PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

Test du 23 et du 24 février 2022

Durée : 4h

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- Le **groupe Junior** est constitué des élèves nés en 2007 ou après.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 1 à 4.
- Le **groupe Senior** est constitué des élèves nés en 2006 ou avant.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 5 à 7.
- Le **groupe EGMO** est constitué des élèves nées en 2006 ou avant et éligibles à l'EGMO.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 8 à 10.
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées.
  Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

Énoncés Junior

Exercice 1. Soit a, b, c et d des entiers naturels non nuls. On suppose que $a! + b! = c! + d!$. Démontrer que $ab = cd$.

Exercice 2. Soit ABC un triangle dont les angles sont aigus et soit D un point situé à l'intérieur du triangle ABC. Les droites (AD) et (BD) recoupent le cercle circonscrit au triangle ABC respectivement en les points A_1 et B_1. Le cercle circonscrit au triangle B_1DA recoupe la droite (AC) au point P. Le cercle circonscrit au triangle A_1BD recoupe la droite (BC) au point Q.

Démontrer que le quadrilatère $CPDQ$ est un parallélogramme.

Exercice 3. Maena et Théodore jouent à un jeu. Ils jouent sur une grille carrée formée de 99×99 cases. On considère que deux cases sont adjacentes si elles ont un sommet ou un côté en commun.

Initialement, Maéna numérote les cases de la grille de 1 à 99^2, de façon arbitraire. Théodore place alors un jeton sur l'une des cases du carré, puis il s'autorise des mouvements de la forme suivante : il peut déplacer le jeton d'une case vers une autre uniquement si ces cases sont adjacentes et si la nouvelle case sur laquelle se retrouve le jeton a un numéro strictement plus grand que l'ancienne case.

Combien de mouvements au minimum Théodore peut-il garantir, quelle que soit la manière avec laquelle Maena a placé ses entiers ?

Exercice 4. Soit p et q deux nombres premiers distincts, tels que $p < 2q$ et $q < 2p$. Démontrer qu'il existe deux entiers consécutifs dont l'un a p pour plus grand facteur premier et l'autre a q pour plus grand facteur premier.

Énoncés Senior

Exercice 5. Soit $\mathcal{S}$ un ensemble infini d'entiers naturels non nuls contenant quatre entiers a, b, c, d deux à deux distincts tels que $\mathrm{pgcd}(a,b) \neq \mathrm{pgcd}(c,d)$. Démontrer que $\mathcal{S}$ contient trois entiers x, y, z deux à deux distincts tels que $\mathrm{pgcd}(x,y) = \mathrm{pgcd}(y,z) \neq \mathrm{pgcd}(z,x)$.

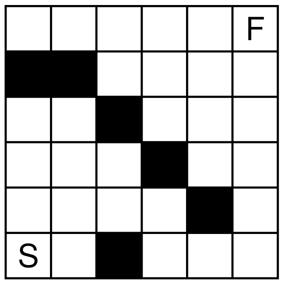
Exercice 6. Soit A, B, C et D quatre points situés sur un cercle Ω. Soit E et F les points d'intersection des demi-droites $[BA)$ et $[BC)$ avec la tangente à Ω en D. Soit T un point, situé à l'intérieur du triangle ABC, tel que (TE) soit parallèle à (CD) et que (TF) soit parallèle à (AD). Enfin, soit K le point du segment $[DF]$, autre que D, tel que $TD = TK$.

Démontrer que les droites (AC), (DT) et (BK) sont concourantes.

Exercice 7. Soit $n \geqslant 2$ un entier. Une grenouille se déplace dans une grille de $3n \times 3n$ cases, sautant chaque fois d'une case vers la case située juste au-dessus ou juste à droite. Elle souhaite aller du coin en bas à gauche, marqué d'un S, au coin en haut à droite, marqué d'un F. Malheureusement, certaines cases sont piégées, et si la grenouille saute sur une telle case, elle y restera prisonnière.

On dit qu'un ensemble de cases piégées est *bloquant* s'il empêche la grenouille d'aller de la case S à la case F. On dit aussi qu'un ensemble bloquant est *minimal* si, dès lors que l'on retire le piège de l'une des cases de cet ensemble, notre ensemble n'est plus bloquant.

Par exemple, les cases noires de la grille ci-dessous forment un ensemble bloquant minimal.



a) Démontrer qu'il existe un ensemble bloquant minimal qui contient au moins $3n(n-1)$ cases.

b) Démontrer que tout ensemble bloquant minimal contient au plus $3n^2$ cases.

Énoncés EGMO

Exercice 8. Soit $ABCD$ un parallélogramme. Une droite d passant par C coupe respectivement les droites (AB) et (AD) en X et en Y. Les tangentes en X et en Y au cercle circonscrit à AXY se coupent en un point T, puis la droite (CT) recoupe le cercle circonscrit à CDY en un point P.

Démontrer que les points A, B, D et P sont cocycliques.

Exercice 9. Trouver les entiers n pour lesquels l'égalité

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left\lfloor \frac{i \times j}{n+1} \right\rfloor = \frac{n^2(n-1)}{4}$$

est vérifiée.

On rappelle que, pour tout nombre réel x, la notation $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x.

Exercice 10. Soit n un entier naturel. On dit qu'un ensemble fini d'entiers est n-équilibré s'il y a exactement n manières de le partitionner en deux sous-ensembles de même somme. Par exemple, l'ensemble $\{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$ est 2-équilibré, car les seules manières de le partitionner en deux sous-ensembles de même somme sont de le partitionner en $\{1, 3, 4, 5\}$ et $\{6, 7\}$, ou bien en $\{1, 5, 7\}$ et $\{3, 4, 6\}$.

Trouver tous les entiers $n \geqslant 0$ pour lesquels il existe un ensemble n-équilibré.