PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 18 MAI 2022

DURÉE : 4H

Instructions

- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- ▷ Le **groupe Junior** est constitué des élèves nés en 2007 ou après.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 1 à 4.
- ▷ Le **groupe Senior** est constitué des élèves nés en 2006 ou avant.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 5 à 7.
- ▷ On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées.
  Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

Énoncés Junior

Exercice 1. Trouver tous les entiers naturels non nuls a, b et c pour lesquels il existe des entiers naturels non nuls x, y et z tels que $x! = ab + 1$, $y! = bc + 1$ et $z! = ca + 1$.

Remarque : Pour tout entier naturel non nul n, l'entier $n!$ désigne le produit $1 \times 2 \times \cdots \times n$.

Exercice 2. Le gouvernement de Bosnie-Herzégovine a décidé de mettre en place un nouveau système de plaques d'immatriculations. Chaque plaque d'immatriculation devra contenir 8 chiffres, chacun pouvant valoir 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9. En outre, deux plaques d'immatriculation distinctes devront toujours avoir au moins deux chiffres différents. Par exemple, s'il met en circulation la plaque 00000000, le gouvernement ne pourra pas mettre en circulation la plaque 00010000.

Trouver le nombre maximum de plaques d'immatriculation que le gouvernement peut mettre en circulation.

Exercice 3. Soit x, y et z trois nombres réels tels que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Trouver les valeurs minimale et maximale possibles du nombre réel $xy + yz - zx$.

Exercice 4. Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que $AC = BC$. Soit P un point situé sur le prolongement du segment $[AB]$ au-delà de B. Soit Q le point d'intersection, autre que D, entre le segment $[PD]$ et le cercle circonscrit à ACD. Soit ensuite R le point d'intersection, autre que P, entre le segment $[PC]$ et le cercle circonscrit à APQ.

Démontrer que les droites (AQ), (BR) et (CD) sont concourantes.

Énoncés Senior

Exercice 5. Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que $AC = BC$. Soit P un point situé sur le prolongement du segment $[AB]$ au-delà de B. Soit Q le point d'intersection, autre que D, entre le segment $[PD]$ et le cercle circonscrit à ACD. Soit ensuite R le point d'intersection, autre que P, entre le segment $[PC]$ et le cercle circonscrit à APQ.

Démontrer que les droites (AQ), (BR) et (CD) sont concourantes.

Exercice 6. Un chasseur et un lapin invisible jouent sur une grille infinie à maille carrée, c'est-à-dire où chaque case a quatre voisines : à gauche, à droite, en haut et en bas. Tout d'abord, le chasseur colorie chaque case de la grille, mais ne peut utiliser qu'un nombre fini de couleurs. Le lapin choisit ensuite une case de la grille, qui sera son point de départ. Il commence alors à se déplacer : chaque minute, il indique au chasseur la couleur de la case sur laquelle il se trouve, puis il se déplace sur une des quatre cases adjacentes. Évidemment, comme il est invisible, les seules informations auxquelles le chasseur a accès sont les couleurs que le lapin annonce chaque minute juste avant de se déplacer.

Le chasseur gagne si, au bout d'une durée finie,

- ▷ il peut identifier la case que le lapin avait initialement choisie, ou bien si
- ▷ le lapin revient en une case où il s'était déjà trouvé précédemment.

Le chasseur dispose-t-il d'une stratégie gagnante ?

Exercice 7. Soit n un entier supérieur ou égal à 2, et soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des réels strictement positifs tels que $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$. Démontrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1 - a_k}(a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1})^2 < \frac{1}{3}.$$