PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 23 MARS 2022

DURÉE : 4H

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- Le **groupe Junior** est constitué des élèves nés en 2007 ou après.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 1 à 4.
- Le **groupe Senior** est constitué des élèves nés en 2006 ou avant.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 5 à 7.
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées.
  Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

Énoncés Junior

Exercice 1. Soit $ABCD$ un rectangle. Soit ω le demi-cercle de diamètre $[BC]$, de sorte que le point A et le demi-cercle ω sont situés du même côté par rapport au segment $[BC]$. Le cercle de centre B et de rayon AB recoupe le demi-cercle ω au point E. La droite (AE) recoupe le demi-cercle ω au point F. Montrer que $AF = BF$.

Exercice 2. Soit n un entier tel que $n \geqslant 3$. Lucie dispose n feuilles blanches en cercle, puis elle écrit un nombre réel sur chaque feuille. Trouver tous les entiers k tels que $1 \leqslant k \leqslant n$ pour lesquels la propriété suivante est vraie :

> Si au moins un des nombres qu'a écrits Lucie n'est pas nul, il existe k feuilles consécutives dont la somme des nombres n'est pas nulle.

Exercice 3. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note f_n la somme de tous les restes obtenus en divisant n par les nombres $1, 2, \ldots, n$. Par exemple, si on divise 5 par 1, 2, 3, 4 et 5, les restes que l'on obtient sont 0, 1, 2, 1 et 0, de sorte que $f_5 = 0 + 1 + 2 + 1 + 0 = 4$.

Trouver tous les entiers $n \geqslant 2$ tels que $f_n = f_{n-1} + n - 2$.

Exercice 4. Soit m et n deux entiers tels que $m > n \geqslant 3$. Morgane a disposé m jetons en cercle, et s'apprête à les peindre en utilisant n couleurs distinctes. Elle souhaite que, parmi $n+1$ jetons consécutifs, il y ait toujours au moins un jeton de chacune des n couleurs. Si elle peut y parvenir, on dira que l'entier m est n-coloriable.

Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 3$, il n'existe qu'un nombre fini *non nul* d'entiers m qui ne sont *pas* n-coloriables, et trouver le plus grand entier m qui ne soit pas n-coloriable.

Énoncés Senior

Exercice 5. Soit m et n deux entiers tels que $m > n \geqslant 3$. Morgane a disposé m jetons en cercle, et s'apprête à les peindre en utilisant n couleurs distinctes. Elle souhaite que, parmi $n+1$ jetons consécutifs, il y ait toujours au moins un jeton de chacune des n couleurs. Si elle peut y parvenir, on dira que l'entier m est n-coloriable.

Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 3$, il n'existe qu'un nombre fini *non nul* d'entiers m qui ne sont *pas* n-coloriables, et trouver le plus grand entier m qui ne soit pas n-coloriable.

Exercice 6. Une *permutation* des entiers 1 à 2022 est une suite $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{2022})$ telle que chaque élément de l'ensemble $\{1, \ldots, 2022\}$ soit égal à exactement un terme σ_i. Quelle est la plus petite valeur possible que peut prendre la somme

$$\left\lfloor \frac{a_1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a_2}{2} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{a_{2022}}{2022} \right\rfloor$$

lorsque les entiers $a_1, a_2, \ldots, a_{2022}$ forment une permutation des entiers de 1 à 2022 ?

Exercice 7. Soit $(a_n)_{n \geqslant 1}$ une suite d'entiers naturels non nuls telle que a_{n+2m} divise $a_n + a_{n+m}$ pour tous les entiers $m \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$. Démontrer que cette suite est ultimement périodique, c'est-à-dire qu'il existe deux entiers $N \geqslant 1$ et $d \geqslant 1$ tels que $a_n = a_{n+d}$ pour tout $n \geqslant N$.