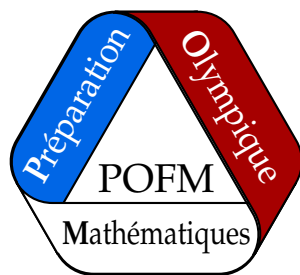


PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES



TEST DU 20 ET DU 21 FÉVRIER 2022

DURÉE : 4H

Instructions

- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- ▷ Le **groupe Junior** est constitué des élèves nés en 2007 ou après. Ces élèves doivent traiter les exercices 1 à 4.
- ▷ Le **groupe Senior** est constitué des élèves nés en 2006 ou avant. Ces élèves doivent traiter les exercices 5 à 7.
- ▷ Le **groupe EGMO** est constitué des élèves nées en 2006 ou avant et éligibles à l'EGMO. Ces élèves doivent traiter les exercices 8 à 10.
- ▷ On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits. Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Chaque exercice est noté sur 7 points.

Problèmes Junior

Exercice 1. Soit a, b, c et d des entiers naturels non nuls. On suppose que $a! + b! = c! + d!$. Démontrer que $ab = cd$.

Exercice 2. Soit ABC un triangle dont les angles sont aigus et soit D un point situé à l'intérieur du triangle ABC . Les droites (AD) et (BD) recoupent le cercle circonscrit au triangle ABC respectivement en les points A_1 et B_1 . Le cercle circonscrit au triangle B_1DA recoupe la droite (AC) au point P . Le cercle circonscrit au triangle A_1BD recoupe la droite (BC) au point Q .

Démontrer que le quadrilatère $CPDQ$ est un parallélogramme.

Exercice 3. Maena et Théodore jouent à un jeu. Ils jouent sur une grille carrée formée de 99×99 cases. On considère que deux cases sont adjacentes si elles ont un sommet ou un côté en commun.

Initialement, Maéna numérote les cases de la grille de 1 à 99^2 , de façon arbitraire. Théodore place alors un jeton sur l'une des cases du carré, puis il s'autorise des mouvements de la forme suivante : il peut déplacer le jeton d'une case vers une autre uniquement si ces cases sont adjacentes et si la nouvelle case sur laquelle se retrouve le jeton a un numéro strictement plus grand que l'ancienne case.

Combien de mouvements au minimum Théodore peut-il garantir, quelle que soit la manière avec laquelle Maena a placé ses entiers ?

Exercice 4. Soit p et q deux nombres premiers distincts, tels que $p < 2q$ et $q < 2p$. Démontrer qu'il existe deux entiers consécutifs dont l'un a p pour plus grand facteur premier et l'autre a q pour plus grand facteur premier.

Problèmes Senior

Exercice 5. Soit S un ensemble infini d'entiers naturels non nuls contenant quatre entiers a, b, c, d deux à deux distincts tels que $\text{pgcd}(a, b) \neq \text{pgcd}(c, d)$. Démontrer que S contient trois entiers x, y, z deux à deux distincts tels que $\text{pgcd}(x, y) = \text{pgcd}(y, z) \neq \text{pgcd}(z, x)$.

Exercice 6. Soit A, B, C et D quatre points situés sur un cercle Ω . Soit E et F les points d'intersection des demi-droites $[BA)$ et $[BC)$ avec la tangente à Ω en D . Soit T un point, situé à l'intérieur du triangle ABC , tel que (TE) soit parallèle à (CD) et que (TF) soit parallèle à (AD) . Enfin, soit K le point du segment $[DF]$, autre que D , tel que $TD = TK$.

Démontrer que les droites (AC) , (DT) et (BK) sont concourantes.

Exercice 7. Soit $n \geq 2$ un entier. Une grenouille se déplace dans une grille de $3n \times 3n$ cases, sautant chaque fois d'une case vers la case située juste au-dessus ou juste à droite. Elle souhaite aller du coin en bas à gauche, marqué d'un S, au coin en haut à droite, marqué d'un F. Malheureusement, certaines cases sont piégées, et si la grenouille saute sur une telle case, elle y restera prisonnière.

On dit qu'un ensemble de cases piégées est *bloquant* s'il empêche la grenouille d'aller de la case S à la case F. On dit aussi qu'un ensemble bloquant est *minimal* si, dès lors que l'on retire le piège de l'une des cases de cet ensemble, notre ensemble n'est plus bloquant.

Par exemple, les cases noires de la grille ci-dessous forment un ensemble bloquant minimal.

					F
■	■				
		■			
			■		
				■	
S		■			

- Démontrer qu'il existe un ensemble bloquant minimal qui contient au moins $3n(n-1)$ cases.
- Démontrer que tout ensemble bloquant minimal contient au plus $3n^2$ cases.

Problèmes EGMO

Exercice 8. **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**

Exercice 9. Trouver les entiers n pour lesquels l'égalité

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\lfloor \frac{i \times j}{n+1} \right\rfloor = \frac{n^2(n-1)}{4}$$

est vérifiée.

On rappelle que, pour tout nombre réel x , la notation $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x , c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x .

Exercice 10. Soit n un entier naturel. On dit qu'un ensemble fini d'entiers est n -équilibré s'il y a exactement n manières de le partitionner en deux sous-ensembles de même somme. Par exemple, l'ensemble $\{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$ est 2-équilibré, car les seules manières de le partitionner en deux sous-ensembles de même somme sont de le partitionner en $\{1, 3, 4, 5\}$ et $\{6, 7\}$, ou bien en $\{1, 5, 7\}$ et $\{3, 4, 6\}$.

Trouver tous les entiers $n \geq 0$ pour lesquels il existe un ensemble n -équilibré.