Coupe Animath de Printemps

8 juin 2022

Durée : 3 heures (collège), 4 heures (lycée).

Instructions

▷ Les exercices « collégiens » concernent les élèves scolarisés au collège.
Les exercices « lycéens » concernent les élèves scolarisés au lycée.
Chaque exercice est noté sur 7 points.

▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**

▷ **Pour les exercices 1 et 8,** seule une réponse numérique est attendue ; un résultat correct sans justification vaudra donc 7 points, tandis qu'un résultat incorrect sans justification vaudra 0 point. Cependant, si un raisonnement accompagne un résultat faux (ou pas de résultat), ce raisonnement sera lu et noté et pourra rapporter une partie des points de l'exercice.

▷ **À part dans les exercices 1 et 8,** on demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.

▷ Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.

▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.

▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
LES CALCULATRICES SONT INTERDITES, AINSI QUE TOUS LES INSTRUMENTS ÉLECTRONIQUES.
Cela concerne en particulier l'usage de l'ordinateur, et donc de *Geogebra* et de logiciels de traitement de texte.

Après l'épreuve, merci de renvoyer les copies par voie électronique via le formulaire de dépôt disponible à l'adresse suivante :

`http://igm.univ-mlv.fr/~juge/animath/`

Association Animath,
Préparation Olympique Française de Mathématiques (POFM)

`contact-pofm@animath.fr`

Exercices collégiens

Exercice 1. Calculer

$$\sqrt{32\sqrt{16\sqrt{8\sqrt{4}}}}.$$

Seule une réponse numérique est attendue ici.

Exercice 2. Soit AMC un triangle isocèle en M et tel que l'angle $\widehat{AMC}$ est aigu. Soit B le symétrique du point A par rapport au point M et soit H le pied de la hauteur issue du sommet C dans le triangle ABC. On suppose que $AH = HM$. Calculer les valeurs des trois angles du triangle ABC.

Exercice 3. On considère vingt immeubles arrangés autour d'un cercle. Chaque immeuble possède un nombre entier d'étages compris entre 1 et 20. On suppose que deux immeubles quelconques ont toujours un nombre d'étages différent. Un immeuble est dit *intéressant* s'il possède plus d'étages que l'un de ses voisins et moins d'étage que l'autre de ses voisins. Les immeubles sont arrangés de telle sorte qu'il y a six immeubles intéressants en tout.

1) Montrer que la somme des nombres d'étages des immeubles intéressants est toujours supérieure ou égale à 27.

2) Donner une configuration de vingt immeubles pour laquelle il y a exactement six immeubles intéressants et dont la somme des nombres d'étages vaut exactement 27.

Exercice 4. Soit ABC un triangle dans lequel $BC > AB$ et $BC > AC$. Soit P le point du segment $[BC]$ tel que $AB = BP$ et soit Q le point du segment $[BC]$ tel que $AC = CQ$. Montrer que $\widehat{BAC} + 2\widehat{PAQ} = 180°$.

Exercice 5. Dans une salle il y a dix élèves. Aline écrit dix entiers relatifs consécutifs au tableau. Chaque élève choisit un des dix entiers écrits au tableau, de sorte que deux élèves choisissent toujours deux entiers différents. Chaque élève calcule ensuite la somme des neuf entiers choisis par les neuf autres élèves. Chaque élève dont le résultat est un carré parfait reçoit alors un cadeau.

Quel est le nombre maximum d'élèves qui vont recevoir un cadeau ?

Un carré parfait est un entier de la forme n^2, où n est un entier naturel.

Exercice 6. Déterminer tous les triplets de réels (a, b, c) satisfaisant les trois équations

$$a^2 + b = c^2 \ , \ b^2 + c = a^2 \ , \ c^2 + a = b^2.$$

Exercice 7. On colorie chaque point du plan avec l'une des trois couleurs bleu, vert ou rouge. Pour chaque couleur, on suppose qu'il existe au moins un point du plan colorié avec cette couleur. Montrer qu'il existe un triangle rectangle dont les trois sommets sont de couleurs différentes deux à deux.

Exercices lycéens

Exercice 8. Le prix (en euros) d'un diamant correspond à sa masse (en grammes) élevée au carré puis multipliée par 100. Le prix (en euros) d'un cristal correspond à trois fois sa masse (en grammes).

Martin et Théodore déterrent un trésor composé de pierres précieuses qui sont soit des diamants soit des cristaux et dont la valeur totale est de $5\,000\,000$ €. Ils découpent chaque pierre précieuse en deux, et prennent chacun une moitié de chaque pierre. La valeur totale des pierres de Martin vaut $2\,000\,000$ €. En euros, quelle était la valeur totale initiale des diamants contenus dans le trésor ?

Seule une réponse numérique est attendue ici.

Exercice 9. Soit AMC un triangle isocèle en M et tel que l'angle $\widehat{AMC}$ est aigu. Soit B le symétrique du point A par rapport au point M et soit H le pied de la hauteur issue du sommet C dans le triangle ABC. On suppose que $AH = HM$. Calculer les valeurs des trois angles du triangle ABC.

Exercice 10. On considère vingt immeubles arrangés autour d'un cercle. Chaque immeuble possède un nombre entier d'étages compris entre 1 et 20. On suppose que deux immeubles quelconques ont toujours un nombre d'étages différent. Un immeuble est dit *intéressant* s'il possède plus d'étages que l'un de ses voisins et moins d'étage que l'autre de ses voisins. Les immeubles sont arrangés de telle sorte qu'il y a six immeubles intéressants en tout.

1) Montrer que la somme des nombres d'étages des immeubles intéressants est toujours supérieure ou égale à 27.

2) Donner une configuration de vingt immeubles pour laquelle il y a exactement six immeubles intéressants et dont la somme des nombres d'étages vaut exactement 27.

Exercice 11. Dans une salle il y a dix élèves. Aline écrit dix entiers relatifs consécutifs au tableau. Chaque élève choisit un des dix entiers écrits au tableau, de sorte que deux élèves choisissent toujours deux entiers différents. Chaque élève calcule ensuite la somme des neuf entiers choisis par les neuf autres élèves. Chaque élève dont le résultat est un carré parfait reçoit alors un cadeau.

Quel est le nombre maximum d'élèves qui vont recevoir un cadeau ?

Un carré parfait est un entier de la forme n^2, où n est un entier naturel.

Exercice 12. Soit ABC un triangle isocèle en B. Soit D le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ avec le segment $[BC]$. Soit E le point du segment $[AC]$ distinct de C tel que $DE = DC$. Soit F le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{AED}$ avec le côté $[AB]$. Montrer que $\widehat{AFE} = \widehat{EFD}$.

Exercice 13. On colorie chaque point du plan avec l'une des trois couleurs bleu, vert ou rouge. Pour chaque couleur, on suppose qu'il existe au moins un point du plan colorié avec cette couleur. Montrer qu'il existe un triangle rectangle dont les trois sommets sont de couleurs différentes deux à deux.

Exercice 14. Soient $a_1 < \ldots < a_n$ des entiers strictement positifs. On suppose que pour toute paire d'entiers (i,j) vérifiant $1 \leqslant i < j \leqslant n$, le nombre $\dfrac{a_i}{a_j - a_i}$ est un entier.

1) Montrer que pour tout entier m vérifiant $1 \leqslant m \leqslant n-1$, $ma_{m+1} \leqslant (m+1)a_m$.

2) Montrer que si i et j sont des entiers vérifiant $1 \leqslant i < j \leqslant n$, alors $ia_j \leqslant ja_i$.

Exercice 15. Soit n un entier strictement positif, $x_1, \ldots, x_{n+1}$ des réels strictement positifs et $p < q$ deux entiers strictement positifs. On suppose que $x_{n+1}^p > x_1^p + \ldots + x_n^p$.

1) Montrer que $x_{n+1}^q > x_1^q + \ldots + x_n^q$.

2) Montrer que $\left(x_{n+1}^p - (x_1^p + \ldots + x_n^p)\right)^q < \left(x_{n+1}^q - (x_1^q + \ldots + x_n^q)\right)^p$.