PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 12 JANVIER 2022

DURÉE : 4H

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- Le **groupe Junior** est constitué des élèves nés en 2007 ou après.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 1 à 4.
- Le **groupe Senior** est constitué des élèves nés en 2006 ou avant.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 5 à 7.
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées.
  Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

Énoncés Junior

Exercice 1. Martin a versé à la hâte n litres d'eau dans n bouteilles. Certaines bouteilles sont donc plus remplies que d'autres. C'est alors qu'il se rappelle que sa mission était de mettre exactement un litre d'eau dans chaque bouteille avant de refermer le bouchon de celle-ci. Comme il n'a pas encore refermé les bouchons, il est encore temps de réparer ses bêtises.

Pour ce faire, il choisit une première bouteille, verse une partie de son contenu dans une autre bouteille s'il le souhaite, puis bouche cette première bouteille. Il choisit ensuite une seconde bouteille (qui peut être celle dans laquelle il a partiellement vidé la première bouteille, ou pas), verse une partie de son contenu dans une autre bouteille (mais pas dans la première bouteille, qui est déjà bouchée) s'il le souhaite, puis la bouche. Puis il procède de même avec une troisième bouteille, et ainsi de suite, jusqu'à boucher toutes les bouteilles.

Démontrer que, si Martin choisit astucieusement les bouteilles dont il referme le bouchon et celles dans lesquelles il les vide partiellement, il finira bien par réparer ses bêtises.

Note : les bouteilles sont surdimensionnées, et pourraient chacune contenir jusqu'à n litres d'eau, ce qui les empêchera de déborder.

Exercice 2. Aline et Théo jouent au jeu suivant. Tout d'abord, Théo choisit des nombres premiers $p_1, p_2, \ldots$ Puis Aline choisit des entiers naturels non nuls $n_1, n_2, \ldots$ deux à deux distincts. Théo choisit ensuite deux entiers $k \geqslant 1$ et $\ell \geqslant 1$. Il gagne la partie s'il existe une infinité d'entiers n_i qui ne sont pas divisibles par p_k^ℓ. Sinon, c'est Aline qui gagne.

a) Qui, d'Aline ou de Théo, dispose d'une stratégie gagnante ?

b) Pour corser encore le jeu, Aline a maintenant une contrainte supplémentaire : chaque entier n_i ne peut diviser qu'un nombre fini d'entiers n_j. Avec ces nouvelles règles, qui, d'Aline ou de Théo, dispose d'une stratégie gagnante ?

Exercice 3. Soit ABC un triangle et Ω son cercle circonscrit. Soit D le pied de la hauteur issue du sommet A. La bissectrice issue du sommet A coupe le segment $[BC]$ au point P et recoupe le cercle Ω au point S. Soit A' le point diamétralement opposé au sommet A dans le cercle Ω. Démontrer que les droites (SD) et $(A'P)$ se coupent sur le cercle Ω.

Exercice 4. Soit n un entier naturel non nul. Anna a écrit $4n+2$ entiers deux à deux distincts et compris entre 0 et 5^n inclus. Démontrer que, parmi les entiers qu'elle a écrits, il en existe trois, disons a, b et c, tels que $a < b < c$ et $c + 2a > 3b$.

Énoncés Senior

Exercice 5. Soit n un entier naturel non nul. Anna a écrit $4n+2$ entiers deux à deux distincts et compris entre 0 et 5^n inclus. Démontrer que, parmi les entiers qu'elle a écrits, il en existe trois, disons a, b et c, tels que $a < b < c$ et $c + 2a > 3b$.

Exercice 6. Trouver tous les entiers $n \geqslant 1$ ayant la propriété suivante : il existe une permutation $d_1, d_2, \ldots, d_k$ des diviseurs positifs de n telle que, pour tout $i \leqslant k$, la somme $d_1 + d_2 + \ldots + d_i$ soit un carré parfait.

Exercice 7. Trouver tous les entiers $n \geqslant 3$ pour lesquels tout n-gone convexe dont les côtés sont de longueur 1 contient un triangle équilatéral de côté 1.