du triangle AEF est $BA \cdot BE = BC \cdot BS$ et la puissance de C par rapport à au cercle circonscrit du triangle AEF est $CA \cdot CF = CT \cdot CB = BC \cdot BS$. Donc B et C la même puissance par rapport au cercle AEF, ils sont donc à égale distance du centre du cercle circonscrit du triangle AEF. La médiatrice de $[XY]$ est donc la même que la médiatrice de $[AB]$, d'où la conclusion de l'exercice.

Solution de l'exercice 4

Soit f une solution éventuelle de l'équation.

En remplaçant x par 2022 dans l'équation, on trouve

$$f(2022 + yf(2022)) = f(2022)$$

Si $f(2022) \neq 0$, en posant $z = \frac{y}{f(2022)} - 2022$, qui parcourt l'ensemble des réels, on trouve $f(z) = f(2022)$ et f est une fonction constante. Réciproquement, les fonctions constantes sont solutions de l'équation.

On suppose dans la suite que $f(2022) = 0$. En posant $y = 1$ dans l'équation, on trouve $f(x + f(x)) = f(2022) = 0$ pour tout réel x. Supposons désormais que f admet une deuxième racine, notée a.

Si $a = 0$, alors en posant $x = 0$ dans l'équation, alors $f(2022y) = 0$ pour tout y, ce qui signifie que f est constante.

On suppose donc dans la suite que $a \neq 0, 2022$ et $f(0) \neq 0$. En posant $x = a$ dans l'équation, on trouve $f(ay) = f(2022y)$ pour tout y. On peut réécrire cette égalité $f(y) = f\left(\dfrac{2022}{a}y\right)$ par un changement de variable. L'idée est alors de récupérer une période de f. Pour cela, on pose $c = \dfrac{2022}{a}$ et on remplace successivement x par les valeurs z et cz, pour z variable. On obtient les deux égalités :

$$f(z + yf(z)) + f(zy) = f(z) + f(2022y)$$

$$f(cz + yf(cz)) + f(czy) = f(cz) + f(2022y)$$

En soustrayant et en utilisant que $f(cz) = f(z)$, on obtient

$$f(cz + yf(z)) = f(z + yf(z))$$

Prenons maintenant z non nul tel que $f(z) \neq 0$. Si un tel z n'existe pas, cela signifie que $f(z) = 0$ pour tout z non nul. Réciproquement, toute fonction nulle en dehors de 0 convient.

Dans le cas où un tel z existe, on trouve en remplaçant y par $\dfrac{y}{f(z)}$:

$$f(cz + y) = f(z + y)$$

et ce pour tout y. En particulier, en effectuant le changement de variable $y \leftarrow y - z$ et en posant $p = cz - z \neq 0$, on trouve

$$f(p + y) = f(y)$$

pour tout y réel. En remplaçant x par $x + p$ dans l'équation initiale, on obtient

$$f(x + p + yf(x + p)) + f(xy + py) = f(x + p) + f(2022y)$$

et en soustrayant l'équation initiale et en utilisant que $f(x + p) = f(x)$, on trouve $f(xy + py) = f(xy)$. En remplaçant x par $\dfrac{x}{y}$, on obtient $f(x + py) = f(x)$. En faisant varier y, on obtient que f est constante.

En conclusion, si f n'est pas constante, 2022 est l'unique racine de f. Mais alors $f(x + f(x)) = 0$ pour tout x implique que $x + f(x) = 2022$. Réciproquement $f(x) = 2022 - x$ convient.

Finalement, les solutions sont les fonctions constantes, la fonction $x \mapsto 2022 - x$ et les fonctions valant 0 en tout réel non nul.

5 Derniers cours

1 Théorie des modèles (Raphael D.)

Introduction à la logique et théorie des modèles.

Qu'est ce qu'une preuve mathématique ? Les mathématiques sont elles cohérentes ? Peut-on expliquer un théorème à un ordinateur ? le vérifier ? le découvrir ? Voici quelques unes des questions (très difficiles mais fondammentales) qui ont motivé ou motivent toujours les mathématiciens travaillant en logique.

Une idée très importante ici est qu'il faut distingué "la preuve formelle" et la "réalité mathématique". L'approche standard d'un mathématicien est qu'il a un objet mathématique, par exemple un ensemble d'entier, une fonction,... qu'il cherche à comprendre, caractériser, obtenir des propriétés,... Certaines de ces propriétés sont vraies, certaines sont fausses : le but du jeu est de savoir lesquelles. Pour cela on utilise des preuves formelles. Une preuve formelle c'est d'abord un ensemble de règles de déduction, quelques énoncés de base (axiomes) et ensuite une suite d'énoncé dont chaque énoncé peut se déduire à partir des énoncés précédents en utilisant une des règles de déduction. "Formelle" ici signifie qu'un énoncé n'est rien d'autre qu'une de suite de caractères. Les règles de déductions sont des opérations complètement automatiques. Par exemple les énoncés A et $A \Rightarrow B$ ensemble démontrent l'énoncé B. D'une certaine manière il n'y a pas besoin de comprendre ce que veulent dire ces énoncés pour écrire la preuve et vérifier qu'elle est correcte. Tout pourrait être lu et fait par une machine. Voici un autre exemple : à partir de "$a = b$" et quelques règles de calculs, on peut en déduire que "$a + b = 2a$". Encore une fois tout est "automatique" et il n'y a pas besoin de comprendre ce sont que $a, b, +, =$... On pourrait imaginer que a, b soient des entiers, des nombres complexes, des fonctions ou des objets bien plus compliqués. La conclusion est qu'il est possible d'avoir des preuves sans forcément avoir un objet mathématique sous jacent bien défini. D'où un nouveau sujet d'études : les preuves formelles. Voici alors quelques exemples de questions naturelles à se poser : Qu'est ce qu'un "énoncé mathématique syntaxiquement correct" ? Quelles sont les bonnes règles de déductions ? Quelles sont les axiomes à choisir si je veux faire de l'arithmétique ? de la géométrie ? Est ce que je ne vais pas démontrer quelque chose et son contraire ? Si j'ai quelques axiomes, est ce qu'il existe un objet mathématique sous jacent ? Pour chacunes des propriétés de cet objet, peut-on avec démontrer qu'elle est vrai ou qu'elle est fausse à partir de mes quelques axiomes ?...

2 Un théorème sur les collisions de billards (Baptiste)

– Résumé du cours –

L'objectif de ce cours était de démontrer le Théorème qui suit.

Théorème 1 (D. Burago, S. Ferleger et A. Kononenko, 1998)**.**
Soit $T \subset \mathbb{E}_m$ un billard formé par n murs convexes. On suppose que les murs de T ont un point intérieur commun et que toutes leurs intersection sont des coins ϵ-large. Alors le nombre de collisions d'une trajectoire dans T est borné par un nombre $N_{\epsilon,n}$ ne dépendant uniquement de ϵ et de n.

De plus,

$$N_{\epsilon,n} \leqslant \left(\left\lceil \frac{\phi}{\epsilon} \right\rceil + 1 \right)^{n^2}.$$

Pour cela on s'est appuyé sur le livre de S. Alexander, V. Kapovitch, A. Petrunin, *Invitation to Alexandrov geometry : $CAT(0)$ spaces*. Le livre étant incompréhensible sans un niveau minimum en topologie, l'auteur a réécrit une partie du livre pour des besoins de compréhension des élèves. On a ainsi remplacé à chaque fois que nécessaire la notion de "proper length space" par celle d'espace géodésique plus facilement compréhensible sans un bagage en topologie plus important.

On donne maintenant le plan suivie pendant le cours avec une brève description du contenu de chaque section.

I. Quelques définitions.

1. Les espaces métriques.

Définition des *espaces métriques* ainsi que définition de la métrique *produit* ainsi que la métrique sur le *cône* d'un espace métrique.

2. Les géodésiques.

Définition des *géodésiques* globale et locale, on définit également les *triangles*, les *coins* et les ensembles *convexes* dans le cadre des espaces métriques.

II. On rentre un peu plus dans le sujet.

1. Les triangles modèles.

On définit la notion de *triangle modèle*, il s'agit de prendre un triangle d'un espace métrique X et de considérer le triangle qui a les côtés de mêmes longueurs dans $\mathbb{R}^2$.

2. Les espaces $CAT(\kappa)$.

On définit maintenant les *comparaisons $CAT(0)$ et $CAT(1)$*, il s'agit d'une manière d'appréhender la notion de courbure dans des espaces métriques généraux (sans structure de variétés différentielles). Si toutes les comparaisons possibles sont $CAT(0)$, alors on dit que l'espace est $CAT(0)$. Moralement, un espace n'est pas $CAT(0)$ si on peut trouver un petit bout d'espace qui ne peut pas être aplati sur le plan, par exemple un bout de sphère ne peut pas être aplati sur le plan sans déchirures.

3. Les triangles fins.

on définit la notion de *triangle fin*, un triangle $[pqr]$ est fin si le triangle modèle élargi les distances sur le périmètre. On montre qu'être un espace $CAT(0)$ revient à n'avoir que des triangles fins. Cela nous permet de montrer que dans les espaces géodésiques $CAT(0)$, les géodésiques sont uniques, de plus chaque géodésique locale est en fait une géodésique globale. On montre ensuite le lemme de succession.

III. Le recollement d'espaces et ses propriétés.

1. Le recollement de Reshetnyak.

On définit le *recollement de Reshetnyak*. Si l'on recolle $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$, deux espaces $CAT(0)$, alors le recollement est également $CAT(0)$.

2. La pâte feuilletée de Reshetnyak.

   On définit la notion de *pâte feuilletée*. Une pâte feuilletée est une suite de recollement d'espaces $\mathbb{R}^n$ selon un tableau d'ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$. Une pâte feuilletée est toujours un espace $CAT(0)$.

3. Un peu de travail sur les coins.

   On montre qu'un tableau assez long (en fonction d'un certain angle) composé d'une alternance de deux ensembles convexes ayant un point en commun donne une pâte feuilletée ayant une propriété utile (*end-to-end convex*).

4. Les billards.

   On relie la notion de *trajectoire dans un billard* à une notion de géodésique dans un espace particulier que l'on construit nous même. Il s'agit d'utiliser plusieurs copies de $\mathbb{R}^n$ et de passer d'une copie à la suivante à chaque rebond. Le résultat d'une trajectoire donne une trajectoire dans une pâte feuilletée qui est une géodésique locale. Comme l'espace est $CAT(0)$ la géodésique est globale. On montre ensuite que l'espace que l'on construit ne peut pas être "end-to-end convex" ce qui est une contradiction si la trajectoire a trop de rebond.

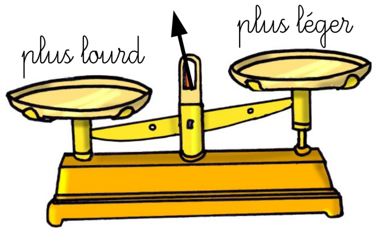
VII. Les soirées

1 Conférence du 16 août : "Tris, comparaisons et efficacité"

Pendant ses vacances à Valbonne, Martin le numismate a acheté n pièces de monnaie, qu'il a alignées de gauche à droite sur une table. Elles se ressemblent beaucoup, mais sont toutes de poids légèrement différents. Il souhaite les trier par ordre croissant de poids.

Dans ses bagages, Martin dispose d'une balance Roberval très précise, qui lui permet de comparer deux pièces et de décider laquelle est la plus lourde. Toute autre manière de peser ou de comparer les pièces sera trop imprécise pour être exploitable.

Combien de pesées Martin devra-t-il effectuer ? Il souhaite être aussi efficace que possible pour des valeurs de n de l'ordre de $n \approx 10^6$.



Les diapositives présentées lors de cette conférence sont disponibles sur

http://igm.univ-mlv.fr/~juge/slides/seminars/pofm-2022.pdf.

Voici quelques-unes des approches que Martin peut choisir de suivre, et qui ont été présentées aux élèves.

Bogosort

Cette approche consiste à

1. mélanger les pièces dans un ordre aléatoire ;
2. vérifier qu'elles sont bien triées ;
3. revenir à l'étape 1 si ce n'est pas le cas.

Elle force Martin à effectuer $n - 1$ pesées dans le meilleur cas, une infinité de pesées dans le pire cas, et environ $e \times n!$ dans le cas moyen.

Lorsque $n = 10^6$, Martin effectuera environ $136 \times 10^{5\,565\,707}$ pesées en moyenne : c'est beaucoup trop grand !

Tri par sélection

Cette approche consiste à

1. identifier la pièce la plus légère ;
2. la placer en première position ;
3. trier les $n-1$ pièces de droite.

Elle force Martin à effectuer $n(n-1)/2$ pesées dans tous les cas.

Lorsque $n = 10^6$, Martin effectuera $499\,999\,500\,000$ pesées : c'est beaucoup moins qu'avec l'approche précédente, mais ça reste quand même énorme !

Tri rapide

Cette approche[1] consiste à

1. choisir une pièce au hasard, que l'on appelle pièce *pivot* ;
2. la comparer avec les $n-1$ autres pièces, que l'on sépare ente pièces *légères* (que l'on place à gauche) et *lourdes* (que l'on place à droite) ;
3. trier séparément les pièces légères et les pièces lourdes.

Elle force Martin à effectuer environ $n \log_2(n)$ pesées dans le meilleur cas, $n(n-1)/2$ pesées dans le pire cas[2], et $2n \ln(n)$ pesées dans le cas moyen.

Lorsque $n = 10^6$, Martin effectuera environ $24\,785\,482$ pesées en moyenne[3] : c'est clairement moins qu'avec l'approche précédente, et de l'ordre de n, donc on ne doit pas être trop mauvais. Cela dit, si la pièce qu'à choisi Martin est très légère ou très lourde, son choix est peu efficace, et c'est dommage.

Tri encore plus rapide

Cette approche est la même que la précédente, au détail suivant près : désormais, Martin choisit trois pièces au hasard, et sélectionne comme pivot celle dont le poids est intermédiaire parmi les trois.

Cette nouvelle approche force Martin à effectuer environ $n \log_2(n)$ pesées dans le meilleur cas, $(n+7)(n-1)/4$ pesées dans le pire cas[4] et $12n \ln(n)/7$ pesées dans le cas moyen.

Lorsque $n = 10^6$, Martin effectuera environ $22\,428\,000$ pesées en moyenne[5] : c'est 10% de mieux qu'avec l'approche précédente, pour un effort supplémentaire minimal.

Tri fusion

Cette approche nécessite de disposer de deux files au lieu d'une seule. Elle consiste à :

---

1. On espère très fort qu'elle est rapide, sinon c'est qu'on s'est fait avoir par les collègues du marketing.
2. Le pire cas n'arrive à peu près jamais en pratique si nos choix sont bien aléatoires, mais garantir des choix aléatoires n'est pas chose aisée.
3. Le nombre moyen de pesées est une fraction qu'il est aisé de calculer explicitement, à ceci près que son numérateur et son dénominateur ont environ $434\,100$ chiffres.
4. C'est deux fois moins qu'avant, mais ce n'est toujours pas terrible ; heureusement que ce cas n'arrive jamais en pratique !
5. Le nombre moyen de pesées est une fraction qu'il est très difficile de calculer explicitement, et que l'on a donc arrondi au millier.

1. trier séparément les $\lfloor n/2 \rfloor$ pièces de gauche et les $\lceil n/2 \rceil$ pièces de droite ;
2. identifier la plus petite pièce de nos deux sous-files, et la placer à gauche d'une nouvelle file ;
3. identifier la plus petite pièce restante et la placer à droite de la nouvelle file, etc.

Cette nouvelle approche force Martin à effectuer environ $n \log_2(n)/2$ pesées dans le meilleur cas, et environ $n \log_2(n)$ pesées dans le pire cas et dans le cas moyen.

Lorsque $n = 10^6$, Martin effectuera $18\,951\,425$ dans le pire ces cas, et environ $18\,674\,241$ pesées en moyenne[6] : c'est encore 20% de mieux qu'avec l'approche précédente, mais cela exige maintenant d'avoir deux fois plus de place.

Peut-on mieux faire ?

Dans le meilleur des cas, Martin doit effectuer $n - 1$ pesées, comme quand il utilisait le *bogosort*. Dans le cas moyen et, a fortiori, le pire des cas, il doit effectuer au moins $\log_2(n!)$ pesées, soit environ $n \log_2(n)$ pesées. Avec le *tri (encore plus) rapide* et le *tri fusion*, on n'est donc pas trop loin du compte !

6. Le nombre moyen de pesées est en fait égal à la fraction

$$\frac{734\,918\,301\,564\,130\,537\,984\,567\,390\,089\,707\,613\,922\,048\,924\,953\,592}{39\,354\,654\,266\,121\,186\,991\,421\,445\,666\,879\,931\,789\,898\,805},$$

dont le numérateur et un dénominateur ont le bon goût de tenir dans le poly.

2 Conférence du 17 août : "Des cercles, des lampes et $\frac{\pi^2}{6}$"

But de l'exposé

Le but est de montrer la formule suivante :

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6} \,(\approx 1,6449340668482264).$$

Un peu d'histoire :

- Problème posé pour la première fois en 1644 par Mengoli.
- Euler trouve la valeur $\frac{\pi^2}{6}$ en 1735 avec un argument non-rigoureux, puis donne une preuve rigoureuse en 1741.
- Une preuve élémentaire (mais pas très amusante) a été donnée par Cauchy en 1821.
- La preuve qu'on va présenter est beaucoup plus récente (et amusante !), et est due à Wästlund.

Sommes infinies

Premier problème : le membre de gauche est une somme infinie. Qu'est-ce-que ça veut dire ? Supposons qu'on veuille sommer une infinité de nombres positifs $a_1, a_2, a_3, \ldots$. On les ajoute un par un, obtenant des sommes finies de plus en plus grandes. Deux cas sont possibles :

- Si on attend assez longtemps, on finit par dépasser n'importe quel nombre. On dit alors que la somme *diverge*, ou qu'elle est *infinie*, et on note
$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = +\infty.$$
- Il existe un nombre qu'on n'arrivera jamais à dépasser. Dans ce cas, les sommes finies se rapprochent d'une certaine valeur S. On note
$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = S < +\infty.$$

Quelques exemples

- Si tous les nombres valent 1 :
$$1 + 1 + 1 + \cdots = +\infty.$$
- Si tous les nombres valent 0 sauf un nombre fini :
$$18 + 7 + 17 + 0 + 0 + 0 + \cdots < +\infty.$$
- Si $a_n = \frac{1}{2^n}$, alors
$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} \\ = \; & \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n}\right) \\ = \; & 1 - \frac{1}{2^n}, \end{aligned}$$

donc
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=1.$$

- Si $a_n=\frac{1}{n}$, on fait des paquets séparés par les puissances de 2 :
$$\begin{aligned}&\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots\\=\ &\frac{1}{1}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{15}\right)+\dots\end{aligned}$$
On estime la somme de chaque paquet :
$$\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}-1}\geqslant\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{2^{k+1}}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}}=2^k\times\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{1}{2}.$$
On a une infinité de paquets de somme au moins $\frac{1}{2}$, donc la somme est infinie.
- Si $a_n=\frac{1}{n^2}$, on peut écrire (pour $n\geqslant 2$) :
$$\frac{1}{n^2}\leqslant\frac{1}{n(n-1)}=\frac{n-(n-1)}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n},$$
donc
$$\begin{aligned}&\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\\\leqslant\ &1+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\\=\ &2-\frac{1}{n}\leqslant 2,\end{aligned}$$
donc finalement
$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots<+\infty.$$

Une preuve pas vraiment élémentaire

On veut maintenant calculer cette dernière somme. On considère la fonction identité $f(x)=x$ sur $[-\pi,\pi[$, étendue à $\mathbb{R}$ de manière 2π-périodique. On calcule ses coefficients de Fourier (par intégration par partie) :
$$c_n(f)=\frac{(-1)^n}{n}i.$$
D'après la formule de Parseval, on a
$$2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n|^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)^2\mathrm{d}x,$$
donc
$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}x^2\,\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{6}.$$
Problème : on n'a rien compris ! But de l'exposé : donner une preuve **élémentaire**.

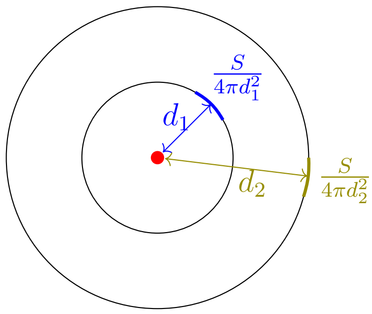


FIGURE 1 – L'observateur couvre une surface S. La sphère de rayon d_1 a pour aire $4\pi d_1^2$, donc l'observateur à distance d_1 capte une proportion $\frac{S}{4\pi d_1^2}$ de l'énergie émise par la lampe.

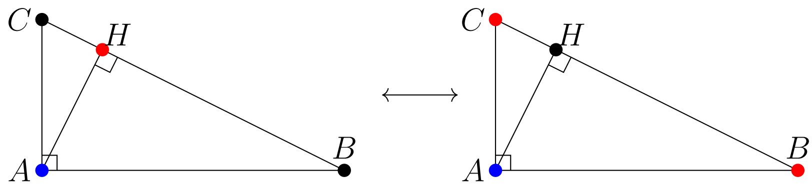


FIGURE 2 – Illustration du lemme permettant de remplacer une lampe (en rouge à gauche) par deux lampes (en rouge à droite).

Un petit détour par la physique...

Si une lampe émet de la lumière dans toutes les directions, un observateur à distance d reçoit une énergie proportionnelle à $\frac{1}{d^2}$ (voir Figure 1). On supposera dans la suite que l'énergie reçue est exactement $\frac{1}{d^2}$ (en maths, toutes les constantes physiques valent 1).

On ne considère que des lampes ayant toutes la même puissance. On veut calculer l'énergie reçue par un observateur placé en 0 sur une droite si chaque entier strictement positif est occupé par une lampe.

Un lemme de géométrie

(voir aussi Figure 2)

Lemme 1.
Soit ABC un triangle rectangle en A, et H le pied de la hauteur issue de A. L'observateur est placé en A. Alors une lampe en H équivaut à deux lampes placées en B et C.

Démonstration. On veut montrer que $\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AH^2}$.

Or, on a $\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{AB^2+AC^2}{AB^2 \times AC^2} = \left(\frac{BC}{AB \times AC}\right)^2$ d'après Pythagore. Il suffit donc de montrer $\frac{BC}{AB \times AC} = \frac{1}{AH}$, soit $AB \times AC = BC \times AH$, ce qui est vrai car

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2}AB \times AC = \frac{1}{2}BC \times AH.$$

□

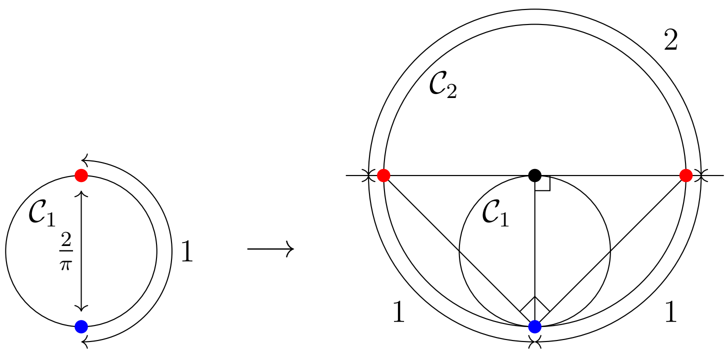


FIGURE 3 – Remplacement d'une lampe sur $\mathcal{C}_1$ par deux lampes sur $\mathcal{C}_2$, en utilisant le lemme du triangle rectangle.

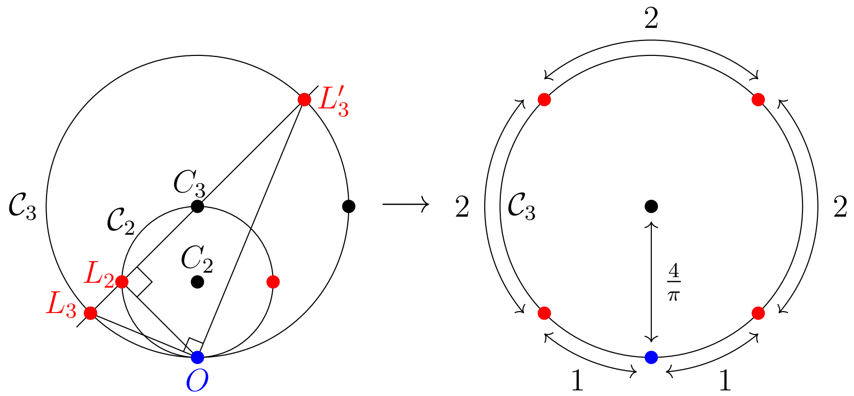


FIGURE 4 – Remplacement des deux lampes sur $\mathcal{C}_2$ par quatre lampes sur $\mathcal{C}_3$. À gauche, la construction des 2 lampes qui vont remplacer l'une des lampes sur $\mathcal{C}_2$. À droite, les 4 lampes sur $\mathcal{C}_3$.

Quelques cercles...

On part d'un cercle $\mathcal{C}_1$ de rayon $\frac{1}{\pi}$, avec l'observateur au pôle Sud, et une lampe au pôle Nord. L'énergie reçue vaut alors $\frac{1}{(2/\pi)^2} = \frac{\pi^2}{4}$.

On trace ensuite un cercle $\mathcal{C}_2$, deux fois plus grand, centré au pôle Nord de $\mathcal{C}_1$, et passant par l'observateur. On remplace notre lampe sur $\mathcal{C}_1$ par deux lampes sur $\mathcal{C}_2$ en utilisant notre lemme, comme sur la Figure 3.

On recommence !

On trace maintenant un cercle $\mathcal{C}_3$, dont le centre est le pôle Nord de $\mathcal{C}_2$, deux fois plus grand que $\mathcal{C}_2$ et qui passe par l'observateur. On remplace les deux lampes sur $\mathcal{C}_2$ par quatre lampes sur $\mathcal{C}_3$, comme indiqué sur la Figure 4.

On a $\widehat{OC_3L_3} = \widehat{OC_3L_2} = \frac{1}{2}\widehat{OC_2L_2}$ d'après le théorème de l'angle inscrit, donc $\widehat{OC_3L_3} = 45°$, et $\widehat{OC_3L_3'} = 135°$. Cela montre que deux lampes consécutives sur $\mathcal{C}_3$ forment un angle au centre de $90°$. Comme la circonférence de $\mathcal{C}_3$ est de 8, la distance le long du cercle entre deux lampes consécutives vaut 2, et celle entre l'observateur et les lampes les plus proches vaut 1.

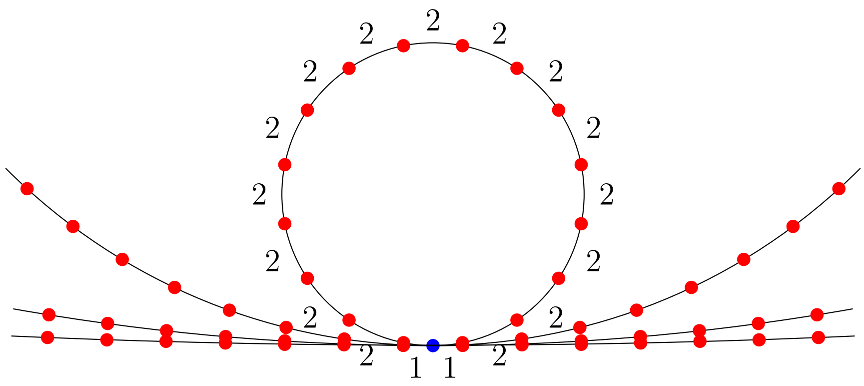


FIGURE 5 – Chacun des cercles représentés ci-dessus donne un ensemble de lampe qui fournit à l'observateur une énergie $\frac{\pi^2}{4}$. Quand le rayon du cercle tend vers l'infini, l'ensemble de lampes se rapproche des entiers impairs sur une droite.

Et on continue...

- À chaque étape, le rayon du cercle double, donc le rayon de $\mathcal{C}_i$ vaut $\frac{1}{\pi} \times 2^{i-1}$, et sa circonférence 2^i.
- En passant de $\mathcal{C}_i$ à $\mathcal{C}_{i+1}$, chaque lampe de $\mathcal{C}_i$ est remplacée par deux lampes de $\mathcal{C}_{i+1}$. De plus, si la lampe faisait un angle au centre α dans $\mathcal{C}_i$, les deux nouvelles lampes font des angles au centre $\frac{\alpha}{2}$ et $180° - \frac{\alpha}{2}$ dans $\mathcal{C}_{i+1}$.
- On en déduit (par récurrence) que les lampes sur $\mathcal{C}_i$ sont régulièrement espacées (l'angle au centre entre deux lampes consécutives vaut $\frac{1}{2^{i-1}} \times 360°$).
- Comme la circonférence de $\mathcal{C}_i$ vaut 2×2^i, la distance le long du cercle entre deux lampes consécutives vaut 2, et la distance le long du cercle entre l'observateur et les deux lampes les plus proches vaut toujours 1.
- Enfin, notre lemme sur les triangles rectangles garantit qu'à chaque étape, l'énergie reçue par l'observateur ne change pas.

Passage à la limite

Par conséquent, pour tout i, l'observateur reçoit une énergie $\frac{\pi^2}{4}$ pour chacun des ensembles de lampes représentés sur la Figure 5 (où il y a 2^i lampes). Quand i tend vers l'infini, le cercle se rapproche de la droite horizontale passant par l'observateur. Comme les distances le long du cercle valent toujours 1 (entre l'observateur et la lampe la plus proche) et 2 (entre deux lampes voisines), les lampes se rapprochent des entiers impairs sur la droite.

L'énergie de la configuration limite vaut donc

$$2 \times \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots\right) = \frac{\pi^2}{4}.$$

Fin de la preuve

Notons S la somme que l'on cherche. Alors

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\dots &= S-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\dots\right)\\
&= S-\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{1^2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3^2}+\dots\right)\\
&= S-\frac{1}{4}S=\frac{3}{4}S.
\end{aligned}$$

On a finalement $\frac{3}{4}S=\frac{\pi^2}{8}$, donc $S=\frac{\pi^2}{6}$.

Un peu de pub

La présentation de la preuve est issue d'une vidéo postée sur la passionnante chaîne Youtube *3blue1brown* ("trois bleus un marron", en anglais).

VIII. La Muraille

Instructions

Les exercices 1 à 42 sont dits de Niveau 1.
Les exercices 43 à 96 sont dits de Niveau 2.
Les exercices au-delà de 97 sont dits de de Niveau 3.
Un exercice est décoré de n étoiles lorsqu'il est resté sans solution à la muraille de n stages.
Les élèves du groupe A cherchent les exercices de Niveau 1 (ou au-dessus). Les élèves du groupe B cherchent les exercices de Niveau 2 et les exercices étoilés de niveau Niveau 1 (ou au-dessus). Les élèves du groupe C cherchent les exercices de Niveau 3 et les exercices étoilés de niveau Niveau 2 (ou au-dessus). Les élèves du groupe D cherchent les exercices de Niveau 3 (mais pas au-dessus, vu qu'il n'y en a pas).
- Une fois un exercice résolu, la solution doit être rédigée et donnée à une animatrice ou un animateur. Le nom de la personne ayant résolu un exercice sera écrit dans le polycopié.
- Il est possible de résoudre les exercices à plusieurs, le but est d'avoir tout résolu à la fin du stage !

Les prix de la muraille

À la fin du stage, quatre Grand Prix Mystère seront décernés aux quatre élèves ayant obtenu le plus de points en résolvant des exercices de la Muraille dans chacun des quatre groupes A, B, C, D.
À la fin du stage, un autre Grand Prix Mystère sera décerné à l'équipe (constituée d'au moins deux élèves et d'au plus quatre élèves) ayant obtenu le plus de points en résolvant des exercices de la Muraille.

Barème : Un exercice à x étoiles résolu rapporte $x + 1$ points (sauf pour les élèves du groupe B qui résolvent des exercices étoilés de Niveau 1 et les élèves du groupe C qui résolvent des exercices étoilés de Niveau 2, pour lesquels un exercice à x étoiles rapporte x points). Dans une équipe, on prend en compte le groupe de l'élève le plus avancé.

Énoncés

Exercice 1
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Que vaut le reste de la division euclidienne de $10^{(10^n)}$ par 7 ?

Exercice 2
⋆ Soit k un entier strictement positif. On considère k nombres premiers (pas forcément distincts) tels que leur produit vaut 10 fois leur somme. Déterminer toutes les valeurs de k possibles.

Exercice 3
⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆ Soit ABC un triangle équilatéral et P un point à l'intérieur de ce triangle. Soient D, E et F les pieds des perpendiculaires de P sur $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ respectivement. Montrer que :

1. $AF + BD + CE = AE + BF + CD$ et que
2. $|APF| + |BPD| + |CPE| = |APE| + |BPF| + |CPD|$,

où $|XYZ|$ désigne l'aire du triangle XYZ.

Exercice 4
⋆ N nombres entiers distincts strictement positifs sont écrits au tableau. Si a et b sont deux entiers distincts écrits au tableau, $a + b$ est une puissance de 2. Trouver la valeur maximale possible pour N.

Exercice 5

Sur les côtés AB, BC et CA d'un triangle ABC, se trouvent respectivement les points A_1, A_2, A_3 et B_1, B_2, B_3, B_4 et C_1, C_2, C_3, C_4, C_5. On note que ces points ne sont pas confondus entre eux, ni avec les sommets du triangle ABC. Deux triangles sont considérés comme identiques si chaque sommet d'un triangle est aussi un sommet de l'autre.

Indiquez le nombre de triangles non-plats qui peuvent être formés à partir de tous ces points (y compris les sommets A, B, C)

Exercice 6
⋆ Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique. On note O le centre de son cercle circonscrit. On suppose de plus que les diagonales de ce quadrilatère sont perpendiculaires. Montrer que la ligne brisée AOC (composée des segments $[AO]$ et $[OC]$) coupe le quadrilatère $ABCD$ en deux portions d'aires égales.

Exercice 7
Sur un échiquier de taille $n \cdot n$, les cases sont coloriés soit en blanc, soit en noir. Trois des coins de l'échiquier sont blancs, et un est noir. Montrer qu'il y a un carré de taille $2 \cdot 2$ avec un nombre impair de cases blanches.

Exercice 8
Résoudre dans $\mathbb{N}^*$:

$$1005^x + 2011^y = 1006^z$$

Exercice 9
⋆⋆ On a un polyèdre convexe, dont les faces sont des triangles. Les sommets du polyèdre sont coloriés avec trois couleurs.

Montrer que le nombre de triangles dont les sommets ont trois couleurs distinctes est pair.

Exercice 10
⋆⋆ Trouver tous les triplets d'entiers naturels $\{x, y, z\}$ pour lesquels :

$$x^4 + y^3 = z! + 7$$

Exercice 11
⋆ Soit E un ensemble de 2021 réels tels que pour tout couple d'éléments distincts $(a, b) \in E^2$, on ait $a^2 + b\sqrt{2}$ rationnel. Montrer que si $a \in E$, alors $a\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

Exercice 12
Soit ABC un triangle. Son cercle inscrit touche $[AB]$ en F et $[AC]$ en E. Soit P le projeté orthogonal de C sur la bissectrice issue de B dans ABC. Montrer que E, F, P sont alignés.

Exercice 13
⋆⋆ Soit n un entier naturel. On souhaite choisir n entiers du tableau ci-dessous en en prenant exactement 1 par ligne et 1 par colonne.

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \cdots & n-1 \\ n & n+1 & \cdots & 2n-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-1)n & (n-1)n+1 & \cdots & n^2-1 \end{array}$$

Déterminer la valeur maximale du produit de ces n nombres.

Exercice 14
⋆⋆ Six cercles sont concourrants en un même point.

Montrer que l'un de ces cercles contient le centre d'un autre.

Exercice 15
⋆ Un roi se déplace sur un plateau d'échec. Il peut se déplacer d'une case dans n'importe quelle direction pour se rendre sur une case adjacente. Il parcourt une unique fois chaque case du plateau puis revient à sa case de départ. Montrer qu'il s'est déplacé en diagonale un nombre pair de fois au cours de son parcours.

Exercice 16
⋆⋆ Soixante-dix employés travaillent pour une entreprise internationale. Si X et Y sont deux quelconques d'entre eux, il y a une langue parlée par X et non parlée par Y, et une langue parlée par Y mais pas par X.

Quel est le nombre minimum total de langues parlées par les employés ?

Exercice 17
** Chaque sous-ensemble à k éléments de $\{1, 2, \ldots n\}$ possède un plus petit élément. Calculer la moyenne de ces plus petits éléments.

Exercice 18
Soient a, b, c et d des réels positifs tels que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$. Montrer qu'il existe deux réels parmi a, b, c et d dont la somme vaut au plus 2.

Exercice 19
** On considère 4 cercles concentriques du plan. On suppose que leurs rayons forment une progression arithmétique strictement croissante.

Montrer qu'il est impossible d'avoir un carré dont chacun des 4 sommets appartient à un cercle différent.

Exercice 20
* Soit $ABCD$ un carré, on note N le milieu de AD, M le milieu de BC. Soit K un point de la droite (AC) de sorte que K, A, C soient placés dans cet ordre sur cette droite. Soit L l'intersection de (AB) et (KM), montrer que $\widehat{KNA} = \widehat{LNA}$.

Exercice 21
*** Trouver tous les nombres premiers distincts p, q, r tels que :

$$\begin{array}{c} p|qr-1 \\ q|pr-1 \\ r|pq-1 \end{array}$$

Exercice 22
***** On inscrit 100 entiers sur un cercle. Leur somme vaut 1. On appelle séquence positive une suite de nombres consécutifs sur le cercle telle que leur somme soit strictement positive. Combien y a-t-il de séquences positives sur le cercle ?

Exercice 23
Un coffre-fort a un code à 7 chiffres. Aurélien peut tenter un code à 7 chiffres et le coffre s'ouvre si au moins l'un des 7 chiffres est correct (et au bon endroit). Aurélien peut-il être sûr ouvrir le coffre en strictement moins de 7 tentatives ?

Exercice 24
Soit f une fonction de $N^\star$ dans Z telle que $f(1) = 0$, $f(p) = 1$ si p premier et $f(xy) = xf(y) + yf(x)$. Déterminer le plus petit $n \geqslant 2015$ tel que $f(n) = n$.

Exercice 25
* Aurélien dispose n lampes en ligne. Toutes les minutes, il éteint les lampes déjà allumées. Il allume également les lampes éteintes qui étaient à côté d'exactement une lampe déjà allumée. Pour quels n existe-t-il une configuration initiale telle qu'il y ait toujours au moins une lampe allumée ?

Exercice 26
Trouver tous les nombres premiers p pour lesquels il existe des entiers naturels x et y tels que :

$$x(y^2 - p) + y(x^2 - p) = 5p$$

Exercice 27
****** Alice et Bob jouent au jeu suivant : Alice part du nombre 2 et les joueurs jouent chacun leur tour. A chaque tour, en notant n le nombre atteint par le joueur précédent, on ajoute un nombre m tel que m divise n, $m \neq n$, et $m + n \leqslant 2016$. Le premier joueur à ne plus pouvoir jouer a perdu. Quel joueur peut s'assurer la victoire ?

Exercice 28
*** Soit n un entier strictement positif. On dit qu'un sous ensemble A de $\{1, 2, ..., n\}$ est "*fade*" si pour tout x, y dans A, $x + y$ n'est pas dans A. Selon la valeur de n, quel est le cardinal du plus grand ensemble *fade* ?

Exercice 29
** Soient $x, y > 0$, et soit $s = min(x, y + \frac{1}{x}, \frac{1}{y})$.

Quelle est la valeur maximale possible de s ?
Pour quels x, y est-elle atteinte ?

Exercice 30
Soit p un nombre premier, $a_1, \ldots, a_p$ et $b_1, \ldots, b_p$ des entiers (pas forcément distincts) de $\{1, \ldots, p - 1\}$. Montrer qu'il existe deux entiers i et j tels que p divise $a_i b_j - a_j b_i$.

Exercice 31
* Est-il possible de découper un triangle équilatéral en 4 pièces de sorte qu'il soit possible de les réassembler pour former un carré ?

Exercice 32
Montrer que pour tout n il existe n entiers strictement positifs distincts $x_1, \ldots, x_n$ tels que

$$\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n} = 1$$

Exercice 33
** Quelle est la plus grande valeur que peut prendre le produit d'entiers strictement positifs de somme n ?

Exercice 34
***** Si tous les points du plan sont colorés soit en rouge, soit en orange soit en violet, peut-on toujours trouver deux points de même couleur éloignés d'un centimètre exactement ?

Exercice 35
****** Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'entiers strictement positifs tels que pour tout $i \neq j \geq 1$ entiers on ait :

$$pgcd(a_i, a_j) = pgcd(i, j)$$

Montrer que $a_i = i$ pour tout $i \geq 1$.

Exercice 36
Soit ABC un triangle avec $AC > AB$. Soit P le point d'intersection de la médiatrice du segment $[BC]$ et de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$. Soit X le projeté orthogonal de P sur (AB) et Y le projeté orthogonal de P sur (AC). La droite (XY) coupe (BC) en Z. Déterminer

$$\frac{BZ}{ZC}$$

.

Exercice 37
** Quarante et une équipes s'affrontent à *l'open de pétanque du stage de Valbonne*. Chaque équipe affronte successivement chaque autre lors de différents *matchs* (en 13 points, comme il se doit). Chaque match se conclut par une victoire pour une équipe, et une défaite pour l'autre, il n'y a pas de match nul.

Lors de la proclamation des résultats, Mathieu affirme : « *Difficile de dire quelle équipe a gagné. Non seulement chaque équipe a au moins perdu un match, mais pire, à chaque fois que l'on choisit deux équipes, on peut trouver une troisième équipe qui a battu chacune des deux premières équipes.* »
Est-ce possible, autrement dit, un tel tournoi existe-t-il ?

Exercice 38
* Soient a, b, c, d des réels tels que $a \geq b$ et $c \geq d$, montrer que le polynôme suivant est à racines réelles :

$$P(x) = (x + a)(x + d) + (x + c)(x + b)$$

Exercice 39
**** Soit ABC un triangle actuangle. La bissectrice de $\widehat{BAC}$ coupe BC en D et le cercle circonscrit à ABC en E. La tangente au cercle circonscrit à ABC en B coupe AD en F. On suppose que $AD^2 = 2CD^2$. Montrer que E est le milieu de $[AF]$.

Exercice 40
**** On donne un nombre n plus grand que 10^{2018}. Quel est le premier chiffre après la virgule dans l'écriture décimale de la racine carrée de $(n^2 + n + 200)$?

Exercice 41
**** Mathieu joue au billard sur un billard rectangulaire de 2,03 m sur 3,03 m. Sa boule, de 6 cm de diamètre, est placée au milieu d'un grand côté du billard et Mathieu la fait rouler, sans effet, selon un angle de 45 degré par rapport au côté du billard. En supposant que Mathieu lui ait donné suffisamment de force, à quelle distance du point de départ le centre de la boule sera-t-il au moment du 59e rebond ?

Exercice 42
Soit ABC un triangle et D le pied de la bissectrice issue de A. On considère les centres des cercles circonscrits aux trois cercles (ABD), (ADC) et (ABC). Montrer que le triangle formé par ces centres est isocèle.

Exercice 43
** On fixe n un entier pair. Étant donné un sous-ensemble S des entiers $\{0, 1, 2, \ldots, n-2, n-1\}$, on va définir $D(S)$ l'ensemble des différences d'éléments de S, prises modulo n et regardées avec leurs multiplicité. Par exemple, si $n = 6$, et $S = \{1, 2, 5\}$, alors $D(S) = \{0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 4, 5\}$.

On note $\overline{S} = \{0, 1, 2, \ldots, n-2, n-1\} \backslash S$ le complémentaire de S.
Montrer que si S a exactement $\frac{n}{2}$ éléments, alors $D(S) = D(\overline{S})$.

Exercice 44
* Soit (p_k) la suite croissante des nombres premiers. Démontrer que

$$p_1^m + \ldots + p_n^m > n^{m+1}$$

pour tous les entiers positifs m et n.

Exercice 45
******** Pour quels entiers $n \geqslant 1$ existe-t-il une bijection

$$\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\},$$

de sorte que $|\sigma(i) - i| \neq |\sigma(j) - j|$ si $i \neq j$?

Exercice 46
**** Martin et Savinien jouent à un jeu : une droite est tracée dans le plan. Martin choisit une caractéristique parmi "médiatrice", "médiane", "hauteur", "bissectrice intérieure". Savinien trace ensuite une deuxième droite coupant la première en un point P. Martin trace alors une troisième droite sécante aux deux autres en P. Si Savinien parvient à dessiner un triangle dont les trois droites remarquables à la caractéristique choisie sont les trois droites dessinées, il gagne. Sinon c'est Martin qui l'emporte. Qui a une stratégie gagnante ?

Exercice 47
* Soient a, n des entiers strictement positifs tels que $n \mid a^2 + 1$. Montrer qu'il existe un entier b tel que $n(n^2 + 1) \mid b^2 + 1$.

Exercice 48
* Les polynômes F et G satisfont

$$F(F(x)) > G(F(x)) > G(G(x))$$

pour tout x. Montrer que $F(x) > G(x)$ pour tout x.

Exercice 49
******* Soit P un point de l'espace et $r > 0$. Montrer qu'il existe 8 sphères disjointes de même rayon r qui cachent le point P, c'est-à-dire que toute demi-droite issue de P rencontre au moins l'une des sphères. On supposera que les centres des sphères sont tous à des distances $> r$ de P.

Exercice 50
On se donne deux entiers $1 \leq k_1 \leq k_2$ et $n \geq k2$ points sur une droite, dont les abscisses sont

exactement les entiers de 1 à n. On veut colorier ces points de sorte que deux points espacés d'exactement k_1 ou k_2 soient toujours de la même couleur. Quel est le nombre maximal de couleurs que l'on pourra utiliser ?

Exercice 51
⋆ Montrer que l'entier $p^p - 1$ admet un facteur premier strictement plus grand que p.

Exercice 52
⋆⋆⋆ Soit $n \geq 1$ un entier. Une suite $a_1, a_2, ..., a_n$ d'entiers est dite "*élégante*" si elle respecte les deux conditions suivantes :

• $a_i = 1$ ou $a_i = 0$ pour tout i tel que $1 \leq i \leq n$

• Il n'existe aucune sous suite de (a_n) se répétant trois fois consécutivement. Par exemple, (a_n) ne peut pas contenir les nombres $1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1$ consécutivement puisque la sous-suite $(1, 0, 1)$ est répétée trois fois consécutivement.

Montrer qu'il existe des suites *élégantes* de taille arbitrairement grande.

Exercice 53
⋆⋆ Soit ABC un triangle, l une droite et L, M, N les pieds des perpendiculaires à l passant par A, B, C respectivement. Les perpendiculaires aux droites $(BC), (CA), (AB)$ passant par L, M, N respectivement sont notées a, b, c.

Montrer que a, b, c sont concourantes.

Exercice 54
Matthieu se trouve devant une forêt très particulière. Il sait que les arbres sont tous identiques, ponctuels et que leurs positions sont données exactement par l'ensemble des points du plan de coordonnées entières strictement positives. Il se place à l'origine $(0, 0)$ et observe la forêt : il remarque que certains arbres sont visibles depuis son point de vue, mais que d'autres sont masqués par d'autres arbres. Montrer que pour tout entier $r \geq 1$, il existe un carré de côté r (c'est-à-dire un ensemble d'arbres de coordonnées (x, y) avec $a + 1 \leq x \leq a + r$ et $b + 1 \leq y \leq b + r$ pour certains entiers a et b) dont Matthieu ne voit aucun arbre.

Exercice 55
On dit qu'un nombre premier p divise le polynôme P de $\mathbb{Z}[X]$ lorsqu'il existe un entier n tel que p divise $P(n)$. Montrer que tout polynôme non constant de $\mathbb{Z}[X]$ admet une infinité de diviseurs.

Exercice 56
Soit (F_n) la suite de Fibonacci. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} F_k \binom{n}{k} = F_{2n}$$

Exercice 57
⋆ Un mot est une suite de 123 caractères parmi A, B et C contenant 42 consonnes (B et C)

et 81 voyelles (A). Au maximum, combien peut-on prendre de mots distincts de telle manière que chaque paire de mots choisis admet une position où l'un des deux mots contient un B et l'autre un C.

Exercice 58
Soit ABC un triangle dont le centre du cercle circonscrit est O. Soit X et Y sur AB et AC respectivement tels que le cercle circonscrit au triangle X, Y, O passe par A. Montrer que l'orthocentre de ce triangle est sur (BC).

Exercice 59
⋆ Pour tout entiers $n \in \mathbb{N}^*$, on note d_n son plus grand diviseur strict. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers n pour lesquels $d_n + d_{n+1}$ est un carré parfait.

Exercice 60
⋆⋆ Soit ABC un triangle, H son orthocentre, O son centre du cercle circonscrit et R son rayon. Soient A', B', C' les symétriques de A, B, C par rapport au droites $(BC), (CA), (AB)$ respectivement.

Montrer que A', B', C' sont alignés si et seulement si $OH = 2R$.

Exercice 61
⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆ Déterminer tous les couples de polynômes non constants P et Q unitaires, de degré n et admettant n racines positives ou nulles (non nécessairement distinctes) tels que

$$P(x) - Q(x) = 1.$$

Exercice 62
⋆⋆⋆ Montrer que pour tout réels positifs $x_1, x_2, ..., x_n$ on a :

$$\frac{1+x_1^2}{1+x_1x_2} + \frac{1+x_2^2}{1+x_2x_3} + \cdots + \frac{1+x_n^2}{1+x_nx_1} \geqslant n$$

Exercice 63
⋆⋆⋆ Soit c un entier. Existe-t-il un polynôme P à coefficients entiers vérifiant les conditions suivantes ?

• $P(0) = 1$

• Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = P(x_n)$ (pour tout $n \geq 0$). Il existe un entier N tel que pour tout $n > N$ on ait pgcd$(x_n, n+c) > 1$.

Exercice 64
Soient 5 droites a, b, c, d, e dans le plan, jamais 2 parallèles, jamais 3 concourantes. Les cercles circonscrits aux triangles (a, b, c), (b, c, d), (c, d, e), (d, e, a) et (e, a, d) sont nommés respectivement B, C, D, E, A. Les cercles B, C se coupent une fois sur les 5 droites de départ et une fois en un autre point, nommé U. On définit de même V, X, Y, Z seconde intersection de (C, D), (D, E), (E, A), (A, B) respectivement. Montrer que $UVXYZ$ sont cocycliques.

Exercice 65
Soit ABC un triangle et P un point à l'intérieur. Le projeté de P sur (BC) s'appelle A_1 et celui sur la hauteur issue de A dans ABC est A_2. On définit de même B_1, B_2, C_1, C_2. Montrer que $(A_1A_2), (B_1B_2), (C_1C_2)$ sont concourrantes.

Exercice 66
$\star$ Martin et Rémi jouent à cache cache. Initialement, Martin choisit un point A dans un carré 1×1. Rémi choisit ensuite consécutivement $P_0, ..., P_N$ des points de ce carré. Pour $k \geq 1$, une fois que Rémi a placé le point P_k, Martin lui dit "tu chauffes" si P_k est plus proche de A que P_{k-1} et "tu refroidis" sinon. Après la dernière réponse de Martin (pour le point P_N), Rémi choisit un point B sur le carré. Rémi gagne si et seulement si $AB \leq \frac{1}{2020}$. Montrer que si $N = 18$, Rémi ne peut pas être sur de gagner.

Exercice 67
$\star$

Soient $a, b, c \geq 0$ des réels vérifiant $abc = 8$ montrer qu'on a :

$$\frac{ab+4}{a+2} + \frac{bc+4}{b+2} + \frac{ca+4}{c+2} \geq 6$$

Exercice 68
$\star\star$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver tous les réels non nuls $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tels que :

$$\begin{cases} a_1a_2 \ldots a_n = (a_1+a_2)(a_2+a_3)\ldots(a_{n-1}+a_n)(a_n+a_1) \\ a_1^3a_2^3 \ldots a_n^3 = (a_1^3+a_2^3)\ldots(a_{n-1}^3+a_n^3)(a_n^3+a_1^3) \end{cases}$$

Exercice 69
$\star\star$ Soient ω_1 et ω_2 deux cercles, (AB) et (CD) leurs tangentes communes (A, C sur ω_1 et B, D sur ω_2). Soit M le milieu du segment $[AB]$. Les tangentes issues de M aux cercles ω_1 et ω_2 coupent (CD) en X et Y. Soit I le centre du cercle M-exinscrit au triangle MXY.

Montrer que $IC = ID$.

Exercice 70
$\star\star\star\star\star\star\star$ Soit ABC un triangle équilatéral de côté a et P un point à l'intérieur de ce triangle. On construit un triangle XYZ de côtés de longueur PA, PB et PC et on note F son point de Fermat. Montrer que $FX + FY + FZ = a$.

Exercice 71
$\star\star$ Soit $[EF]$ un segment inclus dans le segment $[BC]$ tel que le demi-cercle de diamètre $[EF]$ est tangent à $[AB]$ en Q et à $[AC]$ en P.

Prouver que le point d'intersection K des droites (EP) et (FQ) appartient à la hauteur issue de A du triangle ABC.

Exercice 72
$\star$ Dans une grille $n \times n$, chaque case est soit bleue soit rouge. On place certains dominos

sur la grille, chaque domino couvrant deux cases (pas de recouvrement). Un domino est dit "uniforme" s'il couvre deux cases bleues ou deux cases rouges, "coloré" sinon. Trouver le plus grand entier positif k tel que, quelque soit le coloriage initial, on peut toujours avoir k dominos uniformes ou k dominos colorés.

Exercice 73

⋆ On définit la suite $(a_n)_{n\geq 3}$ par :

$$a_n = \prod_{k=3}^{n} \frac{(n^3+3n)^2}{n^6-64}$$

Calculer la limite de (a_n).

Exercice 74

⋆⋆ On commence par 2 points du plan A et B. On construit le cercle de centre A passant par B et le cercle de centre B passant par A. On note C l'une des deux intersections obtenues. On trace le cercle de centre C passant par B. On note D l'une des deux intersections des cercles de centres B, C puis on trace le cercle de centre D passant par B. On note E l'une des deux intersections des cercles de centres B, D puis on trace le cercle de centre E passant par C et le cercle de centre A passant par E. On note F, G les points d'intersection de ces deux cercles. On contruit le cercle de centre F passant par E et de centre G passant par E. On note M leur deuxième intersection.

Montrer que M est le milieu de $[AB]$.
Sur le cercle de centre B, A, C, D, E sont ordonnés ainsi, dans le sens des aiguilles d'une montre.

Exercice 75

⋆⋆⋆ Soit ABC un triangle. Les médianes AM_A, BM_B, CM_C du triangle ABC s'intersectent en M. Soit Ω_A un cercle passant par le milieu de AM et tangent à BC en M_A. On construit similairement Ω_B et Ω_C .
Prouver que Ω_A, Ω_B et Ω_C s'intersectent en un même point.

Exercice 76

⋆

Montrer que pour tout n il existe un entier m multiple de n dont la somme des chiffres vaut n.

Exercice 77

⋆⋆⋆ Théo et Paul jouent à un jeu. Théo a face à lui n enveloppes indistingables et fermées. L'une d'elles contient n roubles. Théo choisit une enveloppe. Pour aider Théo, Paul ouvre une enveloppe (autre que celle de Théo) ne contenant rien si il y a au moins 3 enveloppes non ouvertes sur la table. Théo peut alors choisir soit d'ouvrir son enveloppe, soit de recommencer le même processus avec une nouvelle enveloppe (potentiellement la même) mais en enlevant 1 rouble de l'enveloppe contenant de l'argent. Soit E_n l'espérance du gain de Théo en jouant optimalement.
Calculer $\lim_{n\to\infty}(E_n)$

Exercice 78

⋆⋆⋆ Soit ABC un triangle acutangle. On note I_A le centre du cercle A-exinscrit de ABC. Soit

M le symétrique de I_A par rapport à BC. Montrer que (AM) est parallèle à la droite passant par l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit à I_ACB.

Exercice 79

***** Soit $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un ensemble fini de réels dont toutes les fonctions symétriques élémentaires sont strictement positives. Les éléments a_i sont-ils également strictement positifs ?

Note : La k-ème fonction symétrique élémentaire, notée σ_k, est la somme des produits k par k. Ainsi $\sigma_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $\sigma_2 = a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 + \ldots$, et plus généralement, $\sigma_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} a_{i_1}a_{i_2} \ldots a_{i_k}$.

Exercice 80

Soit (x_n) la suite définie par $x_1 = 1/2$ et $x_{k+1} = x_k + x_k^2$.

On pose

$$A = \frac{1}{x_1 + 1} + \frac{1}{x_2 + 1} + \ldots + \frac{1}{x_{100} + 1}$$

Déterminer $\lfloor A \rfloor$.

Exercice 81

******* Trouver tous les polynômes P à coefficients réels tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un rationnel r tel que $P(r) = n$.

Exercice 82

* On considère une configuration de n jetons dans le plan, pas forcément à des positions distinctes. On s'autorise l'opération suivante : on choisit deux jetons A et B et on les déplace tous les deux vers l'emplacement du milieu du segment joignant les jetons A et B. On dit qu'une configuration *collisionne* s'il est possible, après une suite finie d'opérations, que tous les jetons se retrouvent au même emplacement. Montrer que toutes les configurations à n jetons collisionnent si et seulement si n est une puissance de 2.

Exercice 83

***** On construit la suite (u_n) de la façon suivante : on pose $u_0 = 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on choisit u_n de sorte que $|u_n| = |u_{n-1} + 1|$. Quelle est la plus petite valeur que puisse prendre

$$|u_1 + u_2 + \ldots + u_{2017}| \text{ ?}$$

Exercice 84

* Soient a, b, c les longueurs des côtés d'un triangle de périmètre égal à 3. Montrer qu'on a l'inégalité suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{a+b-c}} + \frac{1}{\sqrt{a+c-b}} + \frac{1}{\sqrt{b+c-a}} \geq \frac{9}{ab+ac+bc}$$

Exercice 85

*** Soit A une partie de $\mathbb{N}^*$ de cardinal 2^k. On dit qu'une partie $B \subseteq A$ est admissible si B

est telle que la somme de deux de ses éléments n'est jamais dans A. Montrer qu'il existe un sous ensemble de A de cardinal $k+1$ qui est admissible.

Exercice 86
******* Soit ABC un triangle acutangle, avec $AC > BC$. On note H son orthocentre, O le centre de son cercle circonscrit et M le milieu de $[AC]$. Soit F le pied de la hauteur issue de C, et P le symétrique de A par rapport à F. On note X l'intersection de (PH) avec (BC), Y l'intersection de (FX) avec (OM), et Z l'intersection de (OF) avec (AC). Montrer que F, M, Y et Z sont cocycliques.

Exercice 87
* Soit ABC un triangle équilatéral de centre O et soit M un point de $[BC]$. Soient K et L les projections de M sur (AB) et (AC) respectivement. Montrer que (OM) passe par le milieu de $[KL]$.

Exercice 88
**** Soient p et q des entiers premiers entre eux. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{pq-1}(-1)^{\left\lfloor \frac{k}{p}\right\rfloor+\left\lfloor \frac{k}{q}\right\rfloor} = \begin{cases} 0 \text{ si } pq \text{ est pair,} \\ 1 \text{ sinon.}\end{cases}$$

Exercice 89
*** On dit qu'un entier positif n est *sympa* si il existe des entiers $a_1, a_2, ..., a_n$ tels que :

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n = n$$

Trouver tous les entiers *sympas*.

Exercice 90
* Déterminer s'il existe des fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ vérifiant pour tous $x, y > 0$:

$$f(x+y) \geq yf(x) + f(f(x))$$

Exercice 91
**** Pour un entier n, soit $f(n)$ le nombre obtenu en inversant les 0 et les 1 de l'écriture binaire de n. Par exemple, l'écriture binaire de 23 est 10111. En inversant les 0 et les 1, on obtient 01000, ce qui correspond au nombre 8. Ainsi $f(23) = 8$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \frac{n^2}{4}.$$

Pour quelles valeurs de n y a-t-il égalité ?

Exercice 92
****** On se donne un certain nombre de polynômes unitaires de degré 2 de même discriminant. On suppose que la somme de deux quelconques de ces polynômes a toujours deux

racines réelles distinctes. Montrer qu'il en est de même de la somme de tous les polynômes considérés.

Exercice 93

⋆ Trouver le plus petit premier p qui ne peut pas s'écrire sous la forme $|3^a - 2^b|$ avec $a, b \geq 0$ deux entiers positifs.

Exercice 94

⋆ Est-il possible de colorier le plan en 7 couleurs de sorte à ce que deux points à distance 1 soient toujours de couleur différente ?

Exercice 95

⋆⋆ On dit que deux carré *se touchent* s'ils ont au moins un point de leurs bords respectifs en commun. Autour d'un carré de côté 1, il est possible de placer 8 autres carrés de côté 1 touchant le premier, sans jamais que deux carrés ne se superposent. Il suffit de placer les carrés comme dans un échiquier.

Est-il possible d'en placer 9 ?

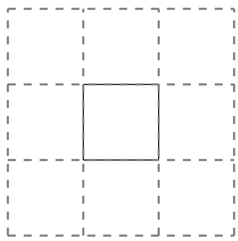


FIGURE 1 – Exemple : 8 carrés qui *touchent* le carré central sans se superposer

Exercice 96

⋆ On considère une grille 2021×2021, et on place un point noir sur le centre de n cases de la grille. Trouver la plus grande valeur de n pour laquelle il est possible de placer n point tel que 3 points ne forment jamais un triangle rectangle.

Exercice 97

⋆⋆⋆ On pose $P(x)$ un polynôme non constant à coefficients réels. Pour tout entier naturel n, posons :

$$Q_n(x) = (x+1)^n P(x) + x^n P(x+1)$$

Montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini d'entiers n pour lesquels toutes les racines de $Q_n(x)$ sont réelles.

Exercice 98

⋆⋆⋆ Soit $n \geq 2$ un entier. On considère n droites du plan en position générale. Montrer qu'on peut trouver un polygone non croisé à n côtés tel que chaque côté soit sur exactement une droite et que chaque droite contienne exactement un côté.

Exercice 99

⋆ Soient $ABCD$ un quadrilatère cyclique, P un point sur le cercle circonscrit. La tangente

en P coupe la droite (CD) en Q. La parallèle à (AB) passant par Q coupe (AC) en U, (BD) en V, (AD) en X et (BC) en Y.
Montrer que $\widehat{UPY} = \widehat{XPV}$.

Exercice 100
*** Soit ABC un triangle et soit ω son cercle circonscrit. Soient D, E, F les milieux de BC, AC, AB respectivement. Soit T un point sur ω et soient P, Q, R les intersections de $(TD), (TE), (TF)$ avec ω. Montrer que l'aire du triangle formé par les droites $(AP), (BQ), (CR)$ ne dépend pas de la position de T.

Exercice 101
* Soit ABC un triangle, H son orthocentre. La tangente au cercle circonscrit au triangle CBH en H coupe $[AC]$ en G, $[AB]$ en F et (BC) en E. Soit M le point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles ABC et AFG. Soit X le point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles ABC et AGH. Soit Y le point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles ABC et AFH. Montrer que les droites $(YF), (XG)$ et (HM) sont concourantes en un point du cercle circonscrit au triangle ABC.

Exercice 102
*** Martin a face à lui $2n$ boites fermées et numérotées de 1 à $2n$ contenant n cubes bleus et n rouges. Au départ Martin possède 1 euro. Au tour i, il parie sur le contenu de la boîte i (il peut parier sur un cube bleu ou un cube rouge). Martin parie x euros, où x est un montant réel d'euros positif et plus petit que la somme d'argent qu'il possède. Il récupère le double de sa mise en cas de pari réussi et rien sinon. A chaque tour, il connait le contenu des boîtes qui ont déjà été ouvertes. Quelle montant maximal Martin peut-il s'assurer à la fin du jeu ?

Exercice 103
** Soit ABC un triangle acutangle avec $AC > BC$. Soit ω son cercle circonscrit. Soit P un point du cercle ω tel que $AC = AP$ et P appartient à l'arc BC ne contenant pas A. Soit Q le point d'intersection des droites (AP) et (BC). Soit R le point du cercle ω appartenant à l'arc AC ne contenant pas le point B et tel que $QA = QR$. Soit S le point d'intersection de la droite (BC) et de la médiatrice du segment $[AB]$.

Montrer que les points P, Q, R et S sont cocycliques.

Exercice 104
** Alice et Bob jouent au jeu suivant :

— D'abord, Bob dessine un triangle ABC et un point P à l'intérieur.

— Ensuite ils choisissent chacun à leur tour, une permutation $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ du triplet $\{A, B, C\}$, de telle sorte qu'Alice choisisse les permutations σ_1 et σ_3, c'est-à-dire qu'elle commence.

— Alice trace enfin un triangle $V_1V_2V_3$.

Pour $i = 1, 2, 3$, soit ψ_i la similitude qui envoie $\sigma_i(A), \sigma_i(B), \sigma_i(C)$ sur V_i, V_{i+1} et X_i tel que le triangle $V_iV_{i+1}X_i$ soit à l'extérieur du triangle $V_1V_2V_3$ (on note que $V_4 = V_1$). Soit enfin $Q_i = \psi_i(P)$. Alice gagne si le triangle $Q_1Q_2Q_3$ est semblable au triangle ABC, Bob gagne sinon.

Qui dispose d'une stratégie gagnante ?

Exercice 105
Montrer que pour tout entier naturel n on a

$$(n+1) \cdot \text{ppcm}\left\{\binom{n}{i} | 0 \leq i \leq n\right\} = \text{ppcm}(1, 2, ..., n+1)$$

Exercice 106
Trouver tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

Exercice 107
** Soit ABC un triangle tel que $\widehat{BAC} = 60°$. Le point K est tel que le triangle ABK est équilatéral et les points C et K ne sont pas dans le même demi-plan délimité par la droite (AB). Le point L est tel que le triangle ACL est équilatéral et les points B et L ne sont pas dans le même demi-plan délimité par la droite (AC). Les droites (AB) et (CK) se coupent un point S. Les droites (AC) et (BL) se coupent en un point R. Les droites (BL) et (CK) se coupent un point T.

Montrer que le centre radical des cercles circonscrits aux triangles BSK, CLR et BTC appartient à la médiane issue du sommet A dans le triangle ABC.

Exercice 108
*** On considère 10 points distincts du plan. Montrer qu'on peut les recouvrir par des disques disjoints de rayon 1.

Exercice 109
*** Soit $r > 1$ un entier et soit F une famille infinie d'ensembles différents de cardinal r telle que deux ensembles de cette famille ne soient jamais disjoints. Montrer qu'il existe un ensemble de cardinal $r - 1$ qui intersecte tous les ensembles de la famille F.

Exercice 110
Trouver tous les entiers naturels non nuls a, b et c deux à deux distincts et tels que

$$a^b + b^c + c^a = a^c + b^a + c^b.$$

Exercice 111
Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe tel que (AB) est tangente au cercle diamètre $[CD]$, et (CD) est tangente au cercle de diamètre $[AB]$. Montrer que les deux points d'intersection de ces cercles sont alignés avec le point d'intersection de (AC) et (BD)

Exercice 112
*** Dans le triangle ABC, soit D le pied de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ et E et F les centres respectifs des cercles circonscrits aux triangles ABD et ACD respectivement. Soit ω le cercle circonscrit à DEF et soit X l'intersection de (BF) et (CE). Les droites (BE) et (BF) coupent ω en P et Q respectivement et les droites (CE) et (CF) recoupent ω en R et S respectivement. Soit Y le second point d'intersection des cercles circonscrits à PQX et RSX. Montrer que Y est sur (AD).

Exercice 113
Soient A, P, Q, R et S des points sur un cercle de telle sorte que

$$\widehat{PAQ} = \widehat{QAR} = \widehat{RAS}$$

Démontrer que $AR(AR + AP) = AQ(AQ + AS)$

Exercice 114
$\star$ Soit ABC un triangle dont le cercle inscrit est noté ω. Soient I le centre de ω et P un point tel que les droites (PI) et (BC) soient perpendiculaires et les droites (PA) et (BC) parallèles. Soient finalement Q et R deux points tels que $Q \in (AB)$, $R \in (AC)$, les droites (QR) et (BC) soient parallèles et finalement (QR) soit tangente à ω.

Prouver que $\widehat{QPB} = \widehat{CPR}$

Exercice 115
Déterminer toutes les fonctions f allant de $\mathbb{N}^\star$ dans $\mathbb{Z}$ telles que pour tout (m, n) :

$$\left\lfloor \frac{f(mn)}{n} \right\rfloor = f(m)$$

Exercice 116
Soit A un ensemble tel que $|A| = 225$. Supposons que $A_1, ..., A_{11}$ sont 11 sous-ensembles de A tel que $|A_i| = 45$, avec $1 \leq i \leq 11$, et $|A_i \cap A_j| = 9$, avec $1 \leq i < j \leq 11$.

Montrez que $|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{11}| \geq 165$, et donnez un exemple pour lequel l'égalité est maintenue.

Exercice 117
Théo t'es où ?! Une maison de laquelle Théo et Corentin ne peuvent sortir (mais que les deux connaissent bien) est représentée par un graphe, où les pièces sont des sommets et les portes des arêtes. Il est toujours possible de trouver un chemin entre deux pièces quelconques de la maison, et le nombre de pièces est dénombrable(1).

Chaque jour, Corentin essaye de retrouver Théo en visitant une pièce précise de la maison pour vérifier s'il n'y est pas, pour lui demander de l'aider avec les corrections ; avant de retourner à ses occupations s'il n'est pas ici. Il peut vérifier la même pièce plusieurs fois d'affilée.

Théo, lui, reste toute la journée dans la pièce sur son ordinateur pour faire cours en visio à ses élèves. Mais la nuit, il décide de se déplacer dans une pièce adjacente pour le jour prochain, de façon à éviter de s'ennuyer. Et il fait cela toutes les nuits.

Pour quelles maisons Corentin possède-t-il une stratégie(2) trouvant toujours Théo, quelle que soit la position initiale de Théo et les portes qu'il décide d'emprunter ?

Une stratégie est une suite prédéfinie (potentiellement infinie) de pièces dans laquelle Corentin va s'il n'a pas trouvé Théo à la pièce précédente (terme précédent de la suite), où le terme initial est la première pièce où il cherche.

Exercice 118
$\star$ Soit ABC un triangle, E un point sur le segment $[AC]$ et F un point sur le segment $[AB]$. Les cercles circonscrits aux triangles ABC et AEF se recoupent au point X. Les cercles circonscrits aux triangles AEB et AFC se recoupent au point K. La droite (AK) recoupe le cercle circonscrit au triangle ABC au point M. Soit N le symétrique du point M par rapport au segment $[BC]$. La droite (XN) recoupe le cercle circonscrit au triangle ABC au point S. Montrer que les droites (BC) et (SM) sont parallèles.

Exercice 119
$\star\star$ f et g sont des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que pour tout entier naturel n, on ait :

$$f(g(n)) = f(n) + 1 \text{ et } g(f(n)) = g(n) + 1$$

Montrer que $f = g$.

Exercice 120
$\star\star\star\star$ Soit Γ un cercle et A, B et C trois points à l'extérieur de Γ. Soient C_1 et C_2 les deux cercles passant par B et C et tangent à Γ. On note X et X' les points de tangence de ces cercles avec Γ. On définit de manière cyclique les points Y, Y', Z et Z'. Montrer que les cercles circonscrits à AXX', BYY' et CZZ' sont coaxiaux.

Exercice 121
$\star$ Soit Γ_1 un cercle de centre A et Γ_2 un cercle de centre B passant par A. Soit P un point variable sur Γ_2. Une tangente à Γ_1 issue de P touche Γ_1 en S et recoupe Γ_2 en Q, et on suppose que S, P et Q sont du même côté de $[AB]$. Une tangente à Γ_1 différente de la droite (SP) issue de Q touche Γ_1 en T. Soit M le pied de la hauteur issue de P dans le triangle APB. Soit N le point d'intersection des droite (TM) et (AQ). Montrer que lorsque le point P varie sur le cercle Γ_2, le point N reste sur une droite ne dépendant pas du point P.

Exercice 122
Pour un ensemble A, on note $|A|$ le nombre d'éléments de l'ensemble (aussi appelé cardinal) et $s(A)$ la somme des éléments de A. Si $A = \emptyset$, alors $|A| = s(A) = 0$.

On note S l'ensemble d'entiers positifs tel que :

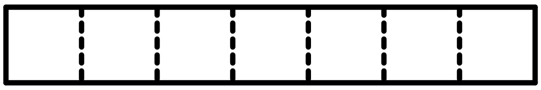
— il y a deux nombres $x, y \in S$ tel que $x \wedge y = 1$
— pour tout couple $(x, y) \in S^2$, $x + y \in S$.

On note T l'ensemble des entiers positifs n'appartenant pas à S. Montrez que $s(T) \leq |T|^2 < +\infty$

Exercice 123
$\star\star\star\star\star\star\star\star$ On considère une ligne de n carrés. On note $S(n)$ le nombre minimal de carrés à colorier en bleu tels que chacun des $n-1$ traits séparant deux cases voisines soit à égale distance de deux cases bleues. Montrer que

$$\lfloor 2\sqrt{n-1} \rfloor + 1 \leqslant S(n) \leqslant \lfloor 2\sqrt{n} \rfloor + 1.$$

Les "traits séparant deux cases voisines" sont réprésentés en pointillé ici :



Exercice 124

** Déterminer s'il existe une suite strictement croissante (a_n) d'entiers strictement positifs telle que pour tout n, $a_n \leqslant n^3$ et tout entier strictement positif peut être écrit d'une unique façon comme différence de deux entiers de la suite.

Exercice 125

** Soit ABC un triangle et D, E et F les points de contact du cercle inscrit avec les côtés $[BC], [CA]$ et $[AB]$. Soit H le pied de la hauteur issue du sommet D dans le triangle DEF. On suppose que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.

Montrer que H est l'orthocentre du triangle ABC.

Exercice 126

Dans tout cet exercice, les cas particuliers ayant une probabilité nulle de se produire (droites concourantes par ex) pour des droites prises au hasard pourront être ignorés. Montrer qu'on peut associé, à chaque famille de $2n + 1$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ en position générale, un cercle, et à chaque famille de $2n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ droites un point de manière que les propriétés suivantes soient vérifiées.

— Le point associé à deux droites est leur point d'intersection.

— Le cercle associé à $2n + 1$ droites passe par les $2n + 1$ points associés à chaque sous-ensemble de $2n$ de ces droites.

— Le point associé à $2n + 2$ droites est sur chacun des $2n + 2$ cercles associés à chaque sous-ensemble de $2n + 1$ de ces droites.

Exercice 127

Soit ABC un triangle et P un point sur son cercle circonscrit. La droite (PB) coupe la hauteur issue de C en X et (PC) coupe la hauteur issue de B en Y. Montrer que quand P parcours le cercle, le milieu de $[XY]$ parcours un cercle.

Exercice 128

Soit n un entier. Dans les lignes d'un tableau de 2^n lignes et n colonnes on place tous les n-uplets formés de 1 et de -1. Ensuite, on efface certains de ces nombres, et on les remplace par des 0.

Prouver que l'on peut trouver un ensemble de lignes dont la somme est nulle (i.e., tel que, pour tout i, la somme des nombres appartenant à la colonne i d'une ligne de notre ensemble soit nulle).

Exercice 129
** Soit k un entier strictement positif.

Montrer qu'il existe un entier strictement positif l satisfaisant la propriété suivante : pour tous entiers n et m premiers avec l tels que $m^m \equiv n^n \mod l$, on a $m \equiv n \mod k$.

Exercice 130
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe un polygone (non nécessaire convexe mais non croisé) admettant exactement n triangulations.

Exercice 131
** Dans une classe, un groupe d'élèves est dit dominant si chaque élève de la classe possède un ami dans ce groupe. On sait qu'il y a au moins 100 groupes dominants différents dans la classe.

Montrer qu'il y a en fait au moins 101 groupes dominants dans la classe.

Exercice 132
*** On considère une grille 3×3 (cf. figure) telle toutes les cases sauf un coin soient circonscriptibles. Montrer que cette dernière case est circonscriptible.

Exercice 133
* Soit ABC un triangle. Soient E et F des points sur les segments $[AB]$ et $[AC]$ tels que

$$BC^2 = BA \times BF + CA \times CE$$

Montrer que pour tout tel choix de E et F, le cercle circonscrit au triangle AEF passe par un point fixe.

Exercice 134
Une grille 1000×1000 est remplie avec des 0 ou des 1. Montrer qu'il existe soit un ensemble de 10 lignes telles que chaque colonne ait un 1 parmi ces lignes ou un ensemble de 10 colonnes telles que chaque ligne ait un 0 parmi ces 10 colonnes.

Exercice 135
Soient $a, b, c > 0$ des nombres réels tels que $a + b + c = 3$. Prouver que :

$$\frac{ab}{b^3+1} + \frac{bc}{c^3+1} + \frac{ca}{a^3+1} \leq \frac{3}{2}.$$

Exercice 136
Soit P un polynôme de degré 20 à coefficients entiers. Trouver le nombre maximal de nombres entiers dont l'image est un entier entre 0 et 10 inclus.

Exercice 137
Tout entier (relatif) est-il somme d'un nombre fini de cubes d'entiers relatifs distincts ?

Exercice 138
$\star$ Raphaël et Yaël jouent à un jeu sur un échiquier infini, chaque case étant repérée par deux coordonnées entières (x, y). Initialement Raphaël pose une bille sur la case de coordonnées $(0, 0)$. A chaque coup, si la bille se trouve sur un point de coordonnées (x, y), Raphaël peut la déplacer sur une case de coordonnées $(x + 1, y + k)$ avec $k \in [\![-2021, 2021]\!]$. Pour l'en empêcher, à chaque fois que Raphaël déplace sa bille, Yaël peut choisir de *bloquer* une case, qui ne sera plus jamais accessible pour Raphaël. Yaël peut-il faire en sorte que Raphaël ne puisse plus déplacer sa bille ?

Exercice 139
$\star$ Soient $a, b, c > 0$ des réels, monter l'inégalité suivante :

$$(a^5 - a^2 + 3)(b^5 - b^2 + 3)(c^5 - c^2 + 3) \geq (a + b + c)^3$$

Exercice 140
$\star\star\star$ Timothée a attaché son léopard noté L à un poteau en forme d'ellipse. La laisse du léopard est une boucle de longueur fixée qui fait le tour du poteau. Montrer que la limite de la zone que peut parcourir le léopard est aussi une ellipse.

Exercice 141
$\star$ Soit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers vérifiant $m - n \mid q_m - q_n$ pour tous entiers $m, n \geq 0$. On suppose également qu'il existe un polynôme P tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $|q_n| \leq P(n)$. Montrer qu'il existe un polynôme Q tel que $q_n = Q(n)$ pour tout entier $n \geq 0$.

Exercice 142
$\star$ Alice et Bob jouent coopérativement à un jeu. Sur un collier se trouvent $6n$ perles. $3n$ perles sont blanches et $3n$ perles sont noires, de sorte que 3 perles consécutives ne sont jamais toutes de la même couleur. Tour à tour Alice et Bob enlèvent 3 perles consécutives du collier. Alice peut enlever 3 perles consécutives si et seulement si elles se trouvent dans l'ordre *noir-blanc-noir* et Bob peut enlever 3 perles consécutives si et seulement si elles se trouvent dans l'ordre *blanc-noir-blanc*. Montrer que si Alice et Bob peuvent enlever toutes les perles si Alice commence, alors Alice et Bob peuvent enlever toutes les perles si Bob commence.

Exercice 143
11 piles de 10 cailloux sont disposées. Aurélien et Rémi s'affrontent dans le jeu suivant : chacun leur tour en commençant par Aurélien, il vont prendre 1, 2 ou 3 cailloux, Aurélien devant tous les prendre dans la même pile et Rémi ne pouvant en prendre au plus un par pile. Celui qui ne peut plus jouer perd. Qui gagne ?

IX. Citations mémorables

— *Vincent* : « Ça fait du bien d'Euler ! »
— *Arthur T.* : « Moi aussi je me suis réveillé trop tôt, alors j'ai fait une douche »
— *Léopold* : « C'est au supermarché ou pas qu'on achète le réseau 4G euh... l'antenne »
— *Rémi* : « L'équation de Cauchy sur $\mathbf{R}$ c'est pire que toi au réveil »
— *Claire* : « Moi les chiffres, je vois un 1, je vois un 2, je sais que $1+2$ ça fait 4 »
— *Léopold* : « Mais je comprends pas pourquoi il y a des q partout »
— *Tristan K.* : En parlant d'un cercle qui devient une droite à la limite : « vous insinuez que le terre est plate ? »
— *Tristan K.* (En parlant de CAH-SOH-TOA) : « Ça s'appelle le théorème "casse-toi" ! »
— *Camille* : « Restez amoureux si vous êtes heureux »
— *Arthur T.* : « Je crois que tu devrais regarder des vidéos de développement personnel »
— *Vincent* : « $n+$coût(k) Ah ! C'est presque Maryam ! »
— *Lucile* : « Je pense que ça marche pour les multiples de 4. À part 2. »
— *Hadriel* : « Monge, c'est le meilleur théorème du monge. »
— *Lilas* : à son frère (au loup garou) : « Mais tu viens de divorcer avec moi ! »
— *Melvil* : à sa soeur (au loup garou) : « T'es amoureuse de moi, tu vas mourir, et tu veux même pas assurer mon bonheur futur ? »
— *Rémi* : « Il y a des choses que les enfants ne doivent pas connaître avant un certain âge. Diviser dans les modulos en fait partie. »
— *Eva C.* : « Dans le groupe C, on est là pour progreC »
— *Héloïse* : « Quoi ? Drilatère. »
— *Paul* : « Vous foutez quoi les footeux ? »
— *Louis* : « On a la réponse mais pas la question »
— *Pierre Berhard* : « Soit il est blessé, soit il est mort, ce qui n'est pas très bon pour la santé. »
— *Léopold* : « Donc on a fait la conférence d'hier juste pour le cours d'aujourd'hui ? »
— *Alexander* : Après 5 min de réflexion : « Mais en fait on ne peut pas le démontrer parce que c'est faux. »
— *Au Time's Up* : « Lourd » « Blagues de Vincent Jugé ! »
— *Martin* : « La géométrie, c'est la manifestation visuelle que les mathématiques sont une chambre bien rangée. »

— *Martin* : « Léopold a bien fait de rendre sa figure, contrairement à mes trois bandits »

— *Antoine* : « Vous vous rendez compte que vous êtes plus fatigants que le groupe C, et dans le groupe C il y a Arthur Tézé ? »

— *Rémi* : « D'abord vous le faites pour un carré, c'était facile, ensuite pour le pentagone vous bidouillez, et pour l'hexagone vous êtes en PLS. »

— *Camille* : « Si on mélange les abscisses, après les abscisses sont désordonnées. »

— *Eva C.* : « Combien de diagonales a un quadrilatère à 10 côtés ? »

— *Antoine* : « Notez bien mes citations, il faudrait pas que je les note moi-même »

— *Tristan* : (Après avoir passé deux heures à essayer de compléter la preuve d'Auguste : « On a donné du sens à ses écrits, un peu comme des évangélistes »

— *Élève* : « Créée avec 3 'e' c'est moche ! »
Antoine : « C'est toi qui es moche »

— *Isaline* : (A un élève :)« C'est toi qui a fait de l'analytique ?
Bah c'était crade. »

— *Rémi* : « Si vous avez pas compris ça, vous allez nager en plein délire pendant une heure et demie »

— *Théodore* : « Est-ce que la personne qui a inventé l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'appelle Cauchy-Schwarz »

— *Rémi* : « Alors pourquoi tu as un instinct éclaté au sol ? »

— Théo : « J'ai l'impression que quelle que soit la question de Théodore, la réponse est non. Je pourrais même demander à Maëlys. »
Théodore : Du coup je vais demander : Est-ce que Théo est beau ? »
Théo : « Maëlys ? »
Maëlys : « Non ! »
Théo : « Bonne réponse ! » »

— *Aurélien* (À la piscine) : « Alors je coule qui ? À qui le tour ? »
Se fait couler « Ah ben à moi apparemment... »

— *Théodore* : « Je pense que le corrigeur a trop bu ! »

— *Rémi* : « Donc la note qu'il y a écrit sur votre copie c'est pas important. »
Apollinaire : « Bah si c'est important la note, moi c'est la seule chose que je regarde sur ma copie ! »
Rémi : « Oui, sauf pour toi ! Toi regarde bien la note sur ta copie, ça t'apprendra à ne pas lire l'énoncé »
Apollinaire : « Ah merde ! »

— *Rémi* : « Il n'y a pas de questions bêtes »
Deux secondes plus tard, après une question de Nils : « D'autres questions bêtes ? »

— *Rémi* : « L'enseignement par la terreur, c'est efficace ! »

— *Rémi* : « On fait appel au Saint, on écoute ce qu'il a à nous dire sur l'équation. »