Coupe Animath de Printemps

8 juin 2022

Durée : 3 heures (collège), 4 heures (lycée).

Instructions

- ▷ Les exercices « collégiens » concernent les élèves scolarisés au collège.
  Les exercices « lycéens » concernent les élèves scolarisés au lycée.
  Chaque exercice est noté sur 7 points.

- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**

- ▷ **Pour les exercices 1 et 8,** seule une réponse numérique est attendue ; un résultat correct sans justification vaudra donc 7 points, tandis qu'un résultat incorrect sans justification vaudra 0 point. Cependant, si un raisonnement accompagne un résultat faux (ou pas de résultat), ce raisonnement sera lu et noté et pourra rapporter une partie des points de l'exercice.

- ▷ **À part dans les exercices 1 et 8,** on demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
- ▷ Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.

- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.

- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  LES CALCULATRICES SONT INTERDITES, AINSI QUE TOUS LES INSTRUMENTS ÉLECTRONIQUES.
  Cela concerne en particulier l'usage de l'ordinateur, et donc de *Geogebra* et de logiciels de traitement de texte.

Après l'épreuve, merci de renvoyer les copies par voie électronique via le formulaire de dépôt disponible à l'adresse suivante :

`http://igm.univ-mlv.fr/~juge/animath/`

Association Animath,
Préparation Olympique Française de Mathématiques (POFM)

`contact-pofm@animath.fr`

Exercices collégiens

Exercice 1. Calculer

$$\sqrt{32\sqrt{16\sqrt{8\sqrt{4}}}}.$$

Seule une réponse numérique est attendue ici.

Solution de l'exercice 1 On a :

$$\sqrt{32\sqrt{16\sqrt{8\sqrt{4}}}} = \sqrt{32\sqrt{16\sqrt{8\cdot 2}}} = \sqrt{32\sqrt{16\sqrt{16}}} = \sqrt{32\sqrt{16\cdot 4}} = \sqrt{32\sqrt{64}} = \sqrt{32\cdot 8} = \sqrt{256} = 16.$$

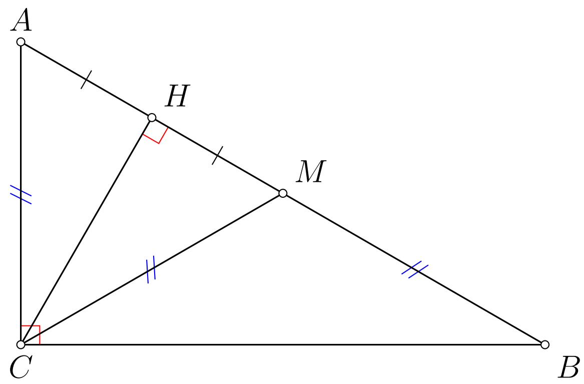
Solution alternative n°1 En utilisant la multiplicativité de la racine carré, on trouve :

$$\begin{aligned}
\sqrt{32\sqrt{16\sqrt{8\sqrt{4}}}} &= \sqrt{32}\cdot\sqrt[4]{16\sqrt{8\sqrt{4}}} \\
&= 4\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{16}\cdot\sqrt[8]{8\sqrt{4}} \\
&= 4\sqrt{2}\cdot 2\cdot\sqrt[8]{8}\cdot\sqrt[16]{4} \\
&= 8\cdot 2^{1/2}\cdot 2^{3/8}\cdot 2^{2/16} \\
&= 8\cdot 2^{1/2+3/8+1/8} \\
&= 8\times 2 = 16
\end{aligned}$$

Commentaire des correcteurs : L'exercice est très bien réussi. Les quelques erreurs sont dues à des mauvaises manipulations de la racine carrée.

Exercice 2. Soit AMC un triangle isocèle en M et tel que l'angle $\widehat{AMC}$ est aigu. Soit B le symétrique du point A par rapport au point M et soit H le pied de la hauteur issue du sommet C dans le triangle ABC. On suppose que $AH = HM$. Calculer les valeurs des trois angles du triangle ABC.

Solution de l'exercice 2



Dans le triangle AMC, la droite (CH) est la hauteur et la médiane issue du sommet C. Le triangle ACM est donc isocèle en C. Donc $AC = CM$. Puisque $CM = MA$, le triangle ACM est équilatéral et $\widehat{BAC} = 60°$.

Puisque les points A, M et B sont alignés, on a $\widehat{CMB} = 180° - \widehat{AMC} = 120°$.
Puisque A et B sont symétriques par rapport à M, on a $MA = MB = MC$, de sorte que le triangle MBC est isocèle en M. Ainsi,

$$180° = \widehat{BMC} + \widehat{MBC} + \widehat{BCM} = \widehat{BMC} + 2\widehat{MBC}$$

On a donc $2\widehat{MBC} = 180° - \widehat{BMC} = 60°$ et $\widehat{ABC} = 30°$.

On déduit finalement que $\widehat{ACB} = \widehat{ACM} + \widehat{MCB} = 60° + 30° = 90°$.

Les angles du triangle sont donc $(\widehat{ABC}, \widehat{BCA}, \widehat{CAB}) = (30°, 90°, 60°)$.

Commentaire des correcteurs : L'exercice est globalement bien réussi, les intuitions sont bonnes et les collégiens parviennent par plusieurs méthodes à montrer que AMC est équilatéral puis à bien utiliser ce résultat. La plupart du temps, les élèves qui n'ont pas résolu l'exercice n'ont pas assez exploité l'égalité $HM = HA$ de l'énoncé, qui est le point-clef pour montrer que AMC est isocèle en C.

Exercice 3. On considère vingt immeubles arrangés autour d'un cercle. Chaque immeuble possède un nombre entier d'étages compris entre 1 et 20. On suppose que deux immeubles quelconques ont toujours un nombre d'étages différent. Un immeuble est dit *intéressant* s'il possède plus d'étages que l'un de ses voisins et moins d'étage que l'autre de ses voisins. Les immeubles sont arrangés de telle sorte qu'il y a six immeubles intéressants en tout.

1) Montrer que la somme des nombres d'étages des immeubles intéressants est toujours supérieure ou égale à 27.

2) Donner une configuration de vingt immeubles pour laquelle il y a exactement six immeubles intéressants et dont la somme des nombres d'étages vaut exactement 27.

Solution de l'exercice 3 1) Puisqu'il y a vingt immeubles et que les nombres d'étages sont toujours différents pour deux immeubles différents, pour chaque entier n entre 1 et 20, il y a exactement un immeuble qui possède exactement n étages.

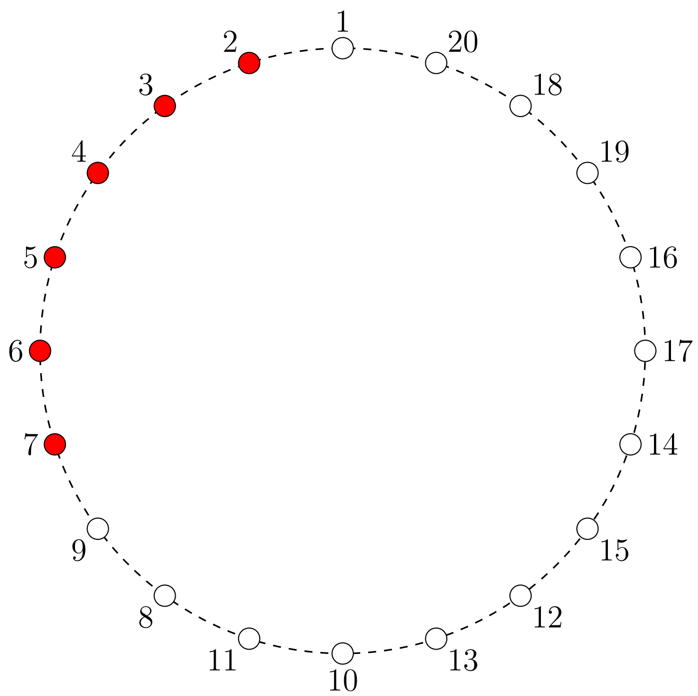
L'immeuble possédant 1 étage a forcément moins d'étages que ses voisins, il n'est donc pas intéressant.

Ainsi, l'immeuble intéressant avec le moins d'étages possède au moins deux étages. De même, l'immeuble intéressant avec le deuxième plus petit nombre d'étages possède au moins trois étages. De proche en proche, l'immeuble intéressant avec le $k-$ème plus petit nombre d'étages possède au moins $k+1$ étages. La somme des nombres d'étages des immeubles intéressants est donc toujours supérieure ou égale à

$$2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 27$$

ce qui est bien la valeur minimale voulue.

2) Dans la configuration suivante, les immeubles sont représentés par des points et les numéros correspondent au nombre d'étages des immeubles. On vérifie qu'il y a exactement 6 immeubles intéressants (en rouge) et que la somme de leurs nombres d'étages vaut 27 :

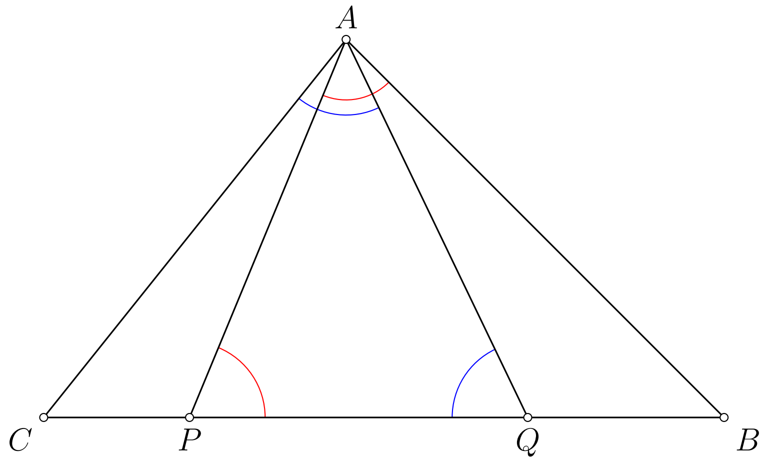


Commentaire des correcteurs : L'exercice est bien réussi. Les erreurs proviennent souvent de fautes d'inattention. Les preuves manquaient parfois de rigueur, mais la plupart avaient les bonnes idées.

On rappelle que tenter de construire un exemple avec la somme la plus basse possible et arriver à une somme de 27 ne suffit pas à montrer que la somme minimale est 27.

Exercice 4. Soit ABC un triangle dans lequel $BC > AB$ et $BC > AC$. Soit P le point du segment $[BC]$ tel que $AB = BP$ et soit Q le point du segment $[BC]$ tel que $AC = CQ$. Montrer que $\widehat{BAC} + 2\widehat{PAQ} = 180°$.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u>



Puisque le triangle APB est isocèle, on a

$$180° = \widehat{ABP} + \widehat{BAP} + \widehat{APB} = \widehat{ABC} + 2\widehat{PAB} \tag{1}$$

Puisque le triangle CAQ est isocèle, on a

$$180° = \widehat{ACQ} + \widehat{CAQ} + \widehat{AQC} = \widehat{ACB} + 2\widehat{CAQ} \tag{2}$$

On peut alors calculer :

$$\begin{aligned}
\widehat{PAQ} &= \widehat{BAC} - \widehat{CAP} - \widehat{BAQ} \\
&= (\widehat{BAC} - \widehat{CAP}) + (\widehat{BAC} - \widehat{BAQ}) - \widehat{BAC} \\
&= \widehat{PAB} + \widehat{QAC} - \widehat{BAC}
\end{aligned}$$

En multipliant par 2 des deux côtés de l'égalité ainsi obtenue, et en utilisant (1) et (2), on trouve bien

$$\begin{aligned}
2\widehat{PAQ} + \widehat{BAC} &= 2(\widehat{PAB} + \widehat{QAC} - \widehat{BAC}) + \widehat{BAC} \\
&= 2\widehat{PAB} + 2\widehat{QAC} - \widehat{BAC} \\
&= 180° - \widehat{ABC} + 180° - \widehat{ACB} - \widehat{BAC} \\
&= 360° - (\widehat{ABC} + \widehat{ACB} + \widehat{BAC}) \\
&= 180°
\end{aligned}$$

où l'on utilisé que la somme des angles du triangle ABC vaut $180°$. On a donc bien l'égalité annoncée.

<u>**Commentaire des correcteurs :**</u> L'exercice est bien réussi. Les élèves ont produit des solutions variées, parfois différentes de la solution officielle.

Exercice 5. Dans une salle il y a dix élèves. Aline écrit dix entiers relatifs consécutifs au tableau. Chaque élève choisit un des dix entiers écrits au tableau, de sorte que deux élèves choisissent toujours deux entiers différents. Chaque élève calcule ensuite la somme des neuf entiers choisis par les neuf autres élèves. Chaque élève dont le résultat est un carré parfait reçoit alors un cadeau.

Quel est le nombre maximum d'élèves qui vont recevoir un cadeau ?

Un carré parfait est un entier de la forme n^2, où n est un entier naturel.

Solution de l'exercice 5 L'exercice demande de déterminer la valeur maximale d'une certaine quantité. Le raisonnement contient donc deux étapes, appelées analyse et synthèse.

Étape 1, l'analyse : On montre que le nombre d'élèves recevant un cadeau est forcément inférieur ou égal à quatre, et ce quelques soient les nombres choisis par Aline.

Soient $n, n+1, \ldots, n+9$ les dix nombres écrits au tableau et soit S leur somme. Si l'on efface un des entiers du tableau, la somme des neuf nombres restants est l'un des entiers :

$$S-n\,,\ S-n-1\,,\ \ldots\,,S-n-9$$

qui sont dix entiers consécutifs.

On cherche alors le maximum d'entiers qui peuvent être des carrés parfaits parmi dix entiers consécutifs.

Tout d'abord, puisque les carrés parfaits sont des entiers positifs, un ensemble de dix entiers consécutifs dont l'un est négaitf contient moins de carrés parfaits que l'ensemble $\{0, \ldots, 9\}$. Ensuite, notons que parmi les entiers de 0 à 9, on compte quatre carrés parfaits, qui sont les entiers $0, 1, 4$ et 9. Supposons qu'il existe dix entiers consécutifs positifs tels qu'au moins cinq d'entre eux soient des carrés parfaits. On dispose alors d'un entier a positif tel que les nombres $a^2, (a+1)^2, (a+2)^2, (a+3)^2$ et $(a+4)^2$ figurent parmi les dix entiers consécutifs. On a alors $9 \geqslant (a+4)^2 - a^2 = 8a + 16 > 9$, ce qui est absurde.

Ainsi, le maximum d'entiers qui peuvent être des carrés parfaits parmi les dix entiers $S-n, \ldots, S-n-9$ est 4, ce qui signifie qu'il y a au maximum quatre élèves qui recevront un cadeau.

Étape 2, la synthèse : On montre que la borne obtenue dans l'analyse est atteignable, c'est-à-dire qu'il existe dix entiers consécutifs pour lesquels les élèves peuvent s'arranger pour recevoir quatre cadeaux.

Pour cela, on observe que la somme de neuf des dix entiers $n, n+1, \ldots, n+9$ est toujours comprise entre

$$n + (n+1) + \ldots + (n+8) = 9n + 36 \quad \text{et} \quad (n+1) + (n+2) + \ldots + (n+9) = 9n + 45$$

Ainsi, les carrés parfaits que choisissent les élèves sont des entiers compris entre $9n + 36$ et $9n + 45$. On a vu lors de l'analyse que l'ensemble $\{0, \ldots, 9\}$ contenait 4 carrés parfaits. On cherche donc n satisfaisant $9n + 36 = 0$ et $9n + 45 = 9$, ce qui conduit à $n = -4$.

Ainsi, si Aline écrit les entiers

$$-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

les élèves peuvent choisir les entiers $5, 4, 1$ ou -4, de sorte que la somme des neuf entiers restant vaudra respectivement $0, 1, 4$ et 9.

Le plus grand nombre d'élèves possible qui recevra un cadeau est quatre.

Commentaire des correcteurs : L'exercice était difficile pour beaucoup d'élèves, et n'a le plus souvent été que partiellement résolu. Il était composé de deux parties : une analyse qui consiste à montrer qu'on ne peut pas faire mieux que 4 cadeaux, et une synthèse dans laquelle il faut expliciter avec quels entiers initialement au tableau on peut effectivement obtenir 4 cadeaux. De nombreux élèves n'ont pas pris en compte le fait que les entiers écrits au tableau étaient relatifs, donc positifs ou négatifs, et se sont malheureusement limités au cas positif. Beaucoup oublient certains arguments principaux, comme le fait que les sommes obtenues sont consécutives, ce qui justifie le fait de chercher des carrés dans un intervalle de taille 10. Certains tentent d'invoquer des arguments de "densité" des carrés pour essayer de justifier qu'il faut s'intéresser aux petits entiers pour trouver beaucoup de carrés, mais cet argument est insuffisant. Enfin, une étonnante proportion des élèves oublie que 0 est un carré parfait, ce qui n'a finalement pas été pénalisé.

Exercice 6. Déterminer tous les triplets de réels (a, b, c) satisfaisant les trois équations

$$a^2 + b = c^2 \ , \ b^2 + c = a^2 \ , \ c^2 + a = b^2.$$

<u>*Solution de l'exercice 6*</u> On commence par sommer les trois équations. On obtient

$$a^2 + b + b^2 + c + c^2 + a = c^2 + a^2 + b^2$$

ce qui, après simplification, donne que $a + b + c = 0$.
D'autre part, la troisième équation se réécrit :

$$a = b^2 - c^2 = (b - c)(b + c)$$

En utilisant que $b + c = -a$, on trouve que $a = -a(b - c)$, soit $a(b - c + 1) = 0$. On a donc $a = 0$ ou $b = c - 1$. De la même manière, on a $b = 0$ ou $c = a - 1$ et $c = 0$ ou $a = b - 1$.

Supposons que $a = 0$. La troisième équation devient $c^2 = b^2$, soit $b = \pm c$. Si $b = c$, alors $0 = b + c = 2b = 2c$ donc $a = b = c = 0$. Réciproquement, le triplet $(0, 0, 0)$ vérifie bien les trois équations. Si $b = -c$, la première équation fournit $c^2 = -c$, soit $0 = c^2 + c = c(c + 1)$. Si $c = 0$, alors $b = -a - c = 0$ et on a trouve à nouveau le triplet $(0, 0, 0)$. Si $c + 1 = 0$, alors $c = -1 = -b$. Réciproquement, le triplet $(0, 1, -1)$ vérifie les équations.

On traite de la même manière le cas où $b = 0$, qui donne les deux triplets $(0, 0, 0)$ et $(-1, 0, 1)$, dont on vérifie qu'ils sont bien solutions du problème, ainsi que le cas où $c = 0$, qui donne les deux triplets $(0, 0, 0)$ et $(1, -1, 0)$, dont on vérifie qu'ils sont bien solutions du problème.

On suppose désormais qu'aucun des réels a, b ou c n'est nul. On a alors $c = b+1$, $b = a+1$ et $a = c+1$. Mais alors $a = c + 1 = b + 2 = a + 3$, ce qui est absurde.

Les seuls triplets solutions sont donc $\{(0, 0, 0), (0, 1, -1), (-1, 0, 1), (1, -1, 0)\}$.

<u>**Commentaire des correcteurs :**</u> Ce problème était difficile et très peu l'ont entièrement réussi. Mais beaucoup ont réussi à avancer, et à donner des pistes très pertinentes pour avancer, ce qui a évidemment rapporté des points à leurs auteurs.

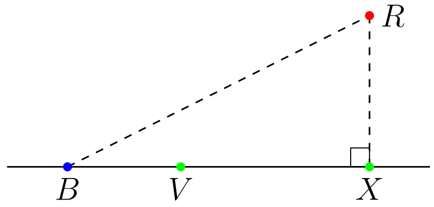
- ▷ La notion de racine carrée est utilisée souvent à mauvais escient. Des élèves utilisent que $\sqrt{x + y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$, qui est faux, d'autant plus quand certaines quantités pouvaient être négatives. Par exemple, $a = b^2 - c^2$ n'implique pas que $\sqrt{a} = b - c$.
- ▷ Les élèves ont souvent trouvé $(0, 0, 0)$ comme solution. Mais rarement ceux-ci ont vu que $(1, 0, -1)$ par exemple était solution. Trouver $(0, 0, 0)$ comme solution devait encourager à regarder $b = 0$ pour voir d'autres solutions : pour avoir des points en trouvant les solutions, il faut souvent les trouver toutes.
- ▷ Souvent des élèves ont factorisé certaines expressions et abouti, par exemple, à $(c - b)(c + b) = c + b$. Certains simplifient sans vergogne pour aboutir à $c - b = 1$, mais il ne faut pas oublier le cas où $b + c = 0$.
- ▷ Une bonne partie des élèves a réussi à prouver que $a + b + c = 0$. Mais souvent, le raisonnement s'arrête abruptement en disant que forcément $(a, b, c) = (0, 0, 0)$. Il faut être rigoureux et honnête : conclure hâtivement que $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ empêche d'avoir une preuve complète, et de développer des idées pertinentes pour avancer.
- ▷ Les solutions trouvées doivent toujours être vérifiées. En compétition internationale, cela peut faire perdre un point.

Exercice 7. On colorie chaque point du plan avec l'une des trois couleurs bleu, vert ou rouge. Pour chaque couleur, on suppose qu'il existe au moins un point du plan colorié avec cette couleur. Montrer qu'il existe un triangle rectangle dont les trois sommets sont de couleurs différentes deux à deux.

Solution de l'exercice 7 La solution se base sur l'idée suivante : considérer une droite d particulière, regarder les perpendiculaires à d passant par des points bien choisis et tirer parti de l'infinité de points sur d et sur les perpendiculaires à d.

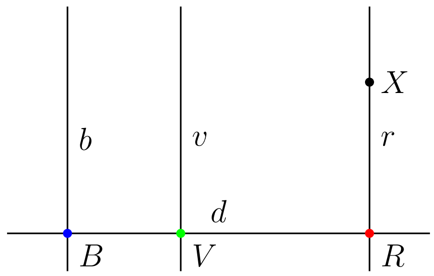
On suppose par l'absurde qu'il n'existe pas de triangles rectangle dont les trois sommets sont de trois couleurs distinctes.

Soient B, V et R trois points respectivement de couleur bleue, verte et rouge. Soit X le projeté orthogonale du point R sur la droite (BV). Si X est bleu, alors le triangle RXV est rectangle en X et a ses trois sommets de même couleur. Si X est vert, le triangle BXR est rectangle en X et a ses trois sommets de même couleur.

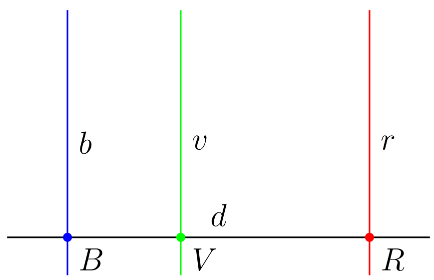


Dans la suite, on suppose donc que le point X est rouge, et on le renomme R. On dispose donc de trois points B, V et R alignés sur une même droite et de trois couleurs différentes.

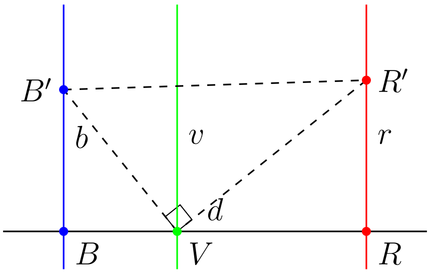
On note à présent b, v et r les perpendiculaires à la droite (BV) passant respectivement par les points B, V et R.



En réitérant l'argument précédent, on obtient que tout point de b est bleu, tout point de v est vert et tout point de r est rouge. En effet, prenons un point Y sur la droite r. Si Y n'est pas rouge, alors l'un des triangles VRX ou BRX est rectangle en R et a ses trois sommets de trois couleurs différentes. On obtient donc une contradiction.



On prend alors un point R' différent de R sur la droite r. On trace ensuite la perpendiculaire p à (VR') passant par V. Puisque (VR') n'est pas perpendiculaire à v, p n'est pas parallèle à v et donc à b, donc p coupe b en un point B'. Le triangle $B'VR$ est alors rectangle en V et possède un sommet de chaque couleur, ce qui est encore en contradiction avec notre hypothèse de départ.



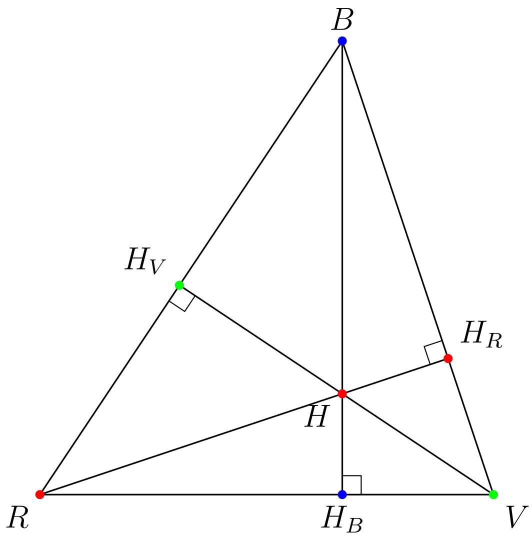
Ceci conclut le cas où il existe trois points V, B, R de chaque couleur alignés sur une même droite.

Solution alternative n°1 Commençons par montrer qu'il existe un triangle non plat dont les trois sommets sont de couleurs différentes.

Supposons que ce ne soit pas le cas et prenons B un point bleu et V un point vert. Par notre hypothèse, tous les points rouges du plan appartiennent à la droite (BV). En effet, dans le cas contraire, il existerait un point R rouge qui n'appartient pas à (BV) et alors le triangle BVR est non plat et a ses sommets de trois couleurs différentes.

Soit R un point rouge quelconque. Le point rouge est donc aligné avec B et V. En appliquant notre raisonnement précédent à la droite (RV), on obtient que tous les points bleus du plan appartiennent à la droite (RV). Mais alors, les points du plan qui ne sont pas sur la droite passant par B, R et V sont tous verts. On peut alors construire un triangle dont les trois sommets sont de trois couleurs différentes en reliant les points B et R ainsi qu'un point vert qui n'est pas sur (BV). Ceci contredit à nouveau notre hypothèse.

On dispose donc d'un triangle non plat BVR tel que B est bleu, V est vert et R est rouge. On note H_B le pied de la hauteur issue de B, H_V le pied de la hauteur issue de V et H_R le pied de la hauteur issue de R. Les droites (H_BB), (H_VV) et (H_RR) sont concourantes en l'orthocentre du triangle BVR, que l'on note H.



Si le point H_B n'est pas bleu, alors l'un des triangles BH_BR ou BH_BV est un triangle rectangle avec trois sommets de couleurs différentes.

On suppose donc dans la suite que le point H_B est bleu. En appliquant le même raisonnement que précédemment aux points H_V et H_R, on se restreint au cas où H_V est vert et H_R est rouge.

Si H est bleu, alors le triangle HH_RV est rectangle et a ses trois sommets de couleurs différentes. Si H est vert, le triangle HH_BR est rectangle et a ses trois sommets de couleurs différentes. Et enfin si H est rouge, le triangle HH_VB est rectangle et a ses trois sommets de couleurs différentes.

Dans tous les cas, on a obtenu un triangle satisfaisant la propriété de l'énoncé.

Commentaire des correcteurs : Ce problème était difficile et peu l'ont entièrement réussi. La principale difficulté de ce problème était de trouver la bonne façon de penser, c'est-à-dire partir de nos trois points de couleurs différentes et en construire de nouveaux ne pouvant être d'une certaine couleur, voire même déterminer leur couleur. De nombreuses solutions différentes ont été présentées.

- ▷ La notion d'infini est globalement mal comprise : souvent les élèves invoquent l'infini pour obtenir l'existence d'un objet, alors que cette existence est loin d'être triviale. Ici le fait qu'il existe une infinité de points d'une couleur n'était d'aucune utilité. Traiter des cas particuliers allant dans ce sens n'était pas utile. Un argument d'autorité comme invoquer l'infini ne peut constituer une preuve.
- ▷ Certains élèves ont tenté d'appliquer Pythagore, ou de calculer des coordonnées : cela n'était malheureusement pas utile ici.
- ▷ Beaucoup d'élèves donnaient un processus pour construire une famille de points ne pouvant être d'une couleur fixée et se contentaient ensuite de dire que cela recouvrait le plan. Tout l'enjeu du problème était de vérifier que les différentes droites ou cercles créés recouvraient le plan. Et les élèves ayant introduit ce processus n'ont jamais réussi à conclure, ni même à bien avancer dans l'exercice.
- ▷ Certains élèves considèrent trois points de couleurs différentes, puis construisent des triangles à partir de ceux-là (en considérant les projetés orthogonaux) en oubliant que le triangle initial peut être plat, ou admettent directement l'existence d'un triangle non plat tricolore, ce qui demande pourtant une preuve.

Exercices lycéens

Exercice 8. Le prix (en euros) d'un diamant correspond à sa masse (en grammes) élevée au carré puis multipliée par 100. Le prix (en euros) d'un cristal correspond à trois fois sa masse (en grammes).

Martin et Théodore déterrent un trésor composé de pierres précieuses qui sont soit des diamants soit des cristaux et dont la valeur totale est de $5\,000\,000$ €. Ils découpent chaque pierre précieuse en deux, et prennent chacun une moitié de chaque pierre. La valeur totale des pierres de Martin vaut $2\,000\,000$ €. En euros, quelle était la valeur totale initiale des diamants contenus dans le trésor ?

Seule une réponse numérique est attendue ici.

Solution de l'exercice 8 On note r le nombre de pierres qui sont des diamants et on note $d_1, \ldots, d_r$ les masses respectives des diamants déterrés. On note également c la masse de cristal déterrée. On cherche à déterminer la valeur de $100(d_1^2 + \ldots + d_r^2)$.

Puisque la valeur totale des pierres précieuses déterrées vaut $5\,000\,000$, on a

$$100(d_1^2 + \ldots + d_r^2) + 3c = 5\,000\,000 \tag{3}$$

Puisque Martin reçoit la moitié de la masse totale de diamant et la moitié de la masse totale de cristal, et que la valeur de la part de Martin vaut $2\,000\,000$, on a aussi

$$100\left[\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{d_r}{2}\right)^2\right] + 3 \cdot \frac{c}{2} = 2\,000\,000 \tag{4}$$

En soustrayant deux fois (2) à (1), on trouve

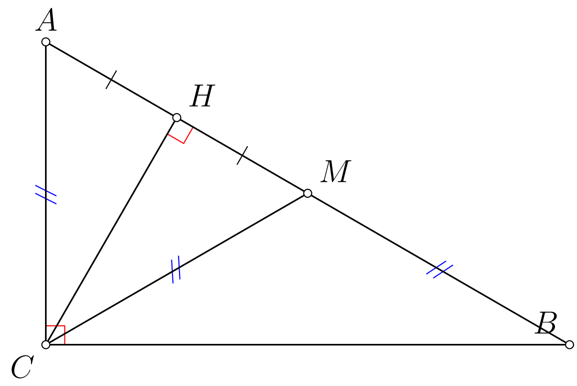
$$100(d_1^2 + \ldots + d_r^2) - 2 \times 25(d_1^2 + \ldots + d_r^2) + 3c - 2 \times 3 \cdot \frac{c}{2} = 5\,000\,000 - 2 \times 2\,000\,000$$

soit $50(d_1^2 + \ldots + d_r^2) = 1\,000\,000$. Ainsi, $100(d_1^2 + \ldots + d_r^2) = 2\,000\,000$ et la valeur totale initiale des diamants contenus dans le trésor vaut $2\,000\,000$.

Commentaire des correcteurs : Un exercice bien réussi pour la grande majorité. Les fautes commises sont majoritairement dues à une mauvaise modélisation de l'énoncé. Plusieurs élèves se sont contentés d'écrire un résultat numérique faux et n'ont donc reçu aucun point pour ce premier exercice qui était le plus simple du sujet lycée. Même si seule une réponse numérique est attendue, on conseille donc d'écrire son raisonnement pour prendre quelques points.

Exercice 9. Soit AMC un triangle isocèle en M et tel que l'angle $\widehat{AMC}$ est aigu. Soit B le symétrique du point A par rapport au point M et soit H le pied de la hauteur issue du sommet C dans le triangle ABC. On suppose que $AH = HM$. Calculer les valeurs des trois angles du triangle ABC.

Solution de l'exercice 9



Dans le triangle AMC, la droite (CH) est la hauteur et la médiane issue du sommet C. Le triangle ACM est donc isocèle en C. Donc $AC = CM$. Puisque $CM = MA$, le triangle ACM est équilatéral et $\widehat{BAC} = 60°$.

Puisque les points A, M et B sont alignés, on a $\widehat{CMB} = 180° - \widehat{AMC} = 120°$.
Puisque A et B sont symétriques par rapport à M, on a $MA = MB = MC$, de sorte que le triangle MBC est isocèle en M. Ainsi,

$$180° = \widehat{BMC} + \widehat{MBC} + \widehat{BCM} = \widehat{BMC} + 2\widehat{MBC}$$

On a donc $2\widehat{MBC} = 180° - \widehat{BMC} = 60°$ et $\widehat{ABC} = 30°$.

On déduit finalement que $\widehat{ACB} = \widehat{ACM} + \widehat{MCB} = 60° + 30° = 90°$.

Les angles du triangle sont donc $(\widehat{ABC}, \widehat{BCA}, \widehat{CAB}) = (30°, 90°, 60°)$.

Commentaire des correcteurs : Exercice très bien réussi dans l'ensemble. Les élèves ont su tirer profit des hypothèses de l'énoncé pour déterminer les angles du triangle et plusieurs méthodes ont été proposées.

La plupart du temps, les élèves qui n'ont pas résolu l'exercice n'ont pas exploité l'égalité $HM = HA$ de l'énoncé. Il est crucial d'essayer d'exploiter au maximum les hypothèses de l'énoncé : tout raisonnement ne les utilisant pas en totalité était voué à l'échec ici. Vérifier que toutes les hypothèses ont été invoquées est également une bonne façon de relire son raisonnement.

D'autres élèves ont perdu des points dans leurs justifications. Attention à bien justifier clairement ses propos, notamment pour démontrer que le triangle AMC est équilatéral : constater une propriété sur un grand nombre de figures ne suffit pas pour la prouver.

D'autre part, les approches trigonométriques ou analytiques, en général risquées, aboutissaient souvent ici à une perte de points due à des erreurs de calcul.

Enfin, il est dommage que certains élèves perdent inutilement des points à cause d'une mauvaise lecture de l'énoncé, nous rappelons donc également l'importance de réaliser une figure claire pour éviter cela.

Exercice 10. On considère vingt immeubles arrangés autour d'un cercle. Chaque immeuble possède un nombre entier d'étages compris entre 1 et 20. On suppose que deux immeubles quelconques ont toujours un nombre d'étages différent. Un immeuble est dit *intéressant* s'il possède plus d'étages que l'un de ses voisins et moins d'étage que l'autre de ses voisins. Les immeubles sont arrangés de telle sorte qu'il y a six immeubles intéressants en tout.

1) Montrer que la somme des nombres d'étages des immeubles intéressants est toujours supérieure ou égale à 27.

2) Donner une configuration de vingt immeubles pour laquelle il y a exactement six immeubles intéressants et dont la somme des nombres d'étages vaut exactement 27.

Solution de l'exercice 10 1) Puisqu'il y a vingt immeubles et que les nombres d'étages sont toujours différents pour deux immeubles différents, pour chaque entier n entre 1 et 20, il y a exactement un immeuble qui possède exactement n étages.

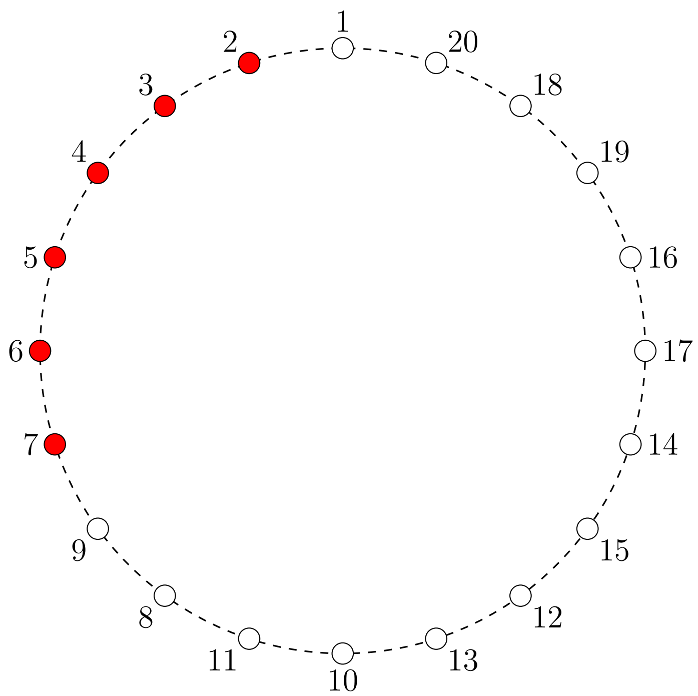
L'immeuble possédant 1 étage a forcément moins d'étages que ses voisins, il n'est donc pas intéressant.

Ainsi, l'immeuble intéressant avec le moins d'étages possède au moins deux étages. De même, l'immeuble intéressant avec le deuxième plus petit nombre d'étages possède au moins trois étages. De proche en proche, l'immeuble intéressant avec le $k-$ème plus petit nombre d'étages possède au moins $k+1$ étages. La somme des nombres d'étages des immeubles intéressants est donc toujours supérieure ou égale à

$$2+3+4+5+6+7=27$$

ce qui est bien la valeur minimale voulue.

2) Dans la configuration suivante, les immeubles sont représentés par des points et les numéros correspondent au nombre d'étages des immeubles. On vérifie qu'il y a exactement 6 immeubles intéressants (en rouge) et que la somme de leurs nombres d'étages vaut 27 :



Commentaire des correcteurs : L'exercice est bien réussi. Les erreurs proviennent souvent de fautes d'inattention. Les preuves manquaient parfois de rigueur, mais la plupart avaient les bonnes idées.

On rappelle que tenter de construire un exemple avec la somme la plus basse possible et arriver à une somme de 27 ne suffit pas à montrer que la somme minimale est 27.

Exercice 11. Dans une salle il y a dix élèves. Aline écrit dix entiers relatifs consécutifs au tableau. Chaque élève choisit un des dix entiers écrits au tableau, de sorte que deux élèves choisissent toujours deux entiers différents. Chaque élève calcule ensuite la somme des neuf entiers choisis par les neuf autres élèves. Chaque élève dont le résultat est un carré parfait reçoit alors un cadeau.

Quel est le nombre maximum d'élèves qui vont recevoir un cadeau ?

Un carré parfait est un entier de la forme n^2, où n est un entier naturel.

Solution de l'exercice 11 L'exercice demande de déterminer la valeur maximale d'une certaine quantité. Le raisonnement contient donc deux étapes, appelées analyse et synthèse.

Étape 1, l'analyse : On montre que le nombre d'élèves recevant un cadeau est forcément inférieur ou égal à quatre, et ce quelques soient les nombres choisis par Aline.

Soient $n, n+1, \ldots, n+9$ les dix nombres écrits au tableau et soit S leur somme. Si l'on efface un des entiers du tableau, la somme des neuf nombres restants est l'un des entiers :

$$S-n\,,\ S-n-1\,,\ \ldots\,, S-n-9$$

qui sont dix entiers consécutifs.

On cherche alors le maximum d'entiers qui peuvent être des carrés parfaits parmi dix entiers consécutifs.

Tout d'abord, puisque les carrés parfaits sont des entiers positifs, un ensemble de dix entiers consécutifs dont l'un est négaitf contient moins de carrés parfaits que l'ensemble $\{0, \ldots, 9\}$. Ensuite, notons que parmi les entiers de 0 à 9, on compte quatre carrés parfaits, qui sont les entiers $0, 1, 4$ et 9. Supposons qu'il existe dix entiers consécutifs positifs tels qu'au moins cinq d'entre eux soient des carrés parfaits. On dispose alors d'un entier a positif tel que les nombres a^2, $(a+1)^2$, $(a+2)^2$, $(a+3)^2$ et $(a+4)^2$ figurent parmi les dix entiers consécutifs. On a alors $9 \geqslant (a+4)^2 - a^2 = 8a + 16 > 9$, ce qui est absurde.

Ainsi, le maximum d'entiers qui peuvent être des carrés parfaits parmi les dix entiers $S-n, \ldots, S-n-9$ est 4, ce qui signifie qu'il y a au maximum quatre élèves qui recevront un cadeau.

Étape 2, la synthèse : On montre que la borne obtenue dans l'analyse est atteignable, c'est-à-dire qu'il existe dix entiers consécutifs pour lesquels les élèves peuvent s'arranger pour recevoir quatre cadeaux.

Pour cela, on observe que la somme de neuf des dix entiers $n, n+1, \ldots, n+9$ est toujours comprise entre

$$n + (n+1) + \ldots + (n+8) = 9n + 36 \quad \text{et} \quad (n+1) + (n+2) + \ldots + (n+9) = 9n + 45$$

Ainsi, les carrés parfaits que choisissent les élèves sont des entiers compris entre $9n+36$ et $9n+45$. On a vu lors de l'analyse que l'ensemble $\{0, \ldots, 9\}$ contenait 4 carrés parfaits. On cherche donc n satisfaisant $9n+36 = 0$ et $9n+45 = 9$, ce qui conduit à $n = -4$.

Ainsi, si Aline écrit les entiers

$$-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

les élèves peuvent choisir les entiers $5, 4, 1$ ou -4, de sorte que la somme des neuf entiers restant vaudra respectivement $0, 1, 4$ et 9.

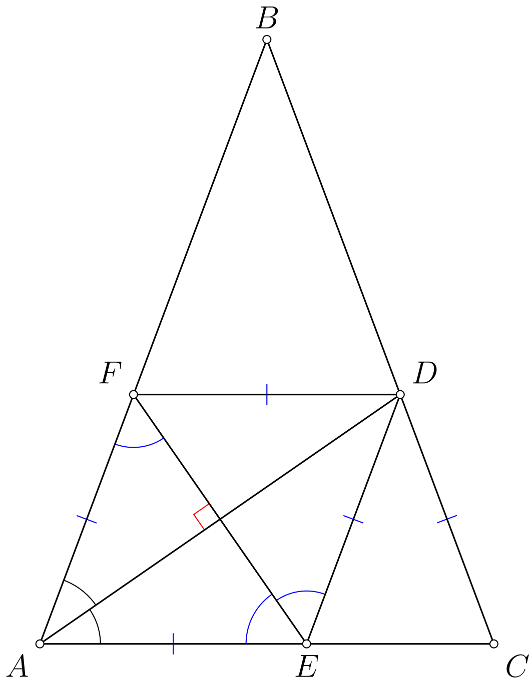
Le plus grand nombre d'élèves possible qui recevra un cadeau est quatre.

Commentaire des correcteurs : Cet exercice a été abordé par la plupart des élèves, bien compris en substance par ceux-ci, mais il n'a étonnamment pas été bien réussi. La plupart des élèves (plus des deux tiers) a réussi à trouver la configuration permettant d'obtenir 4 élèves gagnants - d'ailleurs de nombreux élèves ont oublié de comptabiliser 0 comme un carré parfait.

Cependant, très peu d'élèves ont réussi à justifier rigoureusement que l'intervalle de 0 à 9 était l'intervalle de 10 entiers consécutifs contenant le plus de carrés parfaits. Si la notation tenait plus compte des idées que de la façon avec laquelle elles étaient rédigées, nous nous attendions toutefois à plus de soin dans les justifications des arguments. Ainsi la majorité des solutions était incomplète, même si elles ont été gratifiées de 7 points, et rares sont les élèves qui ont produit une preuve véritablement rigoureuse de leur assertion. Il est dommage de voir des phrases telles que "les carrés s'éloignent de plus en plus", "la fonction carrée est de plus en plus croissante", "les carrés sont de plus en plus dispersés" se substituer à des calculs, qui sont la seule source de rigueur ici. On note également des problèmes de vocabulaire, notamment lorsque les élèves affirment que la fonction carrée était exponentielle, pour ne citer qu'un exemple.

Exercice 12. Soit ABC un triangle isocèle en B. Soit D le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ avec le segment $[BC]$. Soit E le point du segment $[AC]$ distinct de C tel que $DE = DC$. Soit F le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{AED}$ avec le côté $[AB]$. Montrer que $\widehat{AFE} = \widehat{EFD}$.

Solution de l'exercice 12



Tout d'abord, puisque $DE = DC$, le triangle EDC est isocèle en D et $\widehat{DEC} = \widehat{DCE} = \widehat{BCA} = \widehat{BAC}$, de sorte que les angles correspondants $\widehat{DEC}$ et $\widehat{BAC}$ sont égaux. Les droites (DE) et (AB) sont donc parallèles.

Les angles alternes-internes $\widehat{FED}$ et $\widehat{AFE}$ sont donc égaux, ce qui implique que $\widehat{FEA} = \widehat{FED} = \widehat{AFE}$. Le triangle AFE est donc isocèle au point A. La droite (AD), qui est la bissectrice de l'angle $\widehat{FAE}$, est donc aussi la médiatrice du segment $[FE]$. Puisque D est sur cette droite, on a donc $DF = DE$.

Les droites (AD) et (EF) sont donc perpendiculaires, de sorte que la droite (EF) est la hauteur issue de E dans le triangle AED mais aussi la bissectrice de l'angle $\widehat{AED}$. Le triangle AED est donc isocèle, et l'on déduit que $DC = DE = DF = AE = AF$.
Le quadrilatère $AFDE$ est donc un losange. Ses diagonales sont donc les bissectrices de ses angles, si bien que la droite (EF) est la bissectrice de l'angle $\widehat{AFD}$. On a donc bien comme annoncé $\widehat{AFE} = \widehat{EFD}$.

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été beaucoup abordé et nombreux sont les élèves qui sont parvenus à une preuve complète. L'exercice mélangeait des arguments calculatoires comme des chasses aux angles, et des arguments de nature géométrique comme l'identification de triangles et de quadrilatères particuliers à partir de leurs caractérisation. Si les élèves qui ont traité l'exercice semblent parfaitement maitriser la chasse aux angles, on note beaucoup d'erreurs et d'approximations dans les identifications de quadrilatères particuliers. De telles erreurs ont été très coûteuses pour leurs auteurs, puisque souvent cela les empêchait de voir qu'il leur restait une partie du problème à résoudre.

Ainsi, plusieurs élèves ont affirmé que le quadrilatère $AEFD$ est un losange alors qu'ils n'avaient pas encore tous les éléments pour le faire. Nous rappelons qu'un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires, même s'il a deux côtés parallèles, n'est pas forcément un losange. Bien souvent, l'élève devait encore montrer que AEF ou AED est isocèle pour conclure.

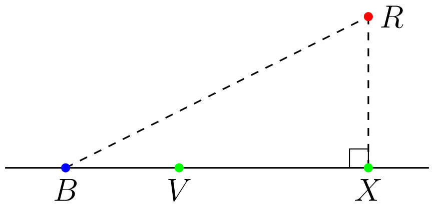
A l'inverse, plusieurs élèves ont d'emblée remarqué sur leur figure que $AEFD$ est un losange, ont signalé leur conjecture sur leur copie (sans chercher aucune arnaque) et ont expliqué pourquoi, si $AEFD$ est un losange, on pouvait conclure le problème. Même si elles ne rapportaient pas beaucoup de points, de telles initiatives sont bien sûr encouragées, car elles reflètent le comportement adéquat face à un problème de géométrie et, plus généralement, un problème d'olympiade.

Exercice 13. On colorie chaque point du plan avec l'une des trois couleurs bleu, vert ou rouge. Pour chaque couleur, on suppose qu'il existe au moins un point du plan colorié avec cette couleur. Montrer qu'il existe un triangle rectangle dont les trois sommets sont de couleurs différentes deux à deux.

Solution de l'exercice 13 La solution se base sur l'idée suivante : considérer une droite d particulière, regarder les perpendiculaires à d passant par des points bien choisis et tirer parti de l'infinité de points sur d et sur les perpendiculaires à d.

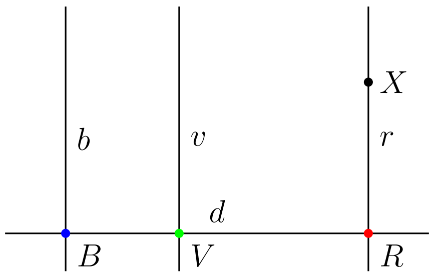
On suppose par l'absurde qu'il n'existe pas de triangles rectangle dont les trois sommets sont de trois couleurs distinctes.

Soient B, V et R trois points respectivement de couleur bleue, verte et rouge. Soit X le projeté orthogonale du point R sur la droite (BV). Si X est bleu, alors le triangle RXV est rectangle en X et a ses trois sommets de même couleur. Si X est vert, le triangle BXR est rectangle en X et a ses trois sommets de même couleur.

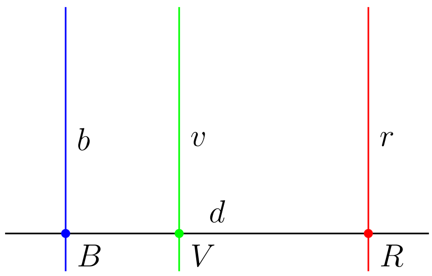


Dans la suite, on suppose donc que le point X est rouge, et on le renomme R. On dispose donc de trois points B, V et R alignés sur une même droite et de trois couleurs différentes.

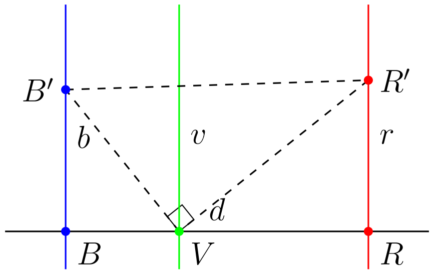
On note à présent b, v et r les perpendiculaires à la droite (BV) passant respectivement par les points B, V et R.



En réitérant l'argument précédent, on obtient que tout point de b est bleu, tout point de v est vert et tout point de r est rouge. En effet, prenons un point Y sur la droite r. Si Y n'est pas rouge, alors l'un des triangles VRX ou BRX est rectangle en R et a ses trois sommets de trois couleurs différentes. On obtient donc une contradiction.



On prend alors un point R' différent de R sur la droite r. On trace ensuite la perpendiculaire p à (VR') passant par V. Puisque (VR') n'est pas perpendiculaire à v, p n'est pas parallèle à v et donc à b, donc p coupe b en un point B'. Le triangle $B'VR$ est alors rectangle en V et possède un sommet de chaque couleur, ce qui est encore en contradiction avec notre hypothèse de départ.



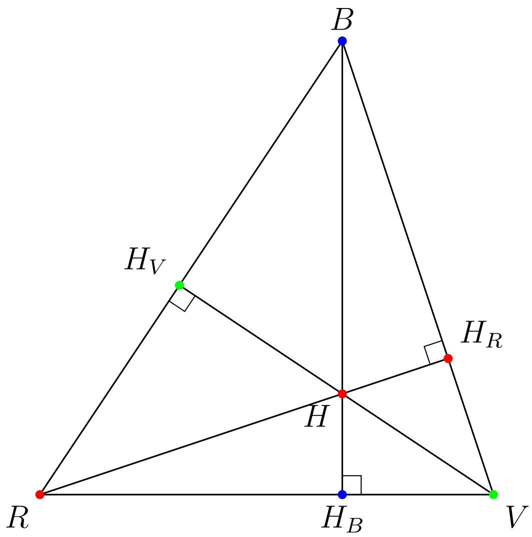
Ceci conclut le cas où il existe trois points V, B, R de chaque couleur alignés sur une même droite.

<u>*Solution alternative n°1*</u> Commençons par montrer qu'il existe un triangle non plat dont les trois sommets sont de couleurs différentes.

Supposons que ce ne soit pas le cas et prenons B un point bleu et V un point vert. Par notre hypothèse, tous les points rouges du plan appartiennent à la droite (BV). En effet, dans le cas contraire, il existerait un point R rouge qui n'appartient pas à (BV) et alors le triangle BVR est non plat et a ses sommets de trois couleurs différentes.

Soit R un point rouge quelconque. Le point rouge est donc aligné avec B et V. En appliquant notre raisonnement précédent à la droite (RV), on obtient que tous les points bleus du plan appartiennent à la droite (RV). Mais alors, les points du plan qui ne sont pas sur la droite passant par B, R et V sont tous verts. On peut alors construire un triangle dont les trois sommets sont de trois couleurs différentes en reliant les points B et R ainsi qu'un point vert qui n'est pas sur (BV). Ceci contredit à nouveau notre hypothèse.

On dispose donc d'un triangle non plat BVR tel que B est bleu, V est vert et R est rouge. On note H_B le pied de la hauteur issue de B, H_V le pied de la hauteur issue de V et H_R le pied de la hauteur issue de R. Les droites (H_BB), (H_VV) et (H_RR) sont concourantes en l'orthocentre du triangle BVR, que l'on note H.



Si le point H_B n'est pas bleu, alors l'un des triangles BH_BR ou BH_BV est un triangle rectangle avec trois sommets de couleurs différentes.

On suppose donc dans la suite que le point H_B est bleu. En appliquant le même raisonnement que précédemment aux points H_V et H_R, on se restreint au cas où H_V est vert et H_R est rouge.

Si H est bleu, alors le triangle HH_RV est rectangle et a ses trois sommets de couleurs différentes. Si H est vert, le triangle HH_BR est rectangle et a ses trois sommets de couleurs différentes. Et enfin si H est rouge, le triangle HH_VB est rectangle et a ses trois sommets de couleurs différentes.

Dans tous les cas, on a obtenu un triangle satisfaisant la propriété de l'énoncé.

Commentaire des correcteurs : Ce problème était difficile et peu l'ont entièrement réussi. La principale difficulté de ce problème était de trouver la bonne façon de penser, c'est-à-dire partir de nos trois points de couleurs différentes et en construire de nouveaux ne pouvant être d'une certaine couleur, voire même déterminer leur couleur. De nombreuses solutions différentes ont été présentées.

- ▷ La notion d'infini est globalement mal comprise : souvent les élèves invoquent l'infini pour obtenir l'existence d'un objet, alors que cette existence est loin d'être triviale. Ici le fait qu'il existe une infinité de points d'une couleur n'était d'aucune utilité. Traiter des cas particuliers allant dans ce sens n'était pas utile. Un argument d'autorité comme invoquer l'infini ne peut constituer une preuve.
- ▷ Certains élèves ont tenté d'appliquer Pythagore, ou de calculer des coordonnées : cela n'était malheureusement pas utile ici.
- ▷ Beaucoup d'élèves donnaient un processus pour construire une famille de points ne pouvant être d'une couleur fixée et se contentaient ensuite de dire que cela recouvrait le plan. Tout l'enjeu du problème était de vérifier que les différentes droites ou cercles créés recouvraient le plan. Et les élèves ayant introduit ce processus n'ont jamais réussi à conclure, ni même à bien avancer dans l'exercice.
- ▷ Certains élèves considèrent trois points de couleurs différentes, puis construisent des triangles à partir de ceux-là (en considérant les projetés orthogonaux) en oubliant que le triangle initial peut être plat, ou admettent directement l'existence d'un triangle non plat tricolore, ce qui demande pourtant une preuve.

Exercice 14. Soient $a_1 < \ldots < a_n$ des entiers strictement positifs. On suppose que pour toute paire d'entiers (i,j) vérifiant $1 \leqslant i < j \leqslant n$, le nombre $\dfrac{a_i}{a_j - a_i}$ est un entier.

1) Montrer que pour tout entier m vérifiant $1 \leqslant m \leqslant n-1$, $ma_{m+1} \leqslant (m+1)a_m$.

2) Montrer que si i et j sont des entiers vérifiant $1 \leqslant i < j \leqslant n$, alors $ia_j \leqslant ja_i$.

Solution de l'exercice 14

1)

Soit m vérifiant $1 \leqslant m \leqslant n-1$.

Notons $k_i = \dfrac{a_i}{a_{m+1} - a_i}$ pour tout $i \leqslant m$. L'énoncé nous dit que les termes de la suite (k_i) sont des entiers strictement positifs. Remarquons également que si $i < j$, on a $a_i < a_j$ et donc

$$k_i = \frac{a_i}{a_{m+1} - a_i} = \frac{1}{\frac{a_{m+1}}{a_i} - 1} < \frac{1}{\frac{a_{m+1}}{a_j} - 1} = \frac{a_j}{a_{m+1} - a_j} = k_j$$

La suite $(k_i)_{i \leqslant m}$ est donc une suite strictement croissante d'entiers strictement positifs. Puisque $k_1 \geqslant 1$, $k_2 > k_1 \geqslant 1$ donc $k_2 \geqslant 2$. Si on suppose que $k_j \geqslant j$ pour un certain $j \geqslant 2$, on a $k_{j+1} > k_j \geqslant j$ donc $k_{j+1} \geqslant j+1$. De proche en proche, $k_i \geqslant i$ pour tout $i \leqslant m$.

En particulier, $\dfrac{a_m}{a_{m+1} - a_m} = k_m \geqslant m$. Cette inégalité se réécrit $(m+1)a_m \geqslant ma_{m+1}$, qui est l'inégalité voulue.

2) Soit $i < j$. Pour tout $i \leqslant k \leqslant j-1$, d'après la question précédente, $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leqslant \frac{k+1}{k}$. En multipliant ces inégalités pour k allant de i à $j-1$, on trouve via un télescopage :

$$\frac{a_j}{a_i} = \frac{a_j}{a_{j-1}} \cdot \frac{a_{j-1}}{a_{j-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{i+2}}{a_{i+1}} \cdot \frac{a_{i+1}}{a_i} \leqslant \frac{j}{j-1} \cdot \frac{j-1}{j-2} \cdot \ldots \cdot \frac{i+2}{i+1} \cdot \frac{i+1}{i} = \frac{j}{i}$$

ce qui se réécrit $ia_j \leqslant ja_i$, comme voulu.

Commentaire des correcteurs : L'exercice était difficile et très clivant, et très peu d'élèves ont obtenu une note entre 2 et 6. On a noté un nombre important de solutions fausses dues à une erreur de calcul dans une suite d'inégalités, souvent par un oubli de renversement du sens d'une inégalité en multipliant par -1. On a également remarqué que beaucoup de ces solutions n'utilisent pas, ou que très partiellement, l'hypothèse (pourtant très forte) de l'énoncé qui affirme que $\frac{a_i}{a_j - a_i}$ est entier pour tous $i < j$, ce qui les rend inévitablement fausses.

Exercice 15. Soit n un entier strictement positif, $x_1, \ldots, x_{n+1}$ des réels strictement positifs et $p < q$ deux entiers strictement positifs. On suppose que $x_{n+1}^p > x_1^p + \ldots + x_n^p$.

1) Montrer que $x_{n+1}^q > x_1^q + \ldots + x_n^q$.

2) Montrer que $\left(x_{n+1}^p - (x_1^p + \ldots + x_n^p)\right)^q < \left(x_{n+1}^q - (x_1^q + \ldots + x_n^q)\right)^p$.

Solution de l'exercice 15 L'idée principale dans ce problème est d'utiliser que pour tout $0 \leqslant i \leqslant n$, $x_i^p < \sum_{i=1}^n x_i^p = x_{n+1}^p$ donc que $x_i < x_{n+1}$.

1) Posons $y_i = \dfrac{x_i}{x_{n+1}}$ pour tout $0 \leqslant i \leqslant n$. L'hypothèse de l'énoncé se réécrit alors $y_1^p + \ldots + y_n^p < 1$ et le résultat à montrer est que $y_1^q + \ldots + y_n^q < 1$.

Puisque $y_i < 1$ pour tout i, $y_i^k < 1$ pour tout entier k strictement positif. En particulier, $y_i^{q-p} < 1$ pour tout i. Ainsi :

$$y_1^q + \ldots + y_n^q = y_1^p y_1^{q-p} + \ldots + y_n^p y_n^{q-p} < y_1^p + \ldots + y_n^q < 1$$

ce qui donne l'inégalité voulue.

Remarque : Il n'est pas nécessaire de passer par les y_i qui ont pour unique but de simplifier les calculs. On peut travailler directement avec les x_i et écrire :

$$x_1^q + \ldots + x_n^q = x_1^p x_1^{q-p} + \ldots + x_n^p x_n^{q-p} < x_1^p x_{n+1}^{q-p} + \ldots + x_n^p x_{n+1}^{q-p} = x_{n+1}^{q-p}(x_1^p + \ldots + x_n^p) < x_{n+1}^{q-p} x_{n+1}^p = x_{n+1}^q$$

ce qui est l'inégalité voulue.

2) On conserve la notation de la question précédente.

On remarque que notre raisonnement de la question précédente nous a permis de montrer que $y_1^q + \ldots + y_n^q < y_1^p + \ldots + y_n^p$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\left(x_{n+1}^p - (x_1^p + \ldots + x_n^p)\right)^q &= \left(x_{n+1}^p - (x_{n+1}^p y_1^p + \ldots x_{n+1}^p y_n^p)\right)^q \\
&= x_{n+1}^{pq}\left(1 - (y_1^p + \ldots + y_n^p)\right)^q \\
&< x_{n+1}^{pq}\left(1 - (y_1^q + \ldots + y_n^q)\right)^q \\
&< x_{n+1}^{pq}\left(1 - (y_1^q + \ldots + y_n^q)\right)^p
\end{aligned}$$

Pour la dernière inégalité, on a utilisé que si $0 < x < 1$, $x^q < x^p$ puisque $p > q$. Pour conclure, il suffit de remarquer que

$$x_{n+1}^{pq}\left(1 - (y_1^q + \ldots + y_n^q)\right)^p = \left(x_{n+1}^q - (y_1^q x_{n+1}^q + \ldots y_n^q x_{n+1}^q)\right)^p = \left(x_{n+1}^q - (x_1^q + \ldots + x_n^q)\right)^p$$

Solution alternative n°1 Dans la suite, on pose $z_i = x_i^p$ et $r = \dfrac{q}{p} > 1$. On pose aussi $f(t) = t^r$ pour tout $t > 0$.

1) L'inégalité à démontrer devient $f(z_1) + \ldots + f(z_n) < f(z_{n+1})$. Pour cela, on observe que la fonction f est croissante. En effet, elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ avec $f'(t) = rt^{r-1}$ qui est strictement positif pour tout $t > 0$.

Puisque $z_1 + \ldots + z_n < z_{n+1}$ (d'après l'hypothèse de l'énoncé), il suffit donc de montrer que $f(z_1) + \ldots + f(z_n) \leqslant f(z_1 + \ldots + z_n)$.

On commence par montrer le résultat pour $n = 2$.

La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ avec $f''(t) = r(r-1)t^{r-2}$. Cette quantité est toujours strictement positive lorsque $t > 0$, puisque $r > 1$. Cela signifie que la fonction f' est croissante.

Ainsi, si $a > 0$, alors la fonction g définie par $g(t) = f(t+a) - f(t) - f(a)$ est nulle en $t = 0$ et sa dérivée a pour expression $g'(t) = f'(t+a) - f'(t)$ qui est strictement positive par stricte croissance de f'. On déduit que $g(t) > g(0) = 0$, ce qui signifie bien que $f(t+a) > f(t) + f(a)$.

Ainsi, le résultat est vrai pour $n = 2$. Si on suppose qu'il est vrai pour un certain entier $k \geqslant 2$, alors on a

$$f(z_1) + \ldots + f(z_k) + f(z_{k+1}) > f(z_1 + \ldots + z_k) + f(z_{k+1}) > f(z_1 + \ldots + z_k + z_{k+1})$$

où l'on utilisé l'inégalité pour $n = 2$ et $z_1' = z_1 + \ldots z_k$ et $z_2' = z_{k+1}$. Donc le résultat est vrai pour $k+1$ et. De proche en proche, on obtient que l'inégalité est vraie pour n, ce qui résoud la première question.

2) L'inégalité à démontrer se réécrit cette fois-ci

$$f(z_{n+1}) - f(z_1) - \ldots - f(z_n) > f(z_{n+1} - z_1 - \ldots - z_n)$$

ou encore

$$f(z_{n+1}) > f(z_{n+1} - z_1 - \ldots - z_n) + f(z_1) + \ldots + f(z_n)$$

qui est vraie d'après la question précédente appliquée à $n+1$ et $z_1, \ldots, z_n, z_{n+1}' = z_{n+1} - z_1 - \ldots - z_n$ et $z_{n+2}' = z_{n+1}$ qui sont tous strictement positifs.

Commentaire des correcteurs : L'exercice, très difficile, n'a été entièrement résolu que par une poignée d'élèves. En revanche, un nombre significatif d'élève, relativement à la difficulté de l'exercice, est parvenu à résoudre la question 1). De plus, nombreux sont les élèves qui avaient bonne idée et qui ont pressenti qu'il fallait utiliser une inégalité de la forme $(a+b)^r > a^r + b^r$ lorsque $r > 1$ n'est pas forcément entier. En revanche, très rares sont les élèves qui sont parvenus à démontrer cette propriété dite "de suradditivité". Sans preuve de ce résultat, les élèves qui l'invoquaient ne pouvaient pas obtenir beaucoup de points.

Signalons également deux erreurs que l'on a beaucoup croisées dans les copies :

- ▷ Beaucoup d'élèves ont affirmé que la croissance de la fonction exponentielle suffisait à justifier que pour la question 1), on puisse remplacer le p de l'hypothèse par le q du résultat voulu. Mais si f est une fonction croissante et que $x \geqslant y+z$, on est loin de toujours avoir $f(x) \geqslant f(y)+f(z)$. La croissance de f nous guarantit seulement que $f(x) \geqslant f(y+z)$.
- ▷ Beaucoup d'élèves ont affirmé que $x^p < x^q$ pour tout $x < 0$. Cette inégalité n'est en fait vraie que pour tout $x > 1$. Lorsque $0 < x < 1$, on a l'inégalité inverse.
- ▷ Beaucoup d'élèves se sont contentés d'un raisonnement qualitatif, c'est-à-dire une prose donnant des raisons pour lesquelles l'inégalité devrait suivre à partir des hypothèses. Une telle argumentation n'est évidemment ni rigoureuse ni convaincante et n'a rapporté aucun point à leurs auteurs. On attendant une preuve rigoureuse centrée autour de calculs et de manipulation d'inégalités.