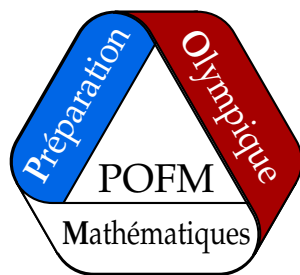


# PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES



TEST DU 18 MAI 2022

DURÉE : 4H

## Instructions

- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- ▷ Le **groupe Junior** est constitué des élèves nés en 2007 ou après. Ces élèves doivent traiter les exercices 1 à 4.
- ▷ Le **groupe Senior** est constitué des élèves nés en 2006 ou avant. Ces élèves doivent traiter les exercices 5 à 7.
- ▷ On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.  
Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.  
Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits. Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

**Chaque exercice est noté sur 7 points.**

# Énoncés Junior

*Exercice 1.* **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**

*Exercice 2.* Le gouvernement de Bosnie-Herzégovine a décidé de mettre en place un nouveau système de plaques d'immatriculations. Chaque plaque d'immatriculation devra contenir 8 chiffres, chacun pouvant valoir 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9. En outre, deux plaques d'immatriculation distinctes devront toujours avoir au moins deux chiffres différents. Par exemple, s'il met en circulation la plaque 00000000, le gouvernement ne pourra pas mettre en circulation la plaque 00010000.

Trouver le nombre maximum de plaques d'immatriculation que le gouvernement peut mettre en circulation.

Solution de l'exercice 2 Nous allons montrer que le nombre maximal de plaques disponibles est égal à  $10^7$ .

Tout d'abord, on dit que deux plaques font partie de la même *famille* si leur sept premiers chiffres sont différents. Chaque famille contient dix plaques, donc il y a  $10^7$  familles distinctes. Or, le gouvernement ne peut pas mettre en circulation plus d'une plaque par famille. Il met donc en circulation au plus  $10^7$  plaques.

Réciproquement, il peut se débrouiller pour créer  $10^7$  plaques en procédant comme suit : le dernier chiffre de chaque plaque est égal à l'opposé de la somme, modulo 10, des sept premiers chiffres de la plaque. Ainsi, il crée bien une plaque par famille.

En outre, la somme des chiffres de chaque plaque est divisible par 10. Mais si deux plaques ont exactement un chiffre de différence, les sommes de leurs chiffres ne peuvent être égales l'une à l'autre (modulo 10). Ainsi, deux plaques distinctes ont toujours au moins deux chiffres de différence, ce qui conclut.

Commentaire des correcteurs Cet exercice difficile n'a été résolu intégralement que par un seul élève. Plusieurs élèves ont trouvé des constructions ou bornes inférieures intéressantes, leur permettant par exemple d'affirmer que l'on pourrait mettre en place au moins  $10^4$  ou  $8! = 40320$  plaques d'immatriculation.

Cependant, très peu d'élèves ont réussi à obtenir la construction adéquate permettant d'atteindre  $10^7$  plaques. Le moyen le plus sûr d'obtenir une telle construction consistait à regarder ce qui se passait si on avait droit à 1 chiffre, puis 2 chiffres, puis 3 chiffres, et à repérer des motifs réguliers qui apparaissaient dans toutes les copies concernées : un entier était égal à la somme des autres.

Par ailleurs, et indépendamment, très peu d'élèves ont entrepris de trouver une borne supérieure sur le nombre de plaques possibles, alors même qu'une simple application du principe des tiroirs suffisait ici et que de nombreux élèves semblaient en avoir l'intuition. Il est toujours dommage de ne pas chercher des bornes supérieures **et** inférieures quand on cherche à évaluer une quantité, et même si ces bornes ne sont pas nécessairement faciles à trouver.

*Exercice 3.* **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**

*Exercice 4.* **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**

# Énoncés Senior

*Exercice 5.* **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**

*Exercice 6.* **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**

*Exercice 7.* **Cet exercice ne doit pas être diffusé.**